应用数学和力学, 第 20 卷 第 11 期(1999 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1168_07

一类微分方程组的积分解法及其在厚板热力弯曲中的应用*

尹益辉, 陈 刚, 陈裕泽

(中物院结构力学研究所, 四川 绵阳 621900)

(张汝清推荐)

摘要: 提出并证明了一类非齐次线性微分方程组的积分解法, 并以求解受激光和横向力联合加载厚板的轴对称弯曲问题作为该方法的应用实例, 籍此给出了考虑挤压效应、旋转惯性效应和剪切变形效应时厚板动态弯曲的扰度和转角公式• 结果表明运用该定理求解问题具有规范、简明的特点•

关 键 词: 微分方程组; 积分方法; 厚板; 轴对称热力弯曲

中图分类号: O175.2 文献标识码: A

引 言

对于许多工程问题, 其数学模型可用一类线性微分方程组

$$\left.\begin{aligned}
&L_1[u_1(q)] = F_1(q),\\
&L_2[u_2(q)] = F_2(q) + f_2[u_1(q)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_n[u_n(q)] = F_n(q) + f_n[u_1(q), u_2(q), \cdots, u_{n-1}(q)],
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

及其初边值条件描述• 其中 q 是自变量集合或其任意子集, 其定义域为 Ω, $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是齐次线性微分算子, $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是未知变量,$f_2, f_3, \cdots, f_n$ 是齐次线性微积分算子, $F_1(q)$, $F_2(q), \cdots, F_n(q)$ 是给定的已知函数•

对于式(1)及其初边值条件构成的定解问题, 由于非齐次项 $F_1(q), F_2(q), \cdots, F_n(q)$ 的存在, 若按传统方法, 显然, 求解过程将异常复杂, 尤其当这些非齐次项的函数形式比较复杂时, 解析或半解析求解就更困难• 另外, 无论这些非齐次项发生什么变动, 求解过程都得从头开始, 这种重复性的数学演算是很不经济的•

文[1]讨论了方程组(1)的特殊形式

---

* 收稿日期: 1998_06_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672059); 高技术激光领域经费资助项目
作者简介: 尹益辉(1965~), 男, 博士生, 副研究员, 研究方向: 冲击动力学, 已发表论文 10 余篇, 获部级科技进步奖 3 项.

$$\left.\begin{aligned}&L_1[u_1(q)] = F_1(q),\\&L_2[u_2(q)] = f_2[u_1(q)],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&L_n[u_n(q)] = f_n[u_1(q), u_2(q), \cdots, u_{n-1}(q)],\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

并给出解为

$$u_i(q) = \int_\Omega u_i^\delta(q/q_0)F_1(q_0)\mathrm{d}q_0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中, $u_i^\delta(q/q_0)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是(2) 及其初边值条件的 Green 函数基本解•

在文[1]的基础上, 本文提出了式(1)及其初边值条件的积分公式解• 利用该积分公式求解, 不仅可以避免传统求解方法的不足, 大大减少工作量, 而且使求解规范化, 便于对复杂问题实施必要的电算操作•

1　基本解和积分方法

根据(2)式的递推性和线性微分方程的叠加原理, 设线性微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&L_j[u_j(q)] = \delta(q - q_0),\\&L_{j+1}[u_{j+1}(q)] = f_{j+1}[0, 0, \cdots, 0, u_j(q)],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&L_n[u_n(q)] = f_n[0, 0, \cdots, u_j(q), u_{j+1}(q), \cdots, u_{n-1}(q)], (1 \leqslant j \leqslant n)\end{aligned}\right\}$$

及其初边值条件的基本解为

$$u_j^{j\delta}(q/q_0), u_{j+1}^{j\delta}(q/q_0), \cdots, u_n^{j\delta}(q/q_0)•$$

定理　非齐次线性微分方程组(1)及其初边值条件的解的充分必要条件是

$$u_i(q) = \int_\Omega\Big[\sum_{j=1}^{i}u_i^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\Big]\mathrm{d}q_0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),\tag{3}$$

证明　当 $i = 1$ 时, 有

$$u_1(q) = \int_\Omega u_1^{1\delta}(q/q_0)F_1(q_0)\mathrm{d}q_0,$$

是方程组(1)的第一式, 即单个微分方程及其初边值条件的解, 是普通 Green 函数解• 充分必要条件成立•

设 $i = k$ 时, (3) 式是(1) 及其初边值条件的充分必要解•

考察 $i = k + 1$ 时的情况, 由(3) 式有

$$u_{k+1}(q) = \int_\Omega\Big[\sum_{j=1}^{k+1}u_{k+1}^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\Big]\mathrm{d}q_0•$$

