文章编号: 1000_0887(1999) 11_1193_05

关于非局部场论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(Ⅲ) ——重论线性非局部弹性理论*

黄 再兴

(南京航空航天大学 104 教研室, 南京 210016)

(樊蔚勋推荐)

摘要: 证明了在线性非局部弹性力学中能量平衡方程是动量平衡方程的首次积分, 论证了在非局部场论中局部化体力残余恒为零• 详细推导了线性非局部弹性理论的本构方程, 得到了反对称应力存在的新结果•

关 键 词: 首次积分; 反对称应力; 本构方程; 线性非局部弹性力学
中图分类号: O346.1; O343　　文献标识码: A

引 言

线性非局部弹性理论在断裂、位错以及波动问题中已经得到了应用[1], 解释了一些经典力学不能解释的问题• 然而, 正如文[2]所指出的那样, 以往的工作在推导有关非局部物体本构方程时所做的简化丢失了一些重要的非局部特征, 这必然也会在线性非局部弹性理论中得到反映• 因此, 本文根据文[2]的结果重新推导了线性非局部弹性体的本构方程•

首先, 文中证明了在弹性变形的纯力学过程中能量平衡方程是动量平衡方程的首次积分, 接着从局部化能量残余的变换公式出发, 论证了在非局部场论中局部化体力残余恒为零, 且表明这一性质是与材料的本构特性无关的• 文中详细推导了线性非局部弹性理论的本构方程, 得到了反对称应力存在的结论 ——这是以前从未得到过的, 它是材料非局部特征的重要体现之一•

1 非局部弹性理论的平衡方程

一般地, 力的作用与热效应在物质的运动过程中是耦合的• 考虑与外界无热交换的等温过程, 此时, 物体的运动与变形就表现为一种可逆的、准静态的、纯粹的力学过程, 在这种过程中, 物体对外界的响应表现为弹性响应, 其本构方程可由文[2]中的非局部热弹性本构方程简化而得, 表达式如下:

---

* 收稿日期: 1998_03_19; 修订日期: 1999_04_28
基金项目: 江苏省自然科学基金资助(BK97063)
作者简介: 黄再兴(1966~), 男, 博士, 副教授, 研究方向: 固体力学、结构强度, 已发表论文 20 余篇.

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot \boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{*}\mathrm{d}V(X'),\\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\cdot \boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{F}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{*}\mathrm{d}V(X')\cdot\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由于弹性变形是一种可逆的、准静态的纯力学过程,因此,它自动满足熵不等式且该过程中的能量平衡方程是动量平衡方程的首次积分• 下面对后一事实予以证明•

非局部动量平衡方程的微分形式可写成:

$$(\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}})\cdot\nabla + \rho\boldsymbol{f} = \rho\dot{\boldsymbol{v}} \tag{2}$$

将上式两边同时点乘 V 并在物体所占的整个空间区域 Ω 上积分得:

$$\int_{\Omega}[(\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}})\cdot\nabla]\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V(X) + \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V(X) = \int_{\Omega}\rho\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V(X), \tag{3}$$

由 Gauss 定理易推出

$$-\int_{\Omega}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}}:\boldsymbol{d} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}:\Omega)\,\mathrm{d}V(X) = \frac{DK}{Dt} - \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V(X) - \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{P}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S(X), \tag{4}$$

式中

$$K = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V(X) \qquad \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}),$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位法向矢量• 在经典连续介质力学中,能量平衡方程的积分形式可表达为:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega}\rho E\,\mathrm{d}V(X) + \frac{DK}{Dt} = \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V(X) + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{P}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S(X), \tag{5}$$

利用上式可将(4)式改写成:

$$-\frac{D}{Dt}\int_{\Omega}\rho E\,\mathrm{d}V(X) + \int_{\Omega}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{s}}:\boldsymbol{d} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}:\Omega)\,\mathrm{d}V(X) = 0, \tag{6}$$

局部化就得到:

$$-\rho\dot{E} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{s}}:\boldsymbol{d} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{s}}:\Omega = \rho\hat{E}\cdot \tag{7}$$

这就证明了上面的结论,它表明在非局部弹性理论中只有动量与动量矩平衡方程是独立的,而能量平衡方程只是动量平衡方程的首次积分•

需要指出的是,在参考标架的转动下,局部化能量残余 $\rho\hat{E}$ 按下式[2]

$$\rho\hat{E} = \rho\hat{E} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}:(\nabla\cdot\Omega^{\mathrm{T}}) + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\nsim\boldsymbol{r}:(\nabla\cdot\Omega^{\mathrm{T}}), \tag{8}$$

