

文章编号: 1000-0887( 1999) 11-1187-06

# 传动系统扭振的重频条件<sup>\*</sup>

陈奎孚, 焦群英

( 中国农业大学 东校区 工程基础科学部, 北京 100083)

( 李骊推荐)

摘要: 借助于传递矩阵法研究了两轴系扭振的重频条件。必要条件: 存在节点啮合对(JEC); 充要条件为: 四个边界传递系数( $f_B$ )等于零的个数不少于3个。给出了两轴系存在重频时的振型选择。多级轴系重频的必要条件与两轴系的必要条件相同, 而如果所有的相邻JEC之间的传递系数( $f_I$ )等于零时, 频率重数等于独立的 $f_B$ 为零的个数减1。若存在 $f_I \neq 0$ , 可将它所对应的连接部分删除, 从而把整个轴系的JEC分成内部不含 $f_I \neq 0$ 的几组, 该阶频率的总重数等于各组独立解个数之和。

关键词: 传动系统; 固有频率; 扭振

中图分类号: O321; O342 文献标识码: A

研究传动系统的扭转振动, 一般把齿轮当作刚性圆盘, 而轴简化为无转动惯量的扭簧。若考虑轴的转动惯量, 可将它分配到齿轮上, 或者用几节扭簧串接几个圆盘代替原轴。因而, 每根轴的模型均呈链式结构, 次一级轴可看作主链上分出的子链。因为动力只能单向传递, 所以每条链的动力入点只能有一个, 但出点可能有多个, 故传动系统的简化模型表现为树状结构。

求解扭转振动问题最有效的方法是传递矩阵法<sup>[1, 2, 3]</sup>, 围绕这一方法又有 Riccati<sup>[4, 5]</sup>, 多项式<sup>[6, 7]</sup>等改进方法, 最近也有人用动态子结构矩阵法计算分叉轴系<sup>[8]</sup>。具体实施中, 有时会出现被零除的数值不稳定现象。本文研究表明, 这不仅与反共振有关, 还有可能出现重频。在数值计算中, 重频常引起迭代效率的下降, 甚至收敛失败。实际结构的重频或近频将会导致系统稳定性下降。所以对重频的了解具有重要意义。

本文将研究传动系统的扭振的重频条件。

## 1 两轴系的振型方程

文[9]证明了单链结构的固有频率的互异性, 但传动系统要复杂的多。我们从图(1)所示的最简单的两轴系开始。

这个系统具有 $N_1 + N_2 + 2$ 个圆盘。轴1的盘 $p$ 和轴2的盘 $q$ 啮合, 它要求 $\theta_{p,1} / \theta_{q,2}$ 等于传动比 $n$ (下文符号出现两个脚标时, 第一个对应轴内位置, 第二个对应轴号), 所以只有个 $N_1 + N_2 + 1$ 自由度。可选轴1的 $N_1 + 1$ 个圆盘的转角和轴2除盘 $q$ 外的 $N_2$ 个圆盘的转角为广义坐标, 建立动力学方程

\* 收稿日期: 1998\_04\_06; 修订日期: 1999\_05\_23

作者简介: 陈奎孚(1969~), 男, 硕士, 讲师, 研究方向: 固体力学, 已发表论文十余篇。

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{0\}, \quad (1)$$

式中  $[M]$  为对角阵, 除对应轴 1 的盘  $p$  的外, 均为各自的转动惯量, 而对应  $p$  的为  $I_{p,1} + I_{q,2}/n^2$ , 附加项  $I_{q,2}/n^2$  是由于两轴啮合造成的.  $[K]$  也是对称. 式(1) 的模态问题是一广义特征值问题, 通过变换能把它变为一对称阵的特征值问题. 因为对称阵总可对角化<sup>[10]</sup>, 所以一定存在  $N_1 + N_2 + 1$  个互不相关的振型. 当  $N_1 + N_2 + 1$  个固有频率互异时, 一个振型对应一个频率; 有重频时, 必然会有多个振型对应一个频率.

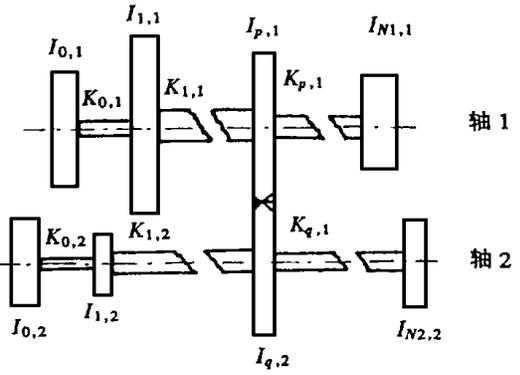


图 1 两轴轴系

研究重频的具体条件, 直接使用式(1) 并不方便, 我们仍借助于传递矩阵法.