于是, 考虑到 L_i, f_i 均为齐次线性算子, 有

$$L_{k+1}[u_{k+1}(q)] = \int_\Omega\sum_{j=1}^{k+1}L_{k+1}[u_{k+1}^{j\delta}(q/q_0)]F_j(q_0)\mathrm{d}q_0 =$$

$$\int_\Omega\{f_{k+1}[u_1^{1\delta}(q/q_0), u_2^{1\delta}(q/q_0), \cdots, u_k^{1\delta}(q/q_0)]F_1(q_0) +$$

$$f_{k+1}[0, u_2^{2\delta}(q/q_0), \cdots, u_k^{2\delta}(q/q_0)]F_2(q_0) + \cdots +$$

$$f_{k+1}[0, 0, \cdots, u_k^{k\delta}(q/q_0)]F_k(q_0) + \delta(q - q_0)F_{k+1}(q_0)\}\,\mathrm{d}q_0 =$$

$$f_{k+1}\Big[\int_\Omega u_1^{1\delta}(q/q_0)F_1(q_0)\,\mathrm{d}q_0, \int_\Omega \sum_{j=1}^{2} u_2^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\,\mathrm{d}q_0, \cdots,$$

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{k} u_k^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\,\mathrm{d}q_0\Big] + F_{k+1}(q) =$$

$$F_{k+1}(q) + f_{k+1}[u_1(q), u_2(q), \cdots, u_k(q)]\cdot$$

即 $i = k + 1$ 时,(3) 式仍然是(1) 式及其初边值条件的解• 充分性成立•

由数学归纳法, 定理充分条件得到证明•

必要性证明, 有

$$L_{k+1}[u_{k+1}(q)] = F_{k+1}(q) + f_{k+1}[u_1(q), u_2(q), \cdots u_k(q)] =$$

$$f_{k+1}\Big[\int_\Omega u_1^{1\delta}(q/q_0)F_1(q_0)\,\mathrm{d}q_0, \int_\Omega \sum_{j=1}^{2} u_2^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\,\mathrm{d}q_0, \cdots,$$

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{k} u_k^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\,\mathrm{d}q_0\Big] + \int_\Omega \delta(q - q_0)F_{k+1}(q_0)\,\mathrm{d}q_0 =$$

$$\int_\Omega \{f_{k+1}[u_1^{1\delta}(q/q_0), u_2^{1\delta}(q/q_0), \cdots, u_k^{1\delta}(q/q_0)]F_1(q_0) +$$

$$f_{k+1}[0, u_2^{2\delta}(q/q_0), \cdots, u_k^{2\delta}(q/q_0)]F_2(q_0) + \cdots +$$

$$f_{k+1}[0, 0, \cdots, u_k^{k\delta}(q/q_0)]F_k(q_0)\}\,\mathrm{d}q_0 + \int_\Omega L_{k+1}[u_{k+1}^{(k+1)\delta}(q/q_0)]F_{k+1}(q_0)\,\mathrm{d}q_0 =$$

$$\int_\Omega \{L_{k+1}[u_{k+1}^{1\delta}(q/q_0)]F_1(q_0) + L_{k+1}[u_{k+1}^{2\delta}(q/q_0)]F_2(q_0) + \cdots +$$

$$L_{k+1}[u_{k+1}^{(k+1)\delta}(q/q_0)]F_{k+1}(q_0)\}\,\mathrm{d}q_0 =$$

$$L_{k+1}\Big[\int_\Omega \sum_{j=1}^{k+1} u_{k+1}^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\,\mathrm{d}q_0\Big],$$

故得

$$u_{k+1}(q) = \int_\Omega \Big[\sum_{j=1}^{k+1} u_{k+1}^{j\delta}(q/q_0)F_j(q_0)\Big]\,\mathrm{d}q_0\cdot$$

这样, $i = k + 1$ 时, (1) 式及其初边值条件的解为(3) 式• 必要性证毕•

综上所述, 定理得证•

定理对于非齐次方程组的定解问题首先求广义的 Green 函数解, 然后利用积分求和形式给出显式表达式, 使非齐次定解问题的求解过程简单化和规范化• 在物理上, 定理反映了线性数理方程组中各方程的“外载”(非齐次项 $F_i(q)$) 对定解问题的各控制变量 $u_i(q)$ 的影响规律•

