应用数学和力学, 第 20 卷 第 11 期(1999 年 11 月
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999 11_1161_07

Kuramoto_Sivashinsky 方程解的定性分析

江成顺[1], 顾海明[2]

(1 信息工程大学 应用数学系, 郑州 450002; 2 山东大学 数学与系统科学学院, 济南 250100

(张石生推荐

摘要: 研究 Kuramoto_Sivashinsky 方程的两种初边值问题, 运用 Galerkin 方法给出一系列先验估计结果, 得到广义解和古典解的存在唯一性、正则性及某些条件下的渐近性质

关 键 词: Kuramoto_Sivashinsky 方程; 初边值问题; 广义解; 古典解; 渐近性质
中图分类号: O175 26 文献标识码: A

1 问题的提出

考虑具有明显物理意义和力学模型的 Kuramoto_Sivashinsky 方程[1,2]

$$\frac{u}{t} + \quad \frac{{}^4 u}{x^4} + \frac{{}^2 u}{x^2} + u\frac{u}{x} = 0, \tag{1}$$

的带有初值

$$u(x, 0) = \quad (x) \tag{2}$$

和边值条件

$$u(-l, t) = u(l, t) = u_{x^2}(-l, t) = u_{x^2}(l, t) = 0 \tag{3a}$$

或边值条件

$$u_x(-l, t) = u_x(l, t) = u_{x^3}(-l, t) = u_{x^3}(l, t) = 0, \tag{3b}$$

的两种初边值问题$\{(1, (2, (3a\}$(简记为 P1 和$\{(1, (2, (3b\}$(简记为(P2

在(P1 和(P2 中, u 为未知函数, $\ > 0$ 为常数, $\ (x)$ 是给定的初始函数

方程(1 在力学和物理学中的有关无穷维动力系统的一些动态性质, R. Temam 在文献[1]中已有所叙述 在文[2]中, Igor Kukavica 讨论了(1 的带有周期边值条件

$$\frac{{}^i u}{x^i}\left(-\frac{l}{2}, t\right) = \frac{{}^i u}{x^i}\left(\frac{l}{2}, t\right) \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{4}$$

的初边值问题{(1 ,(2 ,(4 }

尽管[1]中考虑的 $2D$ (二维 Navier_Stokes 方程[1~3]的含有周期边界条件的定解问题与问题{(1 ,(2 ,(4 }有某些类似的动力系统特征, 然而, Igor Kukavica 在[2]中得到了问题{(1 ,(2 ,(4 }的一个有趣的极限性质: 即当初值 $\ (x) \quad L^2(\ )$ 为给定的实值奇函数时, 若时间 t 允许取负值, 且当 $t \quad -$ 时, 问题{(1), (2), (4)}的解 $u(x, t)$ 或为整体吸因子[1,3], 或满足如

收稿日期: 1998_03_27; 修订日期: 1999_06_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871051 ; 中国博士后科学基金资助项目(4997 72161
作者简介: 江成顺(1960~ , 男, 博士, 副教授, 研究方向: 应用数学与计算数学, 已发表论文 30 多篇.

下性质:

$$\lim_{t\ -}\frac{\log|\ u(t)\ |}{|\ t\ |}= \tag{5}$$

由于极限(5 和对应的 2DNavier_Stokes 方程的相应的带有周期边界条件的初边值问题的解所满足的性质

$$\lim_{t\ -}\frac{\log|\ u(t)\ |}{|\ t\ |}< \quad , \tag{6}$$

有着本质的差别, 所以, 尽管许多文献讨论了 2D Navier_Stokes 方程的解的定性理论和某些动态性质(见文献[3~ 5] 及其参考文献等 , 但给出作为四阶抛物型方程的 Kuramoto_Sivashinsky 方程(1 的一些定性分析仍然是有意义的工作

这里需要指出的是: 某些其它形式的四阶抛物型方程的初边值问题, 已有一些学者作出了一些理论研究结果 如文献[6~ 8] 等, 研究了人口问题的增大和弥散现象时, 出现了如下方程

$$u_t = - \ a_1 u_{x^4} + \ a_2 u_{x^2} + \ (au^3)_{x^2} + f(u), \tag{7}$$

描述的广义扩散模型 文献[6 和 7] 的作者主要利用积分估计技巧和 Leray_Schauder 不动点原理等证明了方程(7 的一类定解问题解的存在性、唯一性等性质