从轴 1 中取出一个圆盘和它右边的轴, 如图(2) 所示. 可建立传递关系为<sup>[1,2,3]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i,1}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix}_{i,1} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i,1}^L, \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i+1,1}^L = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{i,1} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i,1}^R. \quad (3)$$

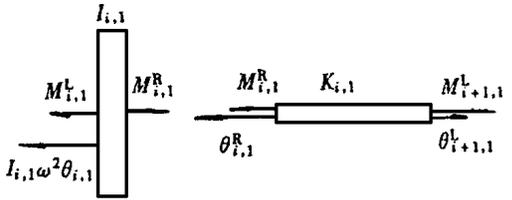


图 2 轴 1 第  $i$  段

式(2) 对应点传递, 记其系数阵为  $[P]_{i,1}$ ; 式(3) 式对应场传递, 记其系数阵为  $[F]_{i,1}$ . 自右向左的点、场传递矩阵分别为  $[P]_{i,1}^{-1}$ ,  $[F]_{i,1}^{-1}$ .

轴 1 和轴 2 的两个啮合盘如图(3) 所示. 由两盘的平衡方程可得

$$(M^R + \omega^2 I \theta - M^L)_{p,1n} = (M^R + \omega^2 I \theta - M^L)_{q,2} \quad (4)$$

式中  $M_{p,1}^R$ ,  $M_{q,2}^R$ ,  $M_{p,1}^L$ ,  $M_{q,2}^L$  的确定, 必须补充两轴的边界条件.

我们来建立边界到啮合盘的传递关系.

由式(2), (3) 可建立  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{0,1}^L$  到  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{p,1}^L$  的传递矩阵  $[T]_1^L$ , 即

$$[T]_1^L = \prod_{i=p-1}^0 [F]_{i,1} [P]_{i,1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_1^L, \quad (5)$$

式中  $A, B, C, D$  对应  $[T]$  的 4 个元素, 它们都是  $\omega$  的多项式.

$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{N_1+1}^R$  到  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{p,1}^R$  的

$$[T]_1^R = \prod_{i=p}^{N_1+1} [F]_{i,1}^{-1} [P]_{i+1,1}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_1^R, \quad (6)$$

尽管有矩阵求逆, 仍不难验证,  $[T]_1^R$  是  $\omega$  的多项式矩阵. 假定

边界条件为自由端, 即  $M_{0,1}^L = M_{N_1+1}^R = 0$ , 则有

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{p,1}^L = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}_1^L \theta_{0,1}, \quad (7)$$

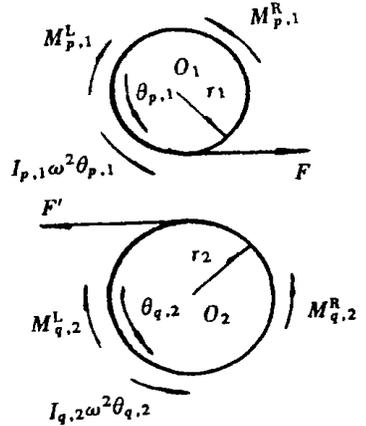


图 3 2 轴啮合盘受力图

和 
$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{p,1}^R = \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix}_1^R \theta_{N_1,1} \quad (8)$$

假设轴 2 的两端也是自由的, 采用与轴 1 相同的符号有

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{q,2}^L = \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix}_2^L \theta_{0,2} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{q,2}^R = \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix}_2^R \theta_{N_2,2} \quad (10)$$

注意盘  $p, q$  左右两侧转角相同. 两轴啮合的协调条件为:

$$\theta_{p,1} + n\theta_{q,2} = 0 \quad (11)$$

消去式(4), (7), (8), (9), (10), (11) 中的扭矩, 得到

$$\left. \begin{aligned} A_1^L \theta_{0,1} - \theta_{p,1} &= 0, & A_1^R \theta_{N_1,1} - \theta_{p,1} &= 0, \\ nA_2^L \theta_{0,2} + \theta_{p,1} &= 0, & nA_2^R \theta_{N_2,1} + \theta_{p,1} &= 0, \\ n^2 C_1^L \theta_{0,1} - n^2 C_1^R \theta_{N_1,1} - nC_2^L \theta_{0,2} + \\ & nC_2^R \theta_{N_2,2} - (n^2 I_{p,1} + I_{q,2}) \omega^2 \theta_{p,1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中  $A_1^L$  相当于轴 1 左边界的转角为 1 时, 传递到盘  $p$  的转角, 我们称之为左边界非零量传递系数; 相应地,  $A_1^R$  称右边界非零量传递系数. 左、右边界非零量传递系数简称边界传递系数  $f_B$ . 显然, 轴 2 的 2 个  $f_B$  为  $A_2^L, A_2^R$ .

