

文章编号: 1000-0887(1999) 11-1149-12

非牛顿流体非定常旋转流动计算机 智能解析理论*

韩式方

(中科院成都分院, 成都 610041)

(康振黄推荐)

摘要: 计算机符号运算科学是人工智能的前沿方向。计算机软件 Macsyma 是完成符号运算的有力工具。应用德国 Darmstadt 大学的计算机软件 Macsyma、与数学方法和流变学模型结合, 研究了 Oldroyd B 流体由一类定常状态向另一类定常状态转变的非定常流动过程。采用改进的 Kantorovich 方法和符号运算软件, 将该问题的 3 阶偏微分方程的初、边值问题化为各级近似的 2 阶常微分方程问题, 并给出了 1 级、2 级和 3 级近似方程的解析形式解答。该研究表明了计算机符号处理解决应用数学和力学问题的潜力, 同时指出了由一定常状态向另一类定常状态转变的非牛顿流动过程, 可以经历无限多途径, 这一现象是由于本构方程的非线性性质引起的。

关键词: 计算机符号运算; Oldroyd B 流体; 旋转流动; 非牛顿流体; 计算机智能解析法

中图分类号: O373 文献标识码: A

引 言

当代, 计算机科学的新分支——人工智能技术迅速发展。符号运算技术是人工智能技术的前沿方向。发展了一系列计算机符号处理软件, 如 Macsyma, Maple, Mathematica 等, 是完成符号运算有力工具。研究计算机符号处理的科学, 也称为计算机代数学, 提供了在新的涵义下发展解析处理方法的可能性。本作者把计算机符号处理、数学方法与物理、力学模型相结合, 发展了一类计算机智能解析方法^[1-7]。在这里运用符号运算技术完成机器推导与数学定理的机器证明, 是有显著区别的。同时, 该方法与数值计算方法不同, 也存在实质区别。符号运算是由公式到公式的运算, 符号是指公式、方程式等, 而数值运算是符号运算的特殊情形。

本作者应用 Kantorovich 方法, 研究了粘弹流体管内非定常流动^[8-13]。本作者在德国 Darmstadt(THD) 大学, 应用软件 Macsyma 与数学方法、流变力学模型相结合, 提出了计算机智能解析方法, 研究了上随体 Maxwell 流体和 Jeffrey 流体模型的非牛顿流体流动^[1-4]。

本文进一步发展了计算机智能解析方法, 研究了非牛顿流体圆柱环空内非定常旋转流动。

* 收稿日期: 1998_03_06; 修订日期: 1999_06_25

基金项目: 国家自然科学基金(19672063)和德国洪堡基金(AvH)资助项目

作者简介: 韩式方(1935~), 男, 研究员, 研究方向: 流体力学, 非牛顿流体力学和流变学, 已发表论文 80 余篇, 出版专著两部, 曾获得中国科学技术进步一等奖, 中国科学院自然科学三等奖。

采用 Oldroyd B 流体的本构方程, 该模型正确解释了 Weissenberg 效应, 与实验结果符号良好。在研究中, 首先将控制方程组化为无量纲速度的 3 阶偏微分方程, 然后应用 THD 的 Macsyma 软件和改进的 Kantorovich 方法, 把该 3 阶偏微分方程的初值、边值问题, 化为各级近似的 2 阶常微分方程问题, 并给出其中 2 级、3 级近似的解析形式解答。本研究显示了应用计算机符号处理技术(或解析处理、计算机代数)在解决非牛顿流体力学问题时的潜力, 为解决应用数学和力学问题有广泛的前景。同时, 本研究也表明, 由一类定常流动转变为另一类定常流动的非定常过程不是唯一的。本文不仅作者的工作的进步发展, 也是开拓了计算机符号运算应用的新方向^[5~7, 14, 15~16]。

1 基本方程

我们研究二旋转圆柱间的非牛顿流体非定常流动。将研究由一定常流动向另一一定常流动转变的特殊的非定常过程。采用 Oldroyd B 流体模型。设流体是不可压的。采用柱坐标 (r, θ, z) 系统。设速度具有以下形式

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = v(r, t), \quad (1)$$

Oldroyd B 流体的本构方程如下

$$S^{ik} + \lambda_1 \overset{\circ}{S}^{ik} = \eta_0 (A^{ik} + \lambda_2 \overset{\circ}{A}^{ik}), \quad (2)$$

其中, 上随体导数 $\overset{\circ}{S}^{ik}$ 可以表达为

$$\overset{\circ}{S}^{ik} = \frac{\partial S^{ik}}{\partial t} + v^m \frac{\partial S^{ik}}{\partial x^m} - S^{im} \frac{\partial v^k}{\partial x^m} - S^{mk} \frac{\partial v^i}{\partial x^m}. \quad (3)$$

式中, S^{ik} 为偏应力分量。对于速度场(1)本构方程(2)可以简化为:

$$S_{rr} = S_{zz} = S_{rz} = 0, \quad S_{\theta z} = 0. \quad (4)$$

$$S_{r\theta} + \lambda_1 \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial t} = \eta_0 \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right]. \quad (5)$$