本文采用 Galerkin 逼近解方法[8,9] 研究方程(1 的问题(P1 和(P2 的部分动力性态(包括逼近解的先验估计、整体光滑解的存在唯一性、正则性及某些条件下的渐近性质

为论述问题简明起见, 我们假设

$$|\ u(\ ,t)\ |^2_{L^2(\ )} = (u, u); \qquad u \quad {}^2_{L^2(Q_t)} = [u, u],$$

其中 $= (- \ l, l), Q_t = \qquad [0, t], 0 \quad t \quad T, T > \ 0$, 且内积为

$$(u, v) = \int_{-l}^{l} uv\,\mathrm{d}x, \quad [u, v] = \int_0^t (u, v)\,\mathrm{d}t = \int_{Q_t} uv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

此外, 采用通常意义下的 Sobolev 空间记号 $H^k(\quad)$ 等

2 基 本 引 理

考虑问题(P1 , 假设$\left\{ y_n(x) \right\}$为常微分方程特征值问题:

$$y^{(4)} = \quad y; y(- \ l) = \ y(l) = \ y\ (- \ l) = \ y\ (l) = \ 0$$

的对应于特征值 $_n$ 的特征函数系 且设$\left\{ y_n(x) \right\}(n = \ 1, 2, \quad , N)$ 是完备正交函数系, 则(P1 的 Galerkin 逼近解可表示为

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N} {}_{N,n}(t) y_n(x), \tag{8}$$

其中 $_{N,n}(t)(n = \ 1, 2, \quad , N)$ 是待定函数, 且 N 为正整数 根据 Galerkin 方法, $u_N(x, t)$ 与 $_{N,s}(t)(s = \ 1, 2, \quad , N)$ 应满足下列内积方程组

$$\left.\begin{aligned} &(u_{Nt}, y_s) + (\ u_{Nx^4}, y_s) + (u_{Nx^2}, y_s) + (uu_{Nx}, y_s) = 0, \\ &(u_N(x, 0), y_s) = (\ (x), y_s), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 $s = \ 1, 2, \quad , N$, 下面用 C 表示与 N 无关的常数, 不同之处的 C 可以有不同的值, 我们先引述一些引理

引理 1 设 V_{2k} 是完备正交系$\left\{ y_n(x) \right\}$在 Sobolev 空间 $H^{2k}(\quad)$ 中的闭线性扩张, $k \quad 1$ 为正整数 设初值 $(x) \quad V_2$ 且满足边界条件 则对任意正整数 N, 初值问题(9) 在$[0, T]$ 中存在解 $u_N(x, t)$ 且满足

$$\| u_N(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + \ u_N\ ^2_{H^2(Q_t)} + \ u_N\ ^2_{H^4(Q_t)} \quad C \quad (t \quad [0,T]) \tag{10}$$

证　先用 $_{N,s}(t)$ 乘以(9) 中方程两端, 然后对 $s = 1, 2, \ , N$ 求和, 利用分部积分运算后所得的等式, 再两端对 t 在$[0, t]$ 上积分, 可得到

$$\| u_N(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + 2\ u_{Nx^4}\ ^2_{L^2(Q_t)} + 2\ u_{Nx}\ ^2_{L^2(Q_t)} + 2[uu_{Nx}, u_N] = \|\ \|^2_{L^2(\ )}$$

利用　$y(-l) = y(l) = y(-l) = y(l) = 0$ 可知

$$u_N(-l,t) = u_N(l,t) = u_{Nx^2}(-l,t) = u_{Nx^2}(l,t) = 0$$

对 $\| u_{Nx}\|^2_{L^2(\ )}$ 利用插值公式[8, 9], 得

$$\| u_N(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + \ u_{Nx^2}\ ^2_{L^2(Q_t)} \quad C_1\ u_N\ ^2_{L^2(Q_t)} + C_2\|\ \|_{L^2(\ )} \tag{11}$$

由 Gronwall 不等式[8], 得到

$$\| u_N(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + \ u_{Nx^2}\ ^2_{L^2(Q_t)} \quad C\|\ \|^2_{L^2(\ )}, \quad t \quad [0,T] \tag{12}$$