## 2 两轴系重频条件

振型是一组相对比值, 当选定一个规则化标准后, 振型的数值就唯一确定了. 式(12) 是五元一次线性方程组, 若存在多个独立解, 必为重频.

选择  $\theta_{p,1}$  为振型参考点, 分为两种情形.

1)  $\theta_{p,1} \neq 0$

显然  $A_1^L, A_1^R, A_2^L, A_2^R$  绝不为零, 从而可由式(12) 的前 4 式唯一确定  $\theta_{0,1}, \theta_{N_1,1}, \theta_{0,2}, \theta_{N_2,2}$  (若  $\omega$  为固有频率, 第 5 式必成立). 这样边界状态向量便由  $\theta_{p,1}$  唯一确定(边界状态向量中扭矩全为零), 再由式(2), (3) 可得到一振型. 这一振型也绝不会与  $\theta_{p,1} = 0$  的振型对应同一个频率. 因为: 若同一个  $\omega$  又使  $\theta_{p,1} = 0$ , 但  $A_1^L \neq 0$  ( $A_1^L$  不随规则化标准而变), 只有  $\theta_{0,1} = 0$ , 同理  $\theta_{N_1,1} = 0, \theta_{0,2} = 0, \theta_{N_2,2} = 0$ , 再由式(2), (3) 传递, 各盘的转角均为零, 显然这不是一个振型.

如果两个啮合盘恰好为振型节点, 我们称之为节点啮合对 (joint engaging couple, 简称 JEC).

从上述的论证可知重频必要条件为: 存在 JEC. 但这不是充分条件.

2)  $\theta_{p,1} = 0$

式(12) 变为

$$\begin{bmatrix} A_1^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & nA_2^L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & nA_2^R \\ n^2 C_1^L & -n^2 C_1^R & -nC_2^L & nC_2^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{0,1} \\ \theta_{N_1,1} \\ \theta_{0,2} \\ \theta_{N_2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

前4式由协调条件推出,后1式由平衡条件导得,我们分别称之为协调方程和平衡方程。设式(13)的左端系数矩阵秩为 $r$ 。当 $r \geq 4$ 时,式(13)只有零解,又据式(2),(3),(5),(6)可知,同一列的 $A, C$ 不能同时为零,因而 $r \geq 1$ 。所以 $r$ 只能取1,2,3,下面分别进行讨论。

a)  $r = 1$

式(13)存在三个线性无关解,故频率重数为3。这时要求 $A_1^L = A_1^R = A_2^L = A_2^R = 0$ 。其中一个振型在边界转角 $\{\theta_{0,1}, \theta_{N_1,1}, \theta_{0,2}, \theta_{N_2,2}\}^T$ 可选为 $\{C_1^R, C_1^L, 0, 0\}^T$ ,它表示轴1动,轴2静止,两轴间不发生扭矩传递,仿佛轴2不存在,实际上这个振型对应的固有频率也必是轴1的固有频率。对称地,可选另一个振型的 $\{\theta_{0,1}, \theta_{N_1,1}, \theta_{0,2}, \theta_{N_2,2}\}^T$ 为 $\{0, 0, C_2^R, C_2^L\}^T$ 。第三个振型可按与前2个振型正交求出。

b)  $r = 2$

存在两个线性无关解,频率重数为2。这种情形下,要求 $A_1^L, A_1^R, A_2^L$ 和 $A_2^R$ 中有3个为零。不同的取零情形有4类。如果 $A_1^L \neq 0$ ,其它三个为零,可选择两个正交振型的边界 $\{\theta_{0,1}, \theta_{N_1,1}, \theta_{0,2}, \theta_{N_2,2}\}^T$ 如下

$$\begin{bmatrix} 0 & C_2^L & -nC_1^R & 0 \\ 0 & C_2^L & nC_1^R & 2nC_1^R C_2^L / C_2^R \end{bmatrix}^T,$$