运动方程可简化为下述形式

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\theta}) \right]. \quad (6)$$

应用(6)和本构方程(5), 可以导出以下方程

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} \right] = \eta_0 \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \right]. \quad (7)$$

方程(7)可以化为以下量纲一的形式

$$L(F) = F_r + Ha \times F_r - \left[F_{yy} + \frac{F_y}{y} - \frac{F}{y^2} + Ka \times \frac{\partial}{\partial r} \left(F_{yy} + \frac{F_y}{y} - \frac{F}{y^2} \right) \right] = 0, \quad (8)$$

其中

$$F: = \frac{v_\theta}{U_0}, \quad \tau: = \frac{\eta_0 t}{\rho R_1^2}, \quad y: = \frac{r}{R_1}, \quad (9)$$

$$Ha: = \frac{We}{Re}, \quad Re: = \frac{\rho R_1 U_0}{\eta_0}, \quad We: = \frac{\lambda_1 U_0}{R_1}, \quad Ka: = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} Ha. \quad (10)$$

在表达式(10)中, 本文作者引起的量纲一的量 Ha 和 Ka , Ha 表达粘弹性与粘性之间关系, Ka 表达松弛效应与推迟效应之间关系。

2 定常旋转流动

对于定常旋转流动, 在方程(6)中令时间导数为零, 并应用以下边界条件:

$$r = R_1, \quad v_1 = \omega_1 R_1, \quad r = R_2, \quad v_2 = \omega_2 R_2 \quad (11)$$

可以得出圆柱间的速度分布为

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (12)$$

式中,

$$C_1 = \omega_1 \frac{m^2 - n}{1 - m^2}, \quad C_2 = -R_1^2 \omega_1 \frac{n - 1}{1 - m^2} \quad (13)$$

$$m = \frac{r^2}{R_1^2}, \quad n = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (14)$$

其中, ω_1 和 ω_2 为内、外圆柱的角速度, R_1 和 R_2 分别为内、外圆柱的半径。应用量纲一的公式(9), 可将速度剖面(12)化为量纲一的形式:

$$F_0 = a_0 + \frac{b_0}{y} \quad (15)$$

式中

$$a_0 = \frac{m^2 - n}{m^2 - 1}, \quad b_0 = -\frac{1 - n}{m^2 - 1} \quad (16)$$

3 计算机解析法的数学基础

将研究 Oldroyd B 流体流动, 由某一定常状态向另一个定常状态转变的非定常过程。该起始状态的速度分布及常数为 F_0, a_0, b_0 及 n_0 。对于目标状态, 即第二个定常状态为 F_1, a_1, b_1 及 n_1 。若研究相对起始状态 F_0 的相对运动, 则目标状态相对 F_0 的流动, 是一类相对运动, 其速度场可表示为

$$F_1 - F_0 = a \left[y - \frac{1}{y} \right], \quad a = \frac{n_0 - n_1}{1 - m^2} \quad (17)$$

因此, 我们可以认为, 以上两类定常状态的转变, 等价于由静止状态开始的瞬变流动, 发展为(17)式表达的定常流动。

应当指出, 这一转变过程不是唯一的, 虽然其目标状态是唯一的。为了研究方便, 设外圆柱的转速 ω_1 保持不变, 在转变过程中, 仅内圆柱的转速 ω_1 , 改变为适应目标状态的转速。显然, 在这转变过程中, ω_1 , 即 n 值随时间连续地由 n_0 变化为 n_1 值。在实际过程中, 这种从一个定常状态向另一个定常状态的转变, 不仅要经历无限的路径, 而且还有随机性。对应这类过程的内圆柱边界条件是非非常的, 内圆柱的转速比由 n_0 转变为 n_1 的规律加以限制, 关于这一点, 将在以后讨论。

将采用改进的 Kantorovich 变分方法, 它区别于经典数学中的康氏方法。

该方法的实质在于把定常流动解答作为非定常流动解的一部份, 用于构造型函数的基础。在本研究中, 我们将采用以下方式构造型函数集合:

$$\left[y - \frac{1}{y} \right], \left[y - \frac{1}{y} \right] y^2, y \left[1 - \frac{1}{y} \right] y^4, \dots \quad (18)$$

设方程(8)的解答取以下一般形式

$$F_N(y, \tau) - F_0 = \sum_{k=1}^N f_k(y, \tau). \quad (19)$$

其中

$$f_k = \left(y - \frac{1}{y} \right) y^{2(k-1)} g_k(\tau). \quad (20)$$

在一般情况下, 所研究的问题可以用下述偏微分方程的线性算子描述:

$$H[v] = 0. \quad (21)$$

在本文中, 我们将采用改进的 Kantorovich 变分方法. 改进的 Kantorovich 方法的主要点可叙述如下: 在推导 N 级近似方程组时, 一般可采用 1 至 $N-1$ 级近似中得到的 f_1, f_2, \dots, f_{N-1} , 作为 N 级近似中的已知函数, 即在该近似中, 只需要确定未知函数 F_N . 上述变分原理可以写为以下形式:

$$\iint H \left[\sum_1^N f_j \right] \left(y - \frac{1}{y} \right) y^{2(j-1)} \delta g_j(\tau) d\tau dy = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (22)$$