类似地, 若用 $_s\ _{N,s}(t)$ 乘以(9) 中方程, 并对 $s = 1, \ , N$ 求和, 并经分部积分计算, 可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_{Nx^2}(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + 2\ (u_{Nx^4}, u_{Nx^4}) \quad 2(u_{Nx^3}, u_{Nx^3}) + 2(u_N u_{Nx}, u_{Nx^4}),$$

对 t 在$(0, t)$ 上积分, 有

$$\| u_{Nx^2}(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + 2\ u_{Nx^4}\ ^2_{L^2(Q_t)} \quad 2\ u_{Nx^3}\ ^2_{L^2(Q_t)} + 2[u_N u_{Nx}, u_{Nx^4}] + \|\ _{x^2}\|^2_{L^2(\ )}$$

由 $y(-l) = y(l) = 0$ 和插值公式, 经分部积分, 可得

$$\| u_{Nx^2}(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + \ u_{Nx^4}\ ^2_{L^2(Q_t)} \quad C(1 + \|\ _{x^2}\|^2_{L^2(\ )}),$$

亦即　$$\| u_N(\ ,t)\|^2_{H^2(\ )} + \ u_N\ ^2_{H^4(Q_t)} \quad C \quad (\ t \quad [0,T]), \tag{13}$$

其中$\|\ _{x^2}\|^2_{L^2(\ )}$ 的有界性由　$V \quad H^2(\ )$ 推出　由(12) 和(13) 可知(10) 成立　证毕

引理 2[8]　设 $G(z_1, z_2, \ , z_h)$ 是变量 $z_1, z_2, \ , z_h$ 的函数, 且设 G 是关于每个变量都 $k(k \quad 1)$ 阶连续可微的　又设 $z_i(x,t) \quad L\ ([0,T]; H^k(\ ))(i = 1, 2, \ , h)$, 则估计式

$$\int_{-l}^{l} | D_x^k D(z_1, \ , z_h)|^2\mathrm{d}x \quad C(M,k,h)\sum_{i=1}^{h}\| z_i\|^2_{H^k(\ )},$$

成立, 其中 $D_x^k = \dfrac{\ ^k}{\ x^k}$, $M = \max\limits_{i=1,\ ,h}\ \max\limits_{\substack{0\ t\ T\\ -l\ x\ l}} | z_i(x,t)|$

引理 3　若引理 1 的假设条件成立, 且设 $(x) \quad V_{2k}(k \quad 1$ 为正整数), 则对 Galerkin 近似解 $u_N(x,t)$, 有估计式

$$\| u_N(\ ,t)\|^2_{H^k(\ )} + \ u_N\ ^2_{H^{2(k+1)}(Q_t)} \quad C \quad (\ t \quad [0,T]), \tag{14}$$

证　为得到 $u_N(x,t)$ 的进一步的估计, 需用到

$$y_s^{(2m)}(-l) = y_s^{(2m)}(l) = 0 \quad (m = 0, 1, \ ), \tag{15}$$

其中 $(2m)$ 表示 $y_s(x)$ 的导数的阶数

利用归纳法可证明(14 , 事实上, 当 $k = 1$ 时, 由引理 1 知(14) 成立　假设 $k = p$ 时, (14) 成立　用 $_s^{p+1}\ _{N,s}(t)$ 乘以(9) 中方程, 并对 $s = 1, \ , N$ 求和, 利用(15) 和分部积分, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_{Nx^{2(p+1)}}(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )} + 2\ \| u_{Nx^{2(p+1)}}(\ ,t)\|^2_{L^2(\ )}\\ &\quad 2\| u_{Nx^{2(p+2)-1}}\|^2_{L^2(\ )} + C\|(u_N u_{Nx})_{x^{2p+1}}\|\ \| u_{Nx^{2(p+2)}}\|_{L^2(\ )}\end{aligned} \tag{16}$$

由引理 2 和归纳法假设以及插值公式, 有

$$\|(u_N u_{Nx})_{x^{2p+1}}\|_{L^2(\ )} \quad C_1^* + C_2^*\| u_{Nx^{2(p+2)}}\|^{1/4}_{L^2(\ )}, \tag{17}$$

$$\| u_{Nx^{2(p+2)-1}}\|^2 \quad C_3^* + C_4^*\| u_{Nx^{2(p+2)}}\|^{3/4}_{L^2(\ )}, \tag{18}$$

其中 C_i^* $(i = 1, 2, 3, 4)$ 为不依赖于 N 的常数

将(17 和(18 代入(16 ,并利用 Young 不等式, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{Nx^{2(p+1)}}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )} + \| u_{Nx^{2(p+2)}} \|^2_{L^2(\ )} \quad C$$