2　激光_力联合作用厚板弯曲问题中的应用

伴随激光技术的发展, 在军事和民用工程中, 研究激光对材料和结构造成的破坏都是极其重要的• 目前, 这一问题正受到国际国内的广泛注意• 对于受激光辐射的金属板结构, 当功率密度在 10^4W/cm^2 左右时, 加热导致的高温将引起板的整体热膨胀变形和应力, 导致预加横载下构件内力及变形的改变, 引起结构整体的热动力响应• 而当功率密度大于一定值时, 板上光

斑区很薄的表层将发生喷溅，虽然表面薄层的汽化本身不一定引起结构过度残缺，但其喷溅冲量对板的横向作用则有可能与温升作用一起引起板的失效。

这里，将利用本文提出的方法，对表面受横载和激光辐照作用无限大厚板的热弹性弯曲响应进行求解。演示本文积分方法的具体实施过程和意义；并在理论上给出热力联合作用厚板弯曲问题的解析公式，可供进一步的理论分析应用。

从基本的热弹性关系和厚板弯曲理论出发，导出 Timoshenko 板的热传导方程和位移型动力方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\alpha_B I(r,t)\mathrm{e}^{-\alpha_B(z+h/2)},\\
&T(r,z)\big|_{t=0}=T_0,\\
&-k\frac{\partial T}{\partial z}+h_0(T-T_0)=0\qquad(z=h/2),\\
&-k\frac{\partial T}{\partial z}+h_1(T-T_0)=0\qquad(z=-h/2),\\
&\nabla^4 w-\left(\frac{k\tau\rho}{G}+\frac{\rho J}{D}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 w+\frac{k\tau\rho}{G}\frac{\rho J}{D}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\\
&\quad-\frac{E\alpha_0}{D(1-\mu)}\nabla^2 M_T+\frac{q}{D}+\frac{k\tau J}{G}\left(\frac{\rho J}{D}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}-\nabla^2 q\right)+\frac{k\sigma}{C_1 h}\nabla^2 q,\\
&w(r,0)=\frac{\partial w}{\partial t}(r,0)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(r,0)=\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}(r,0)=0,\\
&\frac{Gh}{k\tau}\left(\beta_r+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=D\left(\frac{\partial^2\beta_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\beta_r\right)-\\
&\quad\rho J\frac{\partial^2\beta_r}{\partial t^2}-\frac{E\alpha_0}{1-\mu}\frac{\partial M_T}{\partial r}+D\frac{k\sigma}{C_1 h}\frac{\partial q}{\partial r}\\
&\beta_r(r,0)=\frac{\partial\beta_1}{\partial t}(r,0)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{4}
$$

其中各符号的意义与文[2]中相同。

令 $r=r/h,\ z=z/h,\ t=kt/(\rho ch^2),\quad T=(T-T_0)/T_0,$

$$h_j=h_jh/k\,(j=0,1),\ \alpha_B=\alpha_Bh,\ I=Ih/(kT_0)\,,$$

$$\alpha_0=\alpha_0T_0,\ w=w/h,\ M_T=M_T/(T_0h^2),\ q=\frac{k\tau}{G}q,\ \bar{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,,$$

将式(4)无因次化，并取

$$I(r,t)=I_0\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2}f_1(t)\,,$$

对 q,T,I,w 作零阶 Hankel 变换，对 β_r 作一阶 Hankel 变换，得

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial T}{\partial t}e^{\alpha_B(z+1/2)}+\frac{s^2}{A_1}Te^{\alpha_B(z-1/2)}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}e^{\alpha_B(z+1/2)}=f_1(t),\\
&\frac{\partial T}{\partial z}+h_0T=0,\qquad \left(z=\frac{1}{2}\right),\\
&-\frac{\partial T}{\partial z}+h_1T=0,\quad \left(z=\frac{1}{2}\right),\\
&T(s,z,0)=0,\\
&A_2\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+A_3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+s^4w=12(1+\mu)\alpha_0 s^2M_T+f_2(t),\\
&w(s,0)=\frac{\partial w(s,0)}{\partial t}=\frac{\partial^2 w(s,0)}{\partial t^2}=\frac{\partial^3 w(s,0)}{\partial t^3}=0,\\
&A_4\frac{\partial^2\hat{\beta}_r}{\partial t^2}+A_5\hat{\beta}_r=\frac{k\tau}{Gh}\frac{E\alpha_0 h}{1-\mu}sM_T+sw+f_3(t),\\
&\hat{\beta}_r(s,0)=\frac{\partial\hat{\beta}_r(s,0)}{\partial t}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{5}
$$