根据以上原则, 对于 N 级近似, 只需要求解未知函数 f_N 的变分方程, 即:

$$\iint H[f_N] \left(y - \frac{1}{y} \right) y^{2(N-1)} \delta g_N(\tau) d\tau dy + \sum_1^N J_{k-1} = 0, \quad (23)$$

其中

$$J_{k-1} = \iint H(f_{k-1}) \left(y - \frac{1}{y} \right) y^{2(k-1)} \delta g_k(\tau) d\tau dy \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (24)$$

一级近似

$$\iint H[f_1] \left(y - \frac{1}{y} \right) \delta g_1(\tau) d\tau dy = 0. \quad (25)$$

二级近似

$$\iint H[f_1] \left(y - \frac{1}{y} \right) y^2 \delta g_2(\tau) d\tau dy = 0, \quad (26)$$

$$\iint H[f_2] \left(y - \frac{1}{y} \right) y^2 \delta g_2(\tau) d\tau dy = 0. \quad (27)$$

4 非定常流动解

根据所设计的方法, 我们应用 Macsyma 计算机软件, 求得方程(8)的各级近似的常微分方程.

N 级近似

设解的一般形式为

$$F(y, \tau) = F_0 + \left(y - \frac{1}{y} \right) [g_1(\tau) + y^2 g_2(\tau) + \dots + y^{2(N-1)} g_N(\tau)]. \quad (28)$$

将(28)代入(23), 可以得到 N 级近似的常微分方程

$$a_N \frac{d^2 g_N(\tau)}{d\tau^2} + b_N \frac{dg_N(\tau)}{d\tau} + c_N g_N(\tau) + \sum_{k=3}^N J_{k-1} = 0, \quad (29)$$

其中,

$$a_N = HaP_N(m), \quad (29)'$$

$$b_N = P_N(m) + KaQ_N(m), \quad (29)''$$

$$c_N = Q_N, \quad (29)'''$$

$$P_N(m) = m(p_{n3}m^{4n-1} + p_{n2}m^4 + p_{n1}m^2 + p_{n0})$$

$$\begin{aligned}
 p_{n3} &= 8(4n - 7) \quad (n = N), \\
 p_{n2} &= -64n^3 + 176n^2 - 124n + 21, \\
 p_{n1} &= 4(32n^3 - 104n^2 + 94n - 15), \\
 p_{n0} &= -64n^3 + 240n^2 - 284n + 105, \\
 Q_N(m) &= m^3[q_{n3}m^{4n-3} + q_{n2}m^4 + q_{n1}m^2 + q_{n0}], \\
 q_{n0} &= 4(64n^5 - 272n^4 + 396n^3 - 223n^2 + 35), \\
 q_{n1} &= 8(-64n^5 + 304n^4 - 540n^3 + 445n^2 - 166n + 21), \\
 q_{n2} &= 4(64n^5 - 336n^4 + 652n^3 - 579n^2 + 229n - 30) \\
 q_{n3} &= 16(8n^3 - 22n^2 + 17n - 3) \cdot
 \end{aligned}$$

在(29)中, J_{k-1} 为已知函数, 它的一般表达式如下:

$$J_{k-1} = j_{k-1} \frac{d^2 g_{k-1}(\tau)}{d\tau^2} + l_{k-1} \frac{d^2 g_{k-1}(\tau)}{d\tau} + m_{k-1} g_{k-1}(\tau), \quad (30)$$

$$j_{k-1} = HaS_k(m),$$

$$l_{k-1} = T_k(m) + KaS_k(m),$$

$$m_{k-1} = T_k(m),$$

$$S_k(m) = (s_{k3}m^{4k-3} + s_{k2}m^4 + s_{k1}m^2 + s_{k0}),$$

$$s_{k0} = -64k^3 + 336k^3 + 572k + 315,$$

$$s_{k1} = 2(64k^3 - 304k^2 + 444k - 189),$$

$$s_{k2} = -64k^3 + 272k^2 - 348k + 135,$$

$$s_{k3} = 8(4k - 9),$$

$$T_k(m) = Ham^5(t_{k3}m^{4k-5} + t_{k2}m^4 + t_{k1}m^2 + t_{k0}),$$

$$t_{k0} = 4(64k^5 - 496k^4 + 1484k^3 - 2129k^2 + 1455k - 378)$$

$$t_{k1} = 8(-64k^5 + 528k^4 - 1692k^3 + 2615k^2 - 1932k + 540),$$

$$t_{k2} = 4(64k^5 - 560k^4 + 1868k^3 - 2965k^2 + 2229k - 630),$$

$$t_{k3} = 8(16k^3 - 68k^2 + 90k - 36)$$

由于型函数中的 $\left(y - \frac{1}{y}\right)$ 是下述方程的解,

$$F_{yy} + \frac{F_y}{y} - \frac{F}{y^2} = 0 \quad (31)$$

所以对于一级近似解答 $F_1 = g_1(\tau) \left(y - \frac{1}{y}\right)$, 始终有

$$\int L(F_1) \left(y - \frac{1}{y}\right) y^{2(k-1)} dy = 0 \quad (32)$$

所以, 对于一切 k , 有

$$J_1 = 0 \quad (33)$$

一级近似

对于一级近似, 设解具有以下形式

$$F(y, \tau) = F_0 + \left(y - \frac{1}{y}\right) g_1(\tau) \quad (34)$$

代入方程(25), 可以得出以下常微分方程

$$Ha \frac{d^2 g_1(\tau)}{d\tau^2} + \frac{dg_1(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (35)$$