因此, 有

$$\| u_N(\ ,t) \|^2_{H^{2(p+1)}(\ )} + \quad u_{Nx^{2(p+2)}} \quad ^2_{L^2(Q_t)} \quad C \quad (\ t \quad [0,T])$$

引理 3 得证 证毕

引理 4 设引理 3 中条件成立, 若 k 2, $k = 2 + p_0$, p_0 0, 则有估计式

$$\| u_{Nt}(\ ,t) \|^2_{H^{2p_0}(\ )} + \quad u_{Nt} \quad ^2_{H^{2(p_0+1)}(Q_t)} \quad C \quad (\ t \quad [0,T]) \tag{19}$$

证 利用归纳法证明 事实上, 先对初值问题(9 中方程的两边关于 t 求导, 然后同乘以 $_{N,s}(t)$, 再对 $s = 1,\ \ , N$ 求和, 利用分部积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{Nt}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )} + 2 \| u_{Nx^2t} \|^2_{L^2(\ )} \quad 2 \| u_{Nxt} \|^2_{L^2(\ )} + 2((u_N u_{Nx})_t, u_{Nt}), \tag{20}$$

对 $\| u_{Nxt} \|^2_{L^2(\ )}$ 利用插值不等式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{Nt}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )} + \| u_{Nx^2t} \|^2_{L^2(\ )} \quad C \| u_{Nt} \|^2_{L^2(\ )} + C \tag{21}$$

下证 $\| u_{Nt}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )}$ 对 N 一致有界 事实上, 用 $_{N,s}(t)$ 乘以(9) 中方程两端, 并对 $s = 1,\ \ , N$ 求和, 含 $t = 0$ 得

$$\begin{aligned} \| u_{Nt} \|^2_{L^2(\ )} \quad & C \| u_{Nx^4}(\ ,0) \|^2_{L^2(\ )} + \| u_{Nx^2}(\ ,0) \|^2_{L^2(\ )} + \\ & \| u_N(\ ,0) u_{Nx}(\ ,0) \|^2_{L^2(\ )}, \end{aligned} \tag{22}$$

由 的假设条件知, (22) 右端一致有界 因此, $\| u_{Nt}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )}$ 对于 N 也一致有界 由(21) 和 Gronwall 不等式, 可知

$$\| u_{Nt}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )} + \quad u_{Nx^2t} \quad ^2_{L^2(Q_t)} \quad C \quad (\ t \quad [0,T])$$

假设当 0 p_0 n 时, (19) 成立, 欲证: 当 $p_0 = n + 1$ 时, (19) 也成立 事实上, 对(9) 中方程关于 t 求导, 然后乘以 $^{n+1}_{s}\ _{N,s}(t)$, 再对 s 求和, 经分部积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{Nx^{2(n+1)}t} \|^2_{L^2(\ )} + 2 \| u_{Nx^{2(n+2)}t} \|^2_{L^2(\ )} \\ & \quad 2 \| u_{Nx^{2(n+2)-1}t} \|^2_{L^2(\ )} + \| (u_N u_{Nx})_{x^{2n+1}t} \|_{L^2(\ )} \| u_{Nx^{2(n+2)}t} \|_{L^2(\ )} \end{aligned} \tag{23}$$

由引理 2 和插值公式, 有

$$\| (u_N u_{Nx})_{x^{2n+1}t} \|_{L^2(\ )} \quad C + C \| u_{Nt} \|^{\frac{2n+1}{2n+4}}_{H^{2(n+2)}(\ )}, \tag{24}$$

$$\| u_{Nx^{2n+3}t} \|_{L^2(\ )} \quad C \| u_{Nt} \|^{\frac{2n+3}{2n+4}}_{H^{2(n+2)}(\ )} \tag{25}$$

(24 和(25 中的 C 都是与 N 无关的正常数

把(24 ,(25 代入(23 ,用 Young 不等式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{Nx^{2(n+1)}t} \|^2_{L^2(\ )} + \| u_{Nx^{2(n+2)}t} \|^2_{L^2(\ )} \quad C \tag{26}$$