式中，$A_1=\alpha_B I_0\dfrac{sr_0^2}{2}\exp(-r_0^2s^2/4)$,

$$A_2=\left(\frac{k\tau\rho}{G}\frac{\rho J}{D}\right)\left(\frac{k}{\rho ch^2}\right)^4h^4,$$

$$A_3=\left(\frac{k\tau\rho}{G}+\frac{\rho J}{D}\right)\left(\frac{k}{\rho ch^2}\right)^2h^2s^2+\frac{\rho h}{D}\left(\frac{k}{\rho ch^2}\right)^2h^4,$$

$$A_4=\frac{k\tau\rho J}{Gh}\left(\frac{k}{\rho ch^2}\right)^2,$$

$$A_5=1+\frac{Dk\tau}{Gh^3}s^2,$$

$$f_2(t)=\frac{Gh^3}{k\tau D}q+\frac{\rho J}{D}h^2\left(\frac{k}{\rho ch^2}\right)^2\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+\left(1-\frac{Gk\sigma}{C_1k\tau}\right)s^2q,$$

$$f_3(t)=-\frac{Gk\sigma}{C_1h^3}sq,$$

取$f_1(t)=\delta(t-t')$，$f_2(t)=f_3(t)\equiv 0$，求解式(5)，得

$$T^{1\delta}(s,z,t)=A_1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{F_i}{N_i}\left(\frac{C_{1i}}{C_{2i}}\sin\beta_i z+\cos\beta_i z\right)\exp[-(s^2+\beta_i^2)(t-t')]H(t-t'),$$

$$
\begin{aligned}
w^{1\delta}(s,t)=&\frac{12(1+\mu)\alpha_0 sA_1}{\sqrt{A_3^2+4A_2s^4}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{F_i}{N_i}\frac{C_{1i}}{C_{2i}}\frac{1}{\beta_i^2}\left[2\sin\left(\frac{\beta_i}{2}\right)-\beta_i\cos\left(\frac{\beta_i}{2}\right)\right]\cdot\\
&\left\{\frac{1}{\tau_b}\frac{1}{(\beta_i^2+s^2)^2+\tau_b}[(\beta_i^2+s^2)\sin\tau_b(t-t')-\tau_b\cos\tau_b(t-t')+\right.\\
&\tau_b e^{-(\beta_i^2+s^2)(t-t')}]-\frac{1}{\tau_a}\frac{1}{(\beta_i^2+s^2)^2+\tau_a}[(\beta_i^2+s^2)\sin\tau_a(t-t')-\\
&\left.\tau_a\cos\tau_a(t-t')+\tau_a e^{-(\beta_i^2+s^2)(t-t')}]\right\}H(t-t'),
\end{aligned}
$$

$$\hat{\beta}_r^{1\delta}(s,t)=\frac{s}{\sqrt{A_4A_5}}\int_0^t\left(w^{1\delta}+\frac{k\tau}{Gh}\frac{E\alpha_0 h}{1-\mu}M_T^{1\delta}\right)\sin\tau_c(t-t_c)\mathrm{d}t_1,$$

其中 $\dfrac{C_{1i}}{C_{2i}} = \dfrac{\beta_i \sin(\beta_i/2) - h_0\cos(\beta_i/2)}{\beta_i \sin(\beta_i/2) + h_0\cos(\beta_i/2)}$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots)$;

$$N_i = \frac{1}{2}\left[\frac{C_{1i}}{C_{2i}}\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\sin\beta_i\right) + \left(1 + \frac{1}{\beta_i}\sin\beta_i\right)\right] \quad (i = 1, 2, \cdots);$$

$$F_i = \frac{1}{\alpha_B^2 + \beta_i^2}\left\{\frac{C_{1i}}{C_{2i}}\left[e^{-\alpha_B^2}\left(-\alpha_B\sin\frac{\beta_i}{2} - \beta_i\cos\frac{\beta_i}{2}\right) - \left(\alpha_B\sin\frac{\beta_i}{2} - \beta_i\cos\frac{\beta_i}{2}\right)\right] + e^{-\alpha_B^2}\left(-\alpha_B\cos\frac{\beta_i}{2} + \beta_i\sin\frac{\beta_i}{2}\right) + \left(\alpha_B\cos\frac{\beta_i}{2} + \beta_i\sin\frac{\beta_i}{2}\right)\right\},$$

$$\tau_c^2 = \left(\frac{Gh}{k\tau} + \frac{D}{h^2}s^2\right)\Big\backslash\left[\rho J\left(\frac{k}{\rho ch^2}\right)^2\right] = \frac{A_5}{A_4}.$$