我们取以下初始条件和渐近条件

$$\tau = 0, \quad g_1(0) = 0; \quad \tau \rightarrow \infty, \quad g_1 \rightarrow 1 \quad (36)$$

方程(35)有以下两个解,即

$$g_{11}(\tau) = A_1, \quad g_{12}(\tau) = A_2 e^{-\frac{1}{Ha}\tau} \quad (37)$$

因此,考虑到初始条件和方程(35)的齐次性,可以得到满足初始条件(35)的一般解答形式如下

$$g_1(\tau) = a(1 - e^{-\tau/Ha}) \quad (38)$$

二级近似

设二级近似解为以下形式

$$F(y, \tau) = F_0 + a \left[y - \frac{1}{y} \right] [g_1(\tau) + y^2 g_2(\tau)] \quad (39)$$

将(39)代入(27),同时考虑到 $g_1(\tau)$ 的贡献为零,可得以下二阶常微分方程

$$a_2 \frac{d^2 g_2(\tau)}{d\tau^2} + b_2 \frac{dg_2(\tau)}{d\tau} + c_2 g_2(\tau) = 0, \quad (40)$$

$$a_2 = HaP_2(m), \quad m = \frac{R_1}{R_2}, \quad (40)'$$

$$b_2 = P_2(m) + KaQ_2(m), \quad (40)''$$

$$c_2 = P_2(m) = 8m^7 - 35m^4 + 42m^2 - 15, \quad (40)\textcircled{\ominus}$$

$$Q_2 = 56m^2(2m^5 - 5m^2 + 3) \quad (40)'''$$

设(40)的解为以下形式

$$g_2(\tau) = A e^{k\tau} \quad (41)$$

将(41)代入(40),可得特征值 k 的代数方程如下

$$a_2 k^2 + b_2 k + c_2 = 0 \quad (42)$$

方程(42)一般有两个根,其表达式如下

$$k_{1,2} = \left\{ - [P_2(m) + KaQ_2(m)] \pm [P_2^2(m) + 2(Ka - 2Ha)P_2(m)Q_2(m) + Ka^2Q_2^2(m)]^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot [2HaP_2(m)]^{-1} \quad (43)$$

在(43)式中,分母 $P_2(m)$ 是一个7次幂的多项式(见(40)\textcircled{\ominus}),它有7个零,或者说 $P_2(m) = 0$,有3个实根,4个复根,即

$$m = 1(3\text{重根})$$

和

$$m_{2,3} = \pm i \frac{\sqrt{21 - 2\sqrt{105}}}{4} - \frac{3}{4},$$

$$m_{4,5} = \pm i \frac{\sqrt{21 + 2\sqrt{105}}}{4} - \frac{3}{4},$$

在不同的 M 、 Ha 和 Ka 值下,特征值可以为正值或负值。现在我们仅研究以下两类特殊情形。

第1种情形: k_1 和 k_2 均为负值。

经过计算表明,在一定的 M 、 Ha 和 Ka 值下, k_1 和 k_2 可能为负值。

g_2 可以表达为以下形式

$$g_2(\tau) = A_3 e^{k_1 \tau} + A_4 e^{k_2 \tau}. \quad (44)$$

采用以下初始条件和渐近条件

$$\tau = 0, \quad g_2(0) = 0; \quad \tau \rightarrow \infty, \quad g_2(\tau) \rightarrow 0. \quad (45)$$

应用以上第 1 个条件, 可得:

$$A_3 = -A_4 \quad (46)$$

本问题的二级近似解可以表达为:

$$F(y, \tau) = F_0 + a \left[y - \frac{1}{y} \right] \left[(1 - e^{-\frac{\tau}{Ha}} + A_3 y^2 (e^{k_1 \tau} - e^{k_2 \tau})) \right]. \quad (47)$$

其中 k_1 和 k_2 由(43) 式给出, A_3 由下述条件确定:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \tau} \right]_{\tau=0, y=1/m} = 0, \quad (48)$$

由此得出

$$A_3 = -\frac{m^2}{Ha(k_1 - k_2)}.$$

第 2 种情形: $k_1 = k_2$

对于这一情形, 方程(43) 中下述表达式等于零:

$$P_2^2(m) + 2(Ka - 2Ha) P_2(m) Q_2(m) + Ka^2 Q_2^2(m) = 0$$

在该情形下, 可设通解为以下形式

$$g_2 = (B_1 + B_2 \tau) \text{sh}(k\tau) + (B_3 + B_4 \tau) \text{ch}(k\tau). \quad (49)$$