变化,式中 $\boldsymbol{r}$ 是位置矢量• 设有另一参考标架,它与描述上式所采用的参考标架之间相差一个平移量 $\boldsymbol{r}_0$ 且相对静止,在该参考标架中,(8) 式可表示成:

$$\rho\hat{E} = \rho\hat{E} + (\boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}:\nabla\cdot\Omega^{\mathrm{T}}) + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\nsim\boldsymbol{R}:(\nabla\cdot\Omega^{\mathrm{T}}), \tag{9}$$

显然 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0$,因此(9) − (8) 得:

$$\rho\hat{\boldsymbol{F}}\nsim\boldsymbol{r}_0:(\nabla\cdot\Omega^{\mathrm{T}}) = 0,$$

由于 $\boldsymbol{r}_0$ 的任意性,故必有 $\rho\hat{\boldsymbol{F}} = 0$,这表明在非局部场论中不存在局部化体力残余 $\rho\hat{\boldsymbol{F}}$,从而(8)可简化为:

$$\rho\hat{E} = \rho\hat{E} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{a}}:(\nabla\cdot\Omega^{\mathrm{T}})\cdot \tag{10}$$

2 本构方程的线性化

记位移梯度为 $\boldsymbol{D}'$,则它与变形梯度的关系可表示为:

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{F}' - \boldsymbol{I}' \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{I}'$ 是二阶单位张量, 因此, 利用位移梯度本构方程(1) 可表示为:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}^{s} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'} + \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right] + \rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\cdot \boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{D}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{*}\mathrm{d}V(X'), \\ \boldsymbol{t}^{a} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'} - \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right] + \rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\cdot \boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{D}'\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{*}\mathrm{d}V(X')\cdot \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

在小位移理论的前提条件下, 略去乘积项, 于是可得到:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}^{s} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'} + \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{*}\mathrm{d}V(X'), \\ \boldsymbol{t}^{a} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\rho\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'} - \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{*}\mathrm{d}V(X')\cdot \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

假设 ρU 是一个加性泛函(additive functional), 按照 Friedman_Katz 表示定理[3], 则 ρU 可以表示成:

$$\rho U(X, t) = \int_{\Omega}\Pi[\boldsymbol{D}'(X, X', t), X]\,\mathrm{d}V(X'), \tag{14}$$

式中 Π是关于$\boldsymbol{D}'$ 的连续标量值函数, 这里进一步假定 Π是关于$\boldsymbol{D}'$ 的二次可微标量值函数·

根据(14) 式, $\rho U(X, t)$ 的变分可表示为:

$$\delta[\rho U(X, t)] = \int_{\Omega}\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{D}'}: \delta\boldsymbol{D}'\,\mathrm{d}V(X'), \tag{15}$$

而按照 Riesz 表示定理, $\rho U(X, t)$ 的变分又可表示为[2]:

$$\delta[\rho U(X, t)] = \int_{\Omega}\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}: \delta\boldsymbol{D}'\,\mathrm{d}V(X')\cdot \tag{16}$$

比较(15)、(16) 两式得:

$$\int_{\Omega}\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}'}\mathrm{d}V(X') = \int_{\Omega}\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{D}'}\mathrm{d}V(X')\cdot \tag{17}$$

因此, 由上式可将(13) 式改写成:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}^{s} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{D}'} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{*}\mathrm{d}V(X'), \\ \boldsymbol{t}^{a} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{D}'} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{D}'}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{*}\mathrm{d}V(X')\cdot \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

为方便起见, 在下面的叙述中将采用 Descartes 张量的指标记法, 记 $\boldsymbol{t}^{s}$, $\boldsymbol{t}^{a}$ 及 $\boldsymbol{D}'$ 在直角坐标系中的分量形式分别为 $t_{ij}^{(s)}$、$t_{ij}^{(a)}$ 及 $u_{i,j}$· 在无初始应力的假设下, 取

$$\Pi = \frac{1}{2}H_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l}, \tag{19}$$

这里 $u_{i,j} = u_{i,j}(X, X', t)$, $H_{ijkl} = H_{ijkl}(\|X_k' - X_k\|, \varepsilon)$, ε 是一个与材料内禀微结构和外部特征尺度有关的常数· 由(19) 式求导数, 则得:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2}(H_{ijkl} + H_{klij})u_{k,l}, \tag{20}$$

令 $S_{ijkl} = (H_{ijkl} + H_{klij})/2$, 显然在 S_{ijkl} 中指标 ij 与 kl 具有对称性· 将(20) 式代入到(18) 式得:

$$\left.\begin{aligned} t_{ij}^{(s)} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(S_{ijkl} + S_{jikl})u_{k,l}^{*}\mathrm{d}V(X_k'), \\ t_{ij}^{(a)} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(S_{ijkl} - S_{jikl})u_{k,l}^{*}\mathrm{d}V(X_k'), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