取 $T(s,z,t) \equiv M_T(s,t) \equiv 0, f_1(t) \equiv f_3(t) \equiv 0, f_2(t) = \delta(t - t')$, 求解式(5) 得

$$w^{2\delta}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + 4A_2s^4}}\left[\frac{1}{\tau_b}\sin\tau_b(t - t') - \frac{1}{\tau_a}\sin\tau_a(t - t')\right]H(t - t'),$$

$$\hat{\beta}_r^{2\delta}(s,t) = \frac{s}{\sqrt{A_4A_5}}\int_0^t w^{2\delta}(s, t_1)\sin\tau_c(t - t_c)\,dt_1.$$

取 $M_T(s,t) \equiv w(s,t) \equiv 0, f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv 0, f_3(t) = \delta(t - t')$, 求解式(5)得

$$\hat{\beta}_r^{3\delta}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{A_4A_5}}\sin\tau_c(t - t')H(t - t').$$

积分各基本解并求和, 得

$$T(s,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{1\delta}(s,z,t,t')f_1(t')\,dt',$$

$$w(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}[w^{1\delta}(s,t,t')f_1(t') + w^{2\delta}(s,t,t')f_2(t')]\,dt',$$

$$\hat{\beta}_r(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}[\hat{\beta}_r^{1\delta}(s,t)f_1(t') + \hat{\beta}_r^{2\delta}(s,t')f_2(t') + \hat{\beta}_r^{3\delta}(s,t)f_3(t')]\,dt'.$$

求出以上各式后, 再考虑具体的激光束和表面横载的时间空间分布, 对其进行 Hankel 逆变换, 即可求得

$$\left.\begin{aligned} T(r,z,t) &= \int_0^\infty sT(s,z,t)J_0(sr)\,ds, \\ w(r,t) &= \int_0^\infty sw(s,t)J_0(sr)\,ds, \\ \beta_r(r,t) &= \int_0^\infty s\hat{\beta}_r(s,t)J_1(sr)\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

本示例计入了弯曲运动的剪切变形效应、旋转惯性效应和挤压效应, 结果(6)可用于分析这些效应对板运动的影响规律, 也可用于计算分析激光热能沉积下板的空间加热和表面喷溅冲量横向作用下的整体热动力响应规律.

应用传统方法对(4)式求解, 也可得到与本文(6)相同的结果. 但由于非齐次项形式的多样性, 较本文方法势必要大大增加工作量. 本文方法还具有求解步骤规范的优点, 更减少了问题求解的难度.

3　小　　结

本文提出并证明了一类非齐次线性微分方程组的一个积分解法, 并将其应用于无限大厚板在激光辐照和横载联合作用下的热弹性弯曲响应问题的求解, 其结果可供进一步的理论分

析应用• 求解过程显示本文方法具有规范、简明的特点•

[参 考 文 献]

[1] 尹益辉, 陈裕泽• 一类微分方程组的解法及其在圆板热弯曲问题求解中的应用[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 1995, **18**(3): 91~ 96•

[2] 尹益辉, 陈裕泽. 轴对称热载作用厚板的热弹性运动效应分析[J]. 爆炸与冲击, 1994, **14**(2): 119~ 128•

[3] 四川大学数学系编• 高等数学(第四册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981, 229~ 278.

[4] Couront R, Hillbert D. Methods of Mathematical Physics [M]. New York: Interscience Pub, 1962, 767.

A Solving Method for a System of Partial Differential Equations With an Application to the Bending Problem of a Thick Plate

Yin Yihui, Chen Gang, Chen Yuze

(Institute of Structural Mechanics, CAEP, P. O. Box, 919_401, Mianyang, Sichuan 621900, P R China)

Abstract: A theorem of solving a system of linear non- homogeneous differential equations through integrating and adding its basic solutions is put forward and proved, the mathematical role and physical nature of the theorem is interpreted briefly. As an example, the theorem is applied to solve the problem of thermo- force bending of a thick plate.

Key words: partial differential equations; integrating method; thick plate; thermo- force bending