利用(45) 中的初始条件, 得 $B_3 = 0$. 设

$$\tau \rightarrow \infty, \quad g_2(\tau) \rightarrow 0, \quad \text{即得 } B_4 = -B_2, \quad B_1 = 0.$$

因此, 可得

$$g_2(\tau) = B_2 \tau [\text{sh}(k\tau) - \text{ch}(k\tau)] \quad (50)$$

二级近似解将具有以下形式

$$F(y, \tau) = F_0 + a \left[y - \frac{1}{y} \right] \left[(1 - e^{-\frac{\tau}{Ha}}) + B_2 \tau y^2 (\text{sh}(k\tau) - \text{ch}(k\tau)) \right], \quad (51)$$

其中常数 B_2 由(48) 式确定, 得

$$B_2 = \frac{m^2}{Ha}. \quad (51)'$$

三级近似

设 3 级近似解具有以下形式

$$F(y, \tau) = F_0 + a \left[y - \frac{1}{y} \right] \left[g_1(\tau) + y^2 g_2(\tau) + y^4 g_3(\tau) \right]. \quad (52)$$

代入积分方程(23) 后, 可得

$$a_3 \frac{d^2 g_3(\tau)}{d\tau^2} + b_3 \frac{dg_3(\tau)}{d\tau} + c_3 g_3(\tau) + J_2 = 0, \quad (53)$$

其中

$$a_3 = Ha P_3(m), \quad (54a)$$

$$b_3 = P_3(m) + Ka Q_3(m), \quad (54b)$$

$$c_3 = Q_3, \quad (54c)$$

$$P_3(m) = 5(8m^{11} - 99m^4 + 154m^2 - 63) \quad (54d)$$

$$Q_3(m) = 24m^2(44m^7 + 231m^4 - 660m^2 + 385), \quad (54e)$$

$$J_2 = j_2 \frac{d^2 g_2(\tau)}{d\tau^2} + l_2 \frac{dg_2(\tau)}{d\tau} + m_2 g_2(\tau), \quad (54f)$$

$$j_2 = HaS_3(m), \quad (54g)$$

$$l_2 = S_3(m) + KaT_3(m), \quad (54h)$$

$$m_2 = T_3(m), \quad (54i)$$

$$S_3(m) = (8m^9 - 63m^4 + 90m^2 - 35), \quad (54j)$$

$$T_3(m) = 72m^2(2m^7 - 7m^2 + 5), \quad (54k)$$

对于 2 级近似的第 1 种情形, 我们有

$$g_2(\tau) = e^{k_1\tau} - e^{k_2\tau}$$

然后, 我们可以计算 J_2 的表达式

$$J_2 = a_{22}e^{k_1\tau} - b_{22}e^{k_2\tau}, \quad (55)$$

式中

$$a_{22} = j_2 k_1^2 + l_2 k_1 + m_2, \quad b_{22} = j_2 k_2^2 + l_2 k_2 + m_2.$$

方程(53)的通解可以设为

$$g_3(\tau) = g_s(\tau) + g_h(\tau), \quad (56)$$

其中, g_s 为方程(52)的特解, 它可以设为以下形式

$$g_s(\tau) = D_1 e^{k_1\tau} + D_2 e^{k_2\tau}. \quad (57)$$

将(57)代入(53), 即可得 D_1 和 D_2 如下:

$$D_1 = - \frac{a_{22}}{c_3 + b_3 k_1 + a_3 k_1^2}, \quad (58a)$$

$$D_2 = - \frac{b_{22}}{c_3 + b_3 k_2 + a_3 k_2^2}, \quad (58b)$$

$g_h(\tau)$ 是下述齐次方程的解

$$a_3 \frac{d^2 g_h(\tau)}{d\tau^2} + b_3 \frac{dg_h(\tau)}{d\tau} + c_3 g_h(\tau) = 0, \quad (59)$$

方程(59)的解可设为

$$g_h(\tau) = E \exp(q\tau) \quad (60)$$

将上式代入(59), 得到本征值 q 的代数方程

$$a_3 q^2 + b_3 q + c_3 = 0 \quad (61)$$

方程(61)的根为

$$q_{1,2} = [- [P_3(m) + KaQ_3(m)] \pm [P_3^2(m) + 2(Ka - 2Ha)P_3(m)Q_3(m) + Ka^2Q_3^2(m)]^{\frac{1}{2}}] \cdot [2HaP_3(m)]^{-1}, \quad (62)$$

因此, $g_h(\tau)$ 的通解为

$$g_h(\tau) = D_3 e^{q_1\tau} + D_4 e^{q_2\tau}. \quad (63)$$

采用以下初始条件和渐近条件

$$\tau = 0, \quad g_3(0) = 0, \quad (63)'$$

$$\tau \rightarrow \infty, \quad g_3(\infty) = 0. \quad (63)''$$

现在讨论以下两类特殊情形:

1. $q_1 > 0, q_2 < 0$.