记 $C_{ijkl} = (S_{ijkl} + S_{jikl})/2$, $Y_{ijkl} = (S_{ijkl} - S_{jikl})/2$, 故在 C_{ijkl} 中指标 i 与 j 具有对称性, 而在 Y_{ijkl} 中

指标 i 与 j 具有反对称性• 根据前面的论述, 由于指标 ij 与 kl 具有对称性, 因此, 在 C_{ijkl} 与 Y_{ijkl} 中指标 k 与 l 也分别具有对称性和反对称性• 将 $u^*_{k,l}$ 做和分解, 即

$$u^*_{k,l} = \boldsymbol{e}'_{kl}(X'_k, X_k, t) + \omega'_{kl}(X'_k, X_k, t), \tag{22}$$

式中 $\boldsymbol{e}'_{kl}$ 与 ω'_{kl} 分别是小变形应变张量与旋转张量• 将(22) 式及 C_{ijkl} 与 Y_{ijkl} 的表达式代入到(21) 式得:

$$\left.\begin{aligned} t^{(s)}_{ij} &= \int_\Omega C_{ijkl}(\|X'_k - X_k\|, \varepsilon)\, \boldsymbol{e}'_{kl}\, \mathrm{d}V(X'_k), \\ t^{(a)}_{ij} &= \int_\Omega Y_{ijkl}(\|X'_k - X_k\|, \varepsilon)\, \omega'_{kl}\, \mathrm{d}V(X'_k), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

这就是线性非局部弹性力学的本构方程, 由此可以看出, 在非局部理论的框架内, 反对称应力必定存在•

客观性原理要求[2]:

$$\int_\Omega Y_{ijkl}(\|X'_k - X_k\|, \varepsilon)\, \omega'_{kl}(X_k, X'_k, t)\, \mathrm{d}V(X'_k) = 0, \tag{24}$$

因此, (23) 的第二式又可写成:

$$t^{(a)}_{ij} = \int_\Omega Y_{ijkl}(\|X'_k - X_k\|, \varepsilon)[\omega'_{kl}(X'_k, X_k, t) - \omega'_{kl}(X_k, X'_k, t)]\, \mathrm{d}V(X'_k)• \tag{25}$$

若不考虑材料的内禀微结构, 即 $\varepsilon \to 0$, 此时方程(23) 应该与定律相一致• 基于这种物理要求, $C_{ijkl}(\|X' - X\|, \varepsilon)$ 与 $Y_{ijkl}(\|X' - X\|, \varepsilon)$ 应满足

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} C_{ijkl}(\|X'_k - X_k\|, \varepsilon) = \delta(\|X'_k - X_k\|) E_{ijkl}• \\ &\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} Y_{ijkl}(\|X'_k - X_k\|, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

这里 $\delta(\|X' - X\|)$ 是 Dirac 函数, E_{ijkl} 是材料的弹性常数•

3 结 论

1) 在非局部弹性力学中, 能量平衡方程是动量平衡方程(即运动方程)的首次积分, 这与经典弹性力学的结论相一致•

2) 在非局部场理论的框架中, 局部化体力残余恒为零, 且这一特性与材料的本构特性无关•

3) 本文得到了线性非局部弹性力学的本构方程, 结果表明, 即使在线性理论中也必定存在反对称应力, 这是以前从未得到过的新结论•

[参 考 文 献]

[1] Eringen C. Vistas of nonlocal continuum physics[J]. Int J Engrg Sci, 1992, **30**(14): 1551.

[2] 黄再兴. 关于非局部场论的几个新观点及其在断裂力学中的应用(Ⅱ)——重论非线性非局部热弹性本构方程[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(7): 713~720.

[3] Friedman, Katz M. A representation theorem for additive functionals[J]. Arch Rational Mech Anal, 1966, **21**(1): 49.

New Points of View on the Nonlocal Field Theory and Their Applications to the Fracture Mechanics(III) ——Re_Discuss the Linear Theory of Nonlocal Elasticity

Huang Zaixing

(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract: In this paper, it is proven that the balance equation of energy is the first integral of the balance equation of momentum in the linear theory of nonlocal elasticity. In other words, the balance equation of energy is not an independent one. It is also proven that the residual of nonlocal body force identically equals zero. This makes the transform formula of the nonlocal residual of energy much simpler. The linear nonlocal constitutive equations of elastic bodies are deduced in details, and a new formula to calculate the antisymmetric stress is given.

Key words: first integral; antisymmetric stress; constitutive equation; linear theory of nonlocal elasticity