传递计算中心如果选择 $\theta_{0,1} \neq 0$ 来传递必会出现被零除。

c)  $r = 3$

只存在一个非零解,频率重数为1。 $A_1^L, A_1^R, A_2^L$ 和 $A_2^R$ 中有两个为零。若 $A_1^L \neq 0$ 且仍假定 $\theta_{0,1} \neq 0$ ,也会导致被零除。这时是反共振。

从上述对2自由轴的边界传递特性分析可得重频的充要条件为:边界传递系数 $f_B = 0$ 的个数不少于3个,两轴系最多存在三重重频。

除自由端边条件外,工程中也有时使用固定端模型,它的边条件是转角为零,如图4所示。

在图1的轴1左侧串一固定端后, $[T]_1^L$ 应计入 $k_0$ 的影响,新的 $[T]_1^L$ 仍记为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ,则式

(7)变为

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{p,1}^L = \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix}_1^L M_{-1,1}^L$$

如果其它的边界也是固定端,可作同样处理,最后建立一个与式(12)相似的方程组(只要将对应自由端的 $A, C, \theta$ 换成对应固定端的 $B, D, M$ )。显然固定端的 $f_B$ 是 $B$ 。不难得到,有固定端情形的重频充要条件与自由端的两轴系相同。

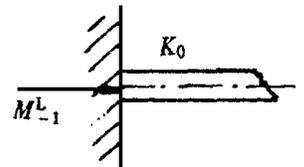


图4 固定端模型

### 3 多轴系

齿轮箱等机构中,往往是多级传动轴系。

如同两轴系,多轴系的某阶振型不存在JEC时,对应的频率必为单频。

若振型只有一个JEC,可仿照两轴系建立JEC的4支各个 $f_B$ 。不同于两轴系,多轴系的JEC的4支中某支的边界可能多于一个,因而 $f_B$ 也不止一个。但是可以证明,同一支的 $f_B$ 要么全为零,要么全不为零,而重频只与 $f_B$ 是否取零有关,所以同一支的所有 $f_B$ 可认为只有一个。

独立,同一支的边界可变量也只有一个独立。全部轴系的 4 个独立的  $f_B = 0$  的个数为 3, 4 分别对应 2 重、3 重重频。

如果存在  $M$  个 JEC, 自轴系树梢部逐一将 JEC 截下, 截面位于 JEC 的近树根侧。对截下的单元依次编号, 截面上用扭矩代替其它部分的作用。一个典型的 JEC 如图 5 所示。

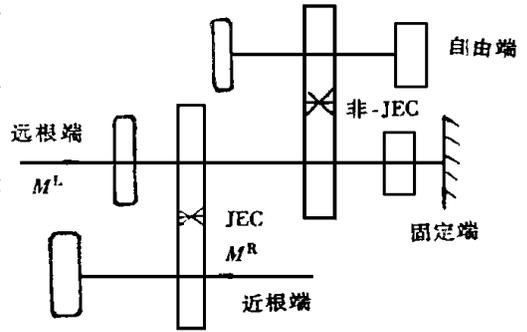


图 5 一个典型截出单元

截下的单元的远根端截面转角为零(在该处与另一个 JEC 相接), 截面处的传递向量的可变部分是扭矩, 所以可作固定端处理。协调方程中的传递系数是传递矩阵中的  $B$ , 我们称之为相邻 JEC 之间的传递系数, 简称节点间传递系数  $f_l$ 。

除第  $M$  个单元外, 所有单元有且只有一个近根端截面, 这个截面包含在 JEC 中, 对频率的重数无影响, 其它三支各有一个独立边界(或 JEC 间)传递系数, 满足三个协调方程。第  $M$  个单元有 4 个独立的边界(或 JEC 间)传递系数, 满足 4 个协调方程。此外, 所有的单元应满足平衡方程。

从整个系统来说, 它是树形结构, 只有  $M-1$  个截面, 有  $M-1$  个独立截面扭矩。

综上所述: 整个系统有  $3M+1$  个独立可变量, 其中  $M-1$  个截面扭矩和  $2M+2$  个独立的边界可变量; 这些可变量满足  $4M+1$  个方程, 其中  $M$  个平衡方程、 $M-1$  个 JEC 间协调方程和  $2M+2$  个边界协调方程。所有的协调方程为边界(或 JEC 间)传递系数乘上相应的可变量等于零; 整个系统有  $M-1$  个独立的  $f_l$  和  $2M+2$  个独立的  $f_B$ 。