因为一般采用 $\lambda_1 = 6\lambda_2$, 因此有 $Ha = 6Ka$, 所以由计算结果显示 $q_1 > 0$ 在这一情形下, 必须满足以下条件

$$D_3 = 0, \quad (64)$$

g_h 将具有以下形式

$$g_h = D_4 e^{q_2 \tau}, \quad (65)$$

g_3 等于

$$g_3(\tau) = D_1 e^{k_1 \tau} + D_2 e^{k_2 \tau} + D_4 e^{q_2 \tau}, \quad (66)$$

应用初始条件(63a), 即得

$$D_4 = - (D_1 + D_2) \quad (67)$$

因此

$$g_3(\tau) = D_1 e^{k_1 \tau} + D_2 e^{k_2 \tau} - (D_1 + D_2) e^{-q_2 \tau}. \quad (68)$$

由于 k_1, k_2, q_2 均为负值, 所以(63b) 条件自然满足. 在这一条件下, 获得3级近似的解析解. 在此条件下, 不存在任意未定系数.

$$2. \quad q = q_1 = q_2 < 0$$

这一条件要求以下等式为零

$$P_3^2(m) + 2(Ka - 2Ha) P_2(m) Q_3(m) + Ka^2 Q_3^2(m) = 0 \quad (69)$$

我们假设, 上述方程至少有一个实根 m^* , 在这一情形下:

$$q = \frac{- [P_3(m^*) + Ka Q_3(m^*)]}{2Ha P_3(m^*)}. \quad (70)$$

解析解将具有以下形式

$$g_h = (D_2^* + D_3^* \tau) e^{-q\tau} + (D_5 + D_6 \tau) e^{q\tau} \quad (71)$$

由于条件(63b), D_2^* 和 D_3^* 应等于零, 所以

$$g_h = (D_5 + D_6 \tau) e^{q\tau}. \quad (72)$$

因此

$$g_3(\tau) = D_1 e^{k_1 \tau} + D_2 e^{k_2 \tau} + (D_5 + D_6 \tau) e^{q\tau}. \quad (73)$$

由于(63a)得 $D_5 = - (D_1 + D_2)$.

在(73)式中的 D_6 由下式条件确定

$$\left[\frac{\partial [y^4 g_3(\tau)]}{\partial \tau} \right]_{\tau=0, y=1/m} = 0 \quad (75)$$

由上式得出

$$D_6 = D_1(q - k_1) + D_2(q - k_2). \quad (76)$$

若启动过程的边界的初始速度已知, 则(47)式中的 A_3 , (51)中的 B_2 , (73)中的 D_6 可由(48)、(51a)和(76)式给出. 为了简便, 我们将采用以下一类特殊的外边界条件, 即外边界随时间的变化规律. 对于二级近似的第1种情形, 在(47)中设 $A_3 = 1, y = 1/m$, 即得以下内边界随时间的变化规律:

$$F(m, \tau) = F_0(m) - a \frac{m^2 - 1}{m} [(1 - e^{-\tau Ha}) + m^{-2} (e^{k_1 \tau} - e^{k_2 \tau})], \quad (77)$$

对于二级近似的第2种情形, 在(51)中设 $B_2 = 1, y = 1/m$, 则得

$$F(m, \tau) = F_0(m) - \frac{m^2 - 1}{m} [(1 - e^{-\tau Ha}) + m^{-2} \tau (\text{sh}(k\tau) - \text{ch}(k\tau))], \quad (78)$$

在(77)式的基础上,并应用三级近似(52)和(76)可得以下非定常外边界条件

$$F(m, \tau) = F_0(m) - a \frac{m^2 - 1}{m} \times [(1 - e^{-\tau Ha}) + m^{-2}(e^{k_1 \tau} - e^{k_2 \tau}) + m^{-4}(D_1 e^{k_1 \tau} + D_2 e^{k_2 \tau} - [D_1 + D_2 - \tau] e^{q \tau})] \quad (79)$$

应用非定常边界条件(77)~(79),将得到以下积分常数

$$A_3 = B_2 = D_6 = 1$$

5 结果与讨论

在本研究中,将计算机符号处理技术、改进的 Kantorovich 方法和 Oldroyd B 流体模型相结合,研究非牛顿流体旋转流动。该问题化为一个 3 阶偏微分方程的初边值问题。应用 MACSYM 软件和计算机智能解析方法,获得了各阶近似的常微分方程,并给出了一级、二级、三级近似的 2 阶常微分方程的解析形式解答。图 2 至图 6 示出按(47)、(51)和(73)计算($A_3 = B_2 = D_6 = 1$)的数值结果。

图 2 示出(28)展式中的 1 级、2 级和 3 级近似函数 $g_1(\tau)$ 、 $g_2(\tau)$ 和 $g_3(\tau)$ 随 τ 的变化规律。图 3 和图 4 分别示 $Y = 1.32$ 和 $Y = 1.4$ 处量纲一的速度 F 与 τ 之间的关系其中 $M = 1/m$, 一级近似 F_1 对二级近似 F_2 之间的偏离较 F_2 和 F_3 的偏离较大,由此可以看出较好的收敛性。图 5 示出由