因 $k = 3 + n$, 故易见 $\| u_{Nx^{2(n+1)}t}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )}$ 关于 N 一致有界 这样, 由(26) 和 Gronwall 不等式, 得到

$$\| u_{Nx^{2(n+1)}t}(\ ,t) \|^2_{L^2(\ )} + \quad u_{Nx^{2(n+2)}t} \quad ^2_{L^2(Q_t)} \quad C \quad (\ t \quad [0,T]) \tag{27}$$

则(19 成立 引理 4 得证

引理 5　设引理 4 中条件成立, 且设 $k = 2r + q_{r-1}, r \quad 1, q_{r+1} \quad 0$　若 $k \quad 2r(r = 1, 2, \quad)$, 则有估计式

$$| u_{Nt^r} |^2_{H^{2q_{r-1}}(\ )} + \quad u_{Nt^r} \quad ^2_{H^{2+2q_{r-1}}(Q_t)} \quad C \quad \text{对}(r = 2, 3, \quad, t \quad [0, T]) \tag{28}$$

证　若 $r = 2$, 则 $k = 4 + q_1$, 对(9) 中方程两边关于 t 求两次导数, 并将结果同乘以 $^{q_1} \quad _{N,s}(t)$, 再对 $s = 1, \quad, N$ 求和, 经分部积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | u_{Nx^{2p_1}t^2} |^2_{L^2(\ )} + 2 \quad | u_{Nx^{2q_1}t^2} |^2_{L^2(\ )}$$

$$2 | u_{Nx^{1+2q_1}t^2} |^2_{L^2(\ )} + 2((u_N u_{Nx}))_{x^{2q_1}t^2}, u_{Nx^{2q_1}t^2}) \tag{29}$$

令 $q_1 = 0$, 利用 Cauchy 不等式[8, 9], 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | u_{Nt^2} |^2_{L^2(\ )} + 2 \quad | u_{Nx^2t^2} |^2_{L^2(\ )}$$

$$2 | u_{Nxt^2} |^2_{L^2(\ )} + C_1^* \quad | u_{Nt^2} |^2_{L^2(\ )} + C_2^* + C_3^* \quad | (u_N u_{Nx})_{t^2} |^2_{L^2(\ )}, \tag{30}$$

其中 C_1^*, C_2^* 为与 N 无关的常数, $C_3^* > 0$ 为常数

由引理 2, 得

$$| (u_N u_{Nx})_{t^2} |^2_{L^2(\ )} \quad C\left\{1 + | u_{Nt^2} |^2_{L^2(\ )} + | u_{Nxt^2} |^2_{L^2(\ )}\right\} \tag{31}$$

由插值公式, 得

$$| u_{Nxt^2} |^2_{L^2(\ )} \quad C | u_{Nt^2} |_{L^2(\ )} | u_{Nx^2t^2} |_{H^2(\ )}$$

$$C_0 | u_{Nx^2t^2} |^2_{L^2(8)} + C | u_{Nt^2} |^2_{L^2 8\#} \tag{32}$$

将(31 和(32 代入(30 , 并令 C_0 充分小, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | u_{Nt^2} |^2_{L^2(8)} + | u_{Nx^2t^2} |^2_{L^2(8)} [\quad C | u_{Nt^2} |^2_{L^2(8)} + C\# \tag{33}$$

易证: $| u_{Nt^2}(\#, t) |^2_{L^2(8)}$ 关于 N 一致有界, 由(33) 和 Gronwall 不等式, 可得

$$| u_{Nt^2}(\#, t) |^2_{L^2(8)} + \quad + u_{Nx^2t^2} + \quad ^2_{L^2(Q_t)} [\quad C \quad (P\, t \quad I \quad [0, T])\#$$

类似地, 可证: 当 $q_1 \setminus 1$ 时, 有

$$| u_{Nx^{2q_1}t^2} |^2_{L^2(8)} + \quad + u_{Nx^{2q_1}t^2} + \quad ^2_{L^2(Q_t)} [\quad C \quad (P\, t \quad I \quad [0, T])\#$$

当 $r = 3, 4, \ ,$　时, 也可类似证明(28) 成立#　引理 5 证毕#

3　定理及其证明

由第 2 节中各引理及其证明可知: Galerkin 逼近解 $u_N(x, t)$ 是一致有界的(因为对每个估计不等式, C 都与 N 无关, $0 [\quad t [\quad T, T > 0$ 为任意常数)#　因此知 $A_{N,s}(t) = (u_N, y_s), (s = 1, 2, \ , \ , N)$ 先验有界, 从而 $A_{N,s}(t)$ 对 t 是整体存在的#　由[8, 9] 中广义解, 古典解等定义, 有下面结论:

定理 1　在引理 5 的条件下,　若 $k \setminus 3$, 则问题(P1) 存在唯一整体广义解 $u(x, t)$, 且此解有连续导数 $u_{x^s}(0 [\quad s [\quad 2k - 5)$ 和广义导数 $u_{x^st^r}(0 [\quad s + 4r [\quad 2k; r = 0, 1)$;　若 $k \setminus 5$, 则(P1 有唯一整体古典解 $u(x, t)$ 且它有连续导数 $u_{x^st^r}(0 [\quad s + 4r [\quad 2k - 5, r = 0, 1, 2, \ , \ )$ 及广义导数 $u_{x^st^r}(0 [\quad s + 4r \setminus 2k, r = 0, 1, 2, \ , \ )\#$

证　1　若 $k \setminus 3$, 由引理 3 和引理 4 可知:

$$u_{Nx^s} \quad I \quad L^{]}(8 @[0, T]) \qquad (0 [\quad s [\quad 2k - 1),$$

$$u_{Nx^st} \quad I \quad L^{]}(8 @[0, T]) \qquad (0 [\quad s [\quad 2k - 5),$$

我们从 $\left\{u_N(x, t)\right\}$ 中选取一子列, 不妨仍记为 $\left\{u_N(x, t)\right\}$, 使得当 $N \quad y \quad]$　时, 存在函数 $u(x,$

$t)$, 且子序列$\left\{u_N(x,t)\right\}$在 Q_T 中一致收敛于极限函数 $u(x,t)$# 相应的子序列的导数$\left\{u_{Nx}(x,t)\right\}$也一致收敛于 $u_x(x,t)$# 而$\left\{u_{Nx^s}(x,t)\right\}(0 [s [2k)$ 和$\left\{u_{Nx^s t}(x,t)\right\}(0 [s [2(k-2))$ 分别在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于广义导数 $u_{x^s}(0 [s [2k)$ 和 $u_{x^s t}(0 [s [2(k-2))$# 因此, 当 $k \backslash 3$ 时, (P1) 存在广义整体解 $u(x,t)$#

2 若 $k \backslash 5$, 则引理 5 知

$$u_{x^s t^r} \; I \; L^2(Q_T) \qquad (0 [s+4r [2k),$$

$$u_{x^s t^r} \; I \; L^{]}(Q_T) \qquad (0 [s [2(k-2r)-1; r = 2, 3, ,),$$

问题(P1 有整体古典解 $u(x,t)$, 且它满足定理 1 的正则性#

利用能量积分[10,9], 易证(P1 的解的唯一性# 证毕#

定理 2 设引理 5 的条件成立, 则(P1 的广义解或古典解 $u(x,t)$ 具有长时间性态

$$\lim_{t y]} | u(\#, t) | = 0\# \tag{34}$$

证 将方程(11 两边乘以 u 并在 8 上积分, 经分部积分和利用引理 1 的证明方法, 可得

$$\frac{d}{dt} | u(\#,t) |^2_{L^2(8)} + 2E| u_{x^2} |^2_{L^2(8)} + 2| u_x |^2_{L^2(8)} + 2(uu_x, u) = 0,$$

由于 $(uu_x, u) = Q_{-l}^{l} u^2 u_x dx = 0$, 所以, 有

$$\frac{d}{dt} | u(\#,t) |^2_{L^2(8)} [- 2E| u_{x^2}(\#,t) |^2_{L^2(8)} \tag{35}$$

由 $| U(x) |^2_{L^2(8)}$ 的有界性和引理 1 知 $+ u_{Nx^2} +^2_{L^2(Q_t)}$ 有界, 因而 $| u_{x^2}(\#,t) |^2_{L^2(8)}$ 有界# 由(35) 推知, 存在常数 $r_0 > 1$, 使得

$$\frac{d}{dt} | u(\#,t) |^2_{L^2(8)} [- r_0 | u(\#,t) |^2_{L^2(8)}\#$$

经积分运算可知, 对初值 $U(x)$, 有

$$| u(\#,t) |^2_{L^2(8)} [| U |^2_{L^2(8)} e^{-r_0 t}\#$$

易见(34 成立, 定理 2 证毕#

注 1 若设$\left\{y_n(x)\right\}$是特征值问题

$$\left.\begin{aligned} & y^{(4)} = Ky, \\ & yc(-l) = yc(l) = y\;(-l) = y\;(l) = 0\# \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