如果所有的  $f_l = 0$ , 则所有相邻 JEC 间传递矩阵中的  $B = 0$ , 从而  $D \neq 0$ , 故可将  $M$  个平衡方程中  $M-1$  个截面扭矩消去。最终,  $4M+1$  个方程变成  $2M+3$  个方程( $M-1$  个 JEC 间的协调方程因  $f_l = 0$  而自动成立), 它以  $2M+2$  个边界独立量为未知数。其中的平衡方程与其它  $2M+2$  个协调方程独立, 所以最多有  $2M+2$  个不相关解, 这时要求所有的  $2M+2$  个  $f_B$  为零。若有  $Z_B$  个  $f_B = 0$ , 则独立解个数为  $Z_B-1$ , 相应的重频重数为  $Z_B-1$ 。

当存在  $f_l \neq 0$  时, 则相应的 JEC 之间各处传递向量必为零向量, 相互无影响。设有  $Z_l$  个  $f_l \neq 0$ , 将对应这  $Z_l$  个  $f_l \neq 0$  的连接部分截断, 则所有的 JEC 分成  $Z_l+1$  组。组内的  $f_l$  均为零, 其独立解个数可按前面的方法分析。设第  $i$  组的独立解个数为  $F^i$ , 则整个系统的某阶频率的重数为各组  $F^i$  之和。若所有的  $Z_b^i > 1$ , 则总重数  $F$  为

$$F = \sum_{i=1}^{Z_l+1} F^i = Z_B - Z_l - 1$$

也就是说频率重数比  $f_B = 0$  个数与  $f_l \neq 0$  个数之差少 1。

## 4 结束语

作者利用传递矩阵法研究了两轴轴系的重频条件。必要条件为: 存在 JEC; 充要条件为:  $f_B = 0$  的个数不少于 3 个。给出了两轴系重频时的振型选择以及计算中被零除的意义。多级轴系重频必要条件与两轴系的必要条件相同。当所有  $f_l = 0$  时, 频率重数等于独立的  $f_B = 0$  个数减 1。若有  $f_l \neq 0$ , 可将它对应的连接截断, 从而把整个轴系 JEC 分成几个内部不含  $f_l \neq 0$  的组, 该阶频率的总重数等于各组独立整个解个数之和。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] 郑兆昌. 机械振动(中册)[M]. 北京: 机械工业出版社, 1980, 295~ 305.
- [2] [英] 哈托 D. J. 振动分析的矩阵计算方法[M]. 翁善惠译. 北京: 机械工业出版社, 1982, 141~ 159.
- [3] [美] 汤姆森 W. T. 振动学理论及应用[M]. 康渊译. 北京: 晓园出版社, 1994, 291~ 322.
- [4] 王正. Riccati 传递矩阵法的奇点及其消除方法[J]. 振动与冲击, 1987, (2): 74~ 78.
- [5] 赵国桥, 王正. Riccati 传递矩阵法在流体动力学中的应用[J]. 应用力学学报, 1992, 9(3): 94~ 97.
- [6] Kim D, david J W. An improved method for stability and damped critical speed of rotor\_bearing system[J]. Trans of ASME of Vibration and Acoustics, 1990, 112(1): 112~ 118.
- [7] 张家忠, 刘士学, 柴建新. 传递矩阵—多项式法的改进及其应用[J]. 应用力学学报, 1994, 11(2): 76~ 80.
- [8] 吴慧新, 严新生. 分支轴系扭振分析的动态子结构矩阵法[J]. 振动、测试与诊断, 1995, 15(2): 1~ 15.
- [9] 陈奎孚, 焦群英. 链式结构振动系统固有频率的互异性[J]. 北京农业工程大学学报, 1995, 15(2): 24~ 28.
- [10] 将正新, 施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1988, 96.

## On the Repeated Natural Frequencies for Torsional Vibration of Shafts

Chen Kuifu, Jiao Qunying

( College of Engineering Sciences, China Agriculture  
University, Beijing 100083, P R China )

**Abstract:** To investigate the repeated frequency condition (RFC) for torsional vibration of shafts' system, the transfer matrix method was adopted. Firstly, the transfer relationship from the boundary to engaging disks of double shafts' system(DSS) was constructed. Secondly, the RFC of DSS was deduced out and the methods to select mode shape were presented. Finally, The relationship was extended to multilevel transmission system (MTS), and the RFC of this system was explored. The conclusions is this: 1) the necessary RFC requires the existence of joint engaging couple (JEC); 2) for DSS, the sufficient is the number of boundary transfer factors( $f_B$ ) larger than 2; 3) the whole system can be split into independent groups, the total multiplicity is the sum of independent solution number of every group, the latter is the number of independent  $f_B = 0$  inside the group minus 1.

**Key words:** vibration; natural frequency; torsional vibration; shaft system