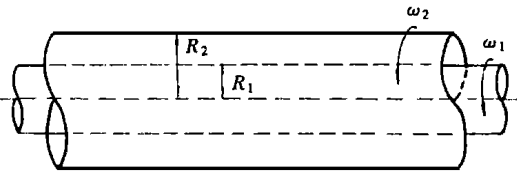


图 1

方程(47)计算的,在不同常系数 A_3 下的无量纲速度 F 随时间的变化规律。不同的 A_3 值对应不同的内边界随时间的变化规律。由图 5 可以看出,在 $\tau = 0$ 处,各曲线始于一点,而当 $\tau \rightarrow \infty$ 时,由图显示各曲线也将汇集于一点,即各个非定常过程均转变为同一个定常流动状态。图 6 示出无量纲速度 F 随时间 τ 的变化规律,其中 1 级、2 级和 3 级近似结果均随时间趋向同一定常速度分布。

由图 5 和图 6,由二级近似和三级近似解(47)、(51)和(73),可以得出一个重要结论对于 Oldroyd B 流体流动,由一个定常流动向另一一定常流动转变时,可以经历无限多路径,虽然这一非定常转变过程是多种多样的,不是唯一的,然而,这些转变过渡均由同一定常状态,随时间而趋向另一相同的定常状态。Bodart 和 Crochet[15]在其论文中指出,实验表明,粘弹流体由定常状态向非定常状态转变时,可以出现分岔现象,即由定常状态向非定常状态分岔。该文指出,由定常轴对称流向螺旋流动或周期流动转变中,由定常流动向振动流动转变时,均证实了上述分岔现象。本文的结论与上述 Bodart 和 Crochet 的结论是一致的。因此,由本文的研究得出以下结论,对于 Oldroyd B 流体旋转流动,由定常流动向非定常流动分岔。这显然是由于采用 Oldroyd B 流体模型所引起的解的特殊性质,是粘弹流体区别于牛顿流体的特有性质。

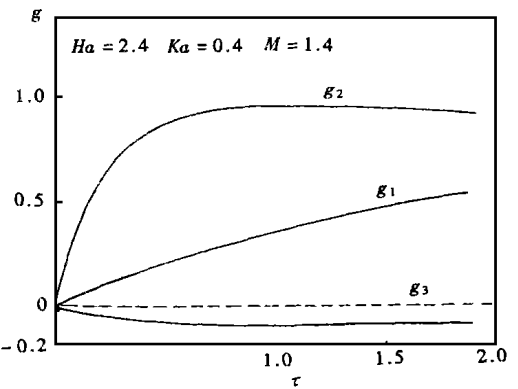


图 2

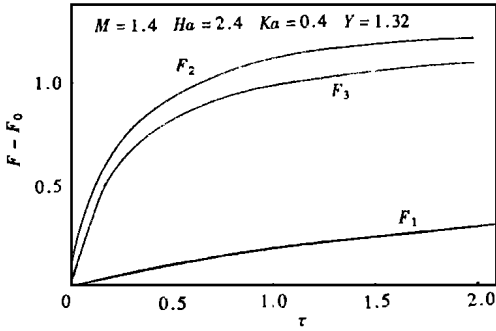


图 3

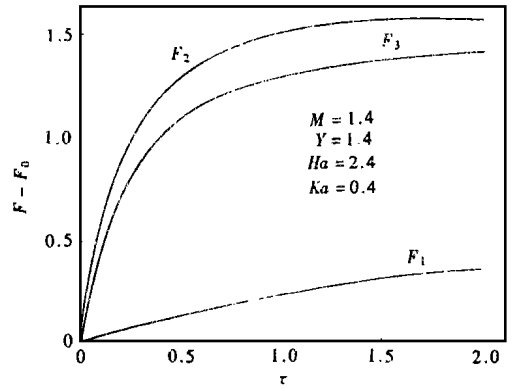


图 4

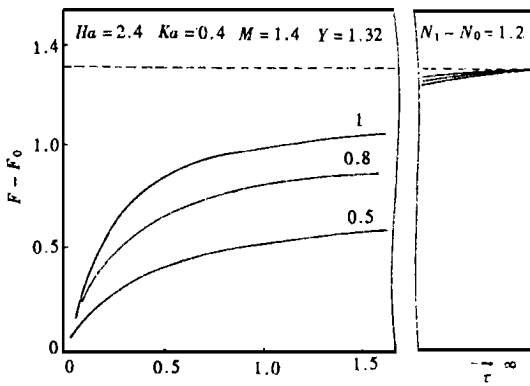


图 5

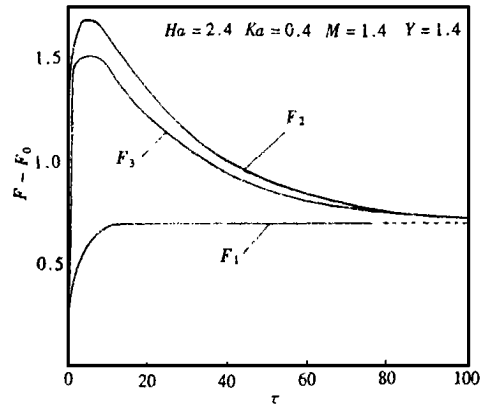


图 6

[参 考 文 献]