的对应于特征值 $K = K_n$ 的特征函数系, 且设$\left\{y_n(x)\right\}$是完备正交系, 其中 $n = 1, 2, , , N$, 则(P2 的 Galerkin 近似解为

$$u_N(x,t) = \underset{n=1}{\overset{N}{E}} A_{N,n}(t) y_n(x)\# \tag{37}$$

其中 $A_{N,n}(t)(n = 1, 2, , , N)$ 为待定系数函数, N 是正整数# 用 Galerkin 方法, 可得类似于第 2 节中的一系列基本引理和类似于定理 1、2# 这里只陈述如下定理

定理 3 设对于问题(P2 , 初值 $U(x) \; I \; V_{2k}$ 且 $k = 2r + q_{r-1}, q_{r-1} \backslash 0(r = 1, 2, ,)$, 且 $U(x)$ 满足边界条件#

1 若 $k \backslash 3$, 则(P2) 有唯一整体广义解 $u(x,t)$, 且 $u_{x^s}(x,t)(0 [s [2k-s)$ 连续, 广义导数 $u_{x^s t^r}(x,t)(0 [s+4r [2k, r = 0, 1, ,)$ 存在;

2 若 $k \backslash 5$, 则(P2) 有唯一整体古典解 $u(x,t)$, 且有连续导数 $u_{x^s t^r}(0 [s+4r [2k-5; r = 0, 1, ,)$ 和广义导数$(0 [s+4r [2k, r = 0, 1, ,)$#

定理 4 假设定理 3 的条件成立# 则(P2 的解满足渐近性质: $\lim_{t y]} | u(\#,t) |_{L^2(8)} = 0\#$

注2 采用本文的方法, 也可讨论某些更为一般的非线性抛物型方程(如半线性非齐次方程 的各种初边值问题#

[参 考 文 献]

[1] Temam R. Infinite_dimensional dynamical systems in mechanics and physics[A]. Appl Math Sciences [M], Vol 68. New York: Springer, 1988.

[2] Kukavica Igor. On the behavior of solutions of the Kuramoto_Sivashinsky equation for negative time [J]. J Math Anal Appl, 1992, 166(2 : 601~ 606.

[3] Sell G R. Global attractors for the three_dimensional Navier_stokes equation[J]. J of Dynamics and Differential Equation, 1996, 8(1 : 1~ 33.

[4] Sell G R, You T. Dynamics of Evolutionary Equation[Z]. Lecture Notes, 1995.

[5] Kwak M. Finite dimensional inertial forms for the 2D Navier_Stokes equation[J]. Indian J Math, 1992, 41(3 : 927~ 981.

[6] Cohen D S, Murray J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in population[J]. J Math Biol, 1981, 12(2 : 237~ 249.

[7] Liu B P, Pao C V. Integral representation of generalized diffusion model in popuation problems[J]. J of Integral Eqs, 1984, 5(2 : 175~ 185.

[8] Chen G W. Initial value problem for a class of nonlinear parabolic systems of fourth_order[J]. Acta Math Scientia, 1991, 11(3 : 393~ 400.

[9] Zhou Y L, Fu H Y. The nonlinear hyperbolic systems of higher order of generalized Sine_Gordon type, Acta Math, Sinica, 1983, 26(2 : 234~ 249.

[10] 康盛亮, 桂子鹏. 数学物理方程中的现代分析方法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1991.

[11] 张石生. 积分方程[M]. 重庆: 重庆出版社, 1988.

Qualitative Analysis for the Solution of Kuramoto_Sivashinsky Equation

Jiang Chengshun[1], Gu Haiming[2]

(1. Department of Applied Mathematics, University of Information Engineering, Zhengzhou 450002, P R China;

2. Department of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P R China

Abstract: In this paper, two kinds of initial boundary value problems for Kuramoto_Sivashinsky equation are considered. Some prior estimates are derived by Galerkin methods. The existence, uniqueness and regularities of the generalized global solutions and the classical global solutions for the equation are proved. Morever, the asymptotic behavior of these solutions are considered under some conditions.

Key words: Kuramoto_Sivashinsky equation; initial boundary value problems; generalized global solution; classical global solution,; asymptotic behavior