- [1] Han Shifang. A variational method for research on an unsteady flow of upper_convected Maxwell fluid[J]. Acta Mathematica Scientia, 1992, 12(2): 519~ 525.
- [2] Han Shifang, Roesner K G. Time dependent flow of upper_convected Jeffrey fluid between two rotating cylinders[A]. In: Proc of XI Intern Congress on Rheology [C]. Brussels, 1992, 216~ 218.
- [3] Han Shifang, Roesner K G. The time dependent flow of upper_convected Jeffrey fluid between coaxial cylinders[J]. Computational Fluid Dynamics J, Japan, 1993, 2(1): 91~ 104.
- [4] Han Shifang, Roesner K G. Unsteady flow of polymer fluid between coaxial cylinders[J]. J of Hydrodynamics, 1993, Ser B2(1): 52~ 62.
- [5] Han Shifang. Computational simulation of non_Newtonian fluid flow[A]. In: Proc of First CFD Conference [C]. Hong Kong, 1995, 91~ 100.
- [6] 韩式方. 关于计算机解析法及粘弹流体力学中的应用(论计算机解析流变学), 专题报告, 流变学进展[A]. 第三届全国流变学会议文集[C]. 上海: 华东化工学院出版社, 1990, 6~ 11.
- [7] 韩式方. 非牛顿流体非定常流动及计算机解析方法, 专题报告, 流变学进展[A]. 1993, 6~ 16, 第四届全国流变学会议集[C]. 广州: 华南理工大学出版社, 1993.
- [8] Han Shifang. Unsteady flows of Maxwell-Oldroyd fluid in tube[A]. In: Proc 4th Asian Congress on Fluid Mech [C]. Hong Kong, 1989. 73~ 76.
- [9] 韩式方. 非牛顿流体连续介质力学[M]. 成都: 四川科技出版社, 1988.

- [10] Han Shifang, et al. Non_steady flow of upper_convected Maxwell fluid in circular tube[J]. Acta Mechanica Sinica, 1990, 6(3): 221~ 226.
- [11] 韩式方, 拉姆舍松. Oldroyd B 流体依时性管内流动的变分解析方法[J]. 应用数学和力学, 1995, 16(2): 169~ 178.
- [12] 韩式方. 计算机解析方法及在非牛顿流体力学中的应用[J]. 计算机应用, 1993, 13(4): 19~ 21.
- [13] Ramkissoon H, Han Shifang. Unsteady motion of a sphere in elasticviscous fluid[J]. Intern J Engng Sci, 1993, 31(1): 19~ 26.
- [14] Roesner K G. The impact of computer algebra on fluid dynamics[A]. In: Proc 2nd European Fluid Mechanics Conference General Review Lecture[C]. Warsaw: 1994, 10~ 14.
- [15] Kantorovich L W, Krylov W I. Approximate Methods of Higher Analysis [M]. Interscience, New York: Elsevier, 1958, 256~ 258.
- [16] Gorla R S R, Modden P E. A variational approach to non_steady non_Newtonian flow in circular tube [J]. J Non_Newtonian Fluid Mech, 1984, 16(1): 251~ 265.
- [17] Ch Bodart, Crochet M J. Numerical study of the stability of viscoelastic flows[A]. In: Theoretical and Applied Rheology, Proc[C]. XI th Intern Congress on Rheology, 1992, 256~ 257.

Computational Intellectual Analytical Theory of Computational Analytical Approach to Rotating Flow of Non_Newtonian Fluid

Han Shifang

(Changdu Branch, Academia Sinica, Chengdu 610041, P R China)

Abstract: A combination of the computational symbolic calculation, mathematical approach and physico_mechanical model leads to a computational intellectual analytical approach developed by the author. There is a principal difference between the computer proof and the computer derivation completed by the computer, also difference between the numerical and symbolic calculations. In this investigation the computational analytical approach is extended, and an unsteady flow of non_Newtonian fluid in the gap between two rotating coaxial cylinders is studied. The Oldroyd fluid B model is used by which the Weissenberg effects are explained in a good comparison with the experiments. The governing equations are reduced to a partial differential equation of 3rd order for the dimensionless velocity. Using the computer software Macsyma and an improved variational approach the problem with the initial and boundary conditions are then reduced to a problem of an ordinary differential equation for different approximations. The analytical solutions are given for the 1st, 2nd 3rd approximations. The present investigation shows the ability of the computational symbolic manipulation in solving the problems of non_Newtonian fluid flows. There is a possibility of that to solve the problems in the mathematics and the mechanics. An important conclusion can be drawn from the results that the transition from a steady state to another steady state is non_unique.

Key words: time_dependent rotating flow; non_Newtonian fluid; Oldroyd fluid B; computational symbolic manipulation; computational analytical approach