

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1107_08

基于 S_R 分解理论的变形激光频谱测量法*

姜耀东, 安里千, 刘艳华, 陈至达

(中国矿业大学(北京校区), 北京 100083)

(谨以此文纪念敬爱的导师陈至达教授逝世一周年——姜耀东, 安里千, 刘艳华)

摘要: 在傅立叶频谱分析器中, 当激光正射前焦面的图象时, 其后焦面上形成一个个衍射斑, 即傅立叶频谱; 前焦面上的图象发生变形时后焦面上的频谱亦发生改变, 通过分析频谱的这种改变量就可以获得图象变形信息。以现代光学中的 Fraunhofer 衍射理论和有限变形的 S_R 分解理论为基础, 论述了用激光频谱来分析测量有限应变和转动的数学力学基础、测量原理和方法以及计算机识别与处理技术, 作为对这一学术思想提出者陈至达教授逝世一周年的缅怀和纪念。

关键词: 有限变形; 应变测量; 激光频谱

中图分类号: O33 文献标识码: A

前 言

由现代光学理论知道, Fraunhofer 衍射装置为傅立叶频谱分析器。在傅立叶频谱分析器中, 当激光正射前焦面的图象时, 其后焦面上形成一个个衍射斑, 即傅立叶频谱; 前焦面上的图象发生变形时后焦面上的频谱亦发生改变, 通过分析频谱的这种改变量就可以获得图象变形的信息。80 年代初期陈至达教授提出了上述用激光频谱分析法来测量有限应变和有限转动的设想, 姜耀东、陈至达通过对光栅的傅立叶频谱进行严格的数学推导, 找到了光栅变形前后其变形与频谱之间的对应关系, 成功地对圆环的大变形与大转动用激光频谱分析法进行了测量^[1, 2, 3, 4, 5], 刘艳华最近又实现了这一方法的计算机变形频谱图象的自动识别与处理^[6]。研究工作表明新方法不但可以测量大变形与大转动, 而且可以测量小变形, 方法简单易行, 适合现场实测, 是一种很有前途的应变测量法。

1 平面均匀变换的 S_R 应变转动分解理论

在平面情况下, 假设变形体内任一点的位移为 $u(x, y)$, 根据 S_R 和分解定理^[7], 应变和平均整旋角的公式如下:

$$S_j^i = \frac{1}{2(u^i |_{j+} + u^i |_{j-}^T)} + \xi^j (1 - \cos \theta) \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

$$\Theta = \arcsin \frac{1}{2}(u^2 |_{1+} + u^2 |_{1-}^T). \quad (2)$$

* 收稿日期: 1999_07_09

基金项目: 中国矿业大学“211 工程”项目

作者简介: 姜耀东(1958~), 男, 博士, 副教授, 研究方向: 非线性力学与岩石力学, 已发表论文 50 余篇, 专著 1 部, 获省部级科技进步奖二项。

实际工程计算时要使用物理分量:

$$\hat{u}^i |_{j} = \sqrt{g_{(ii)}/g_{(jj)}} u^i |_{j} \cdot (3)$$

当物体受力变形时, 无论物体的整体变形如何, 在任一点邻域内的变形总可以描述为微分线性变换的均匀变形, 只要该邻域取得足够小。

在均匀变形的假设下, 如图 1 所示正方形变形后将为斜方形, 其变换关系为

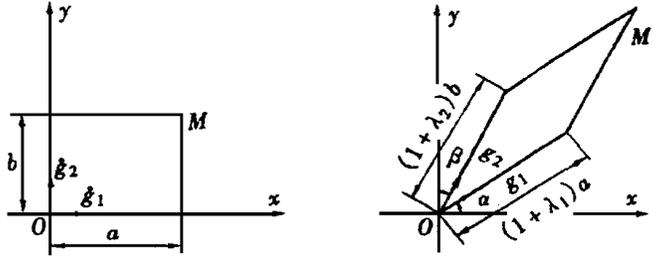


图 1 微分线性变换的均匀变形

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos \alpha - 1 & (1 + \lambda_2) \sin \beta \\ (1 + \lambda_1) \sin \alpha & (1 + \lambda_2) \cos \beta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot (4)$$

初始尺规和变形后尺规分别为:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (5)$$

$$[g_j^i] = \begin{bmatrix} (1 + \lambda_1)^2 & (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \sin(\alpha + \beta) \\ (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \sin(\alpha + \beta) & (1 + \lambda_2)^2 \end{bmatrix} \cdot (6)$$

由式(1)、(2)、(3), 其平均整旋角和应变分量为

$$\Theta = \arcsin[(\sin \alpha - \sin \beta) / 2], (7)$$

$$[S_j^i] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} + \cos \alpha - \cos \Theta, & \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta) \\ \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta), & \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2} + \cos \beta - \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot (8)$$

2 变形激光频谱测量法的光学理论

我们知道, 图 2 的 Fraunhofer 衍射装置为标准的傅立叶频谱分析器。设射入光为平行光, 其复振幅 $U(x, y)$ 为常数, 衍射屏函数为 $t(x, y)$, 略去常数后, 则后焦面 F' 上的复振幅分布准确地成为屏函数的傅立叶频谱:

$$U(X, Y) = F\{t(x, y)\}, (9)$$

展开式为

$$U(X, Y) = \iint t(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{f}(xX + yY)\right] dx dy \cdot (10)$$

其中: f 为透镜焦距; $k = 2\pi/\lambda$ 为激光波数; λ 为激光波长。 F' 面上的光强分布为:

$$I(X, Y) = U(X, Y) U^*(X, Y) (11)$$

作者推导了如下斜方孔和斜交光栅的傅立叶频谱分布^[1~5]。

2.1 斜方孔的傅立叶频谱计算

衍射屏为图 3 所示的斜方孔时, 为了积分计算的方便取平行于斜方孔边界方向的 ξ, η 轴为新坐标系:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, (12)$$

斜方孔屏函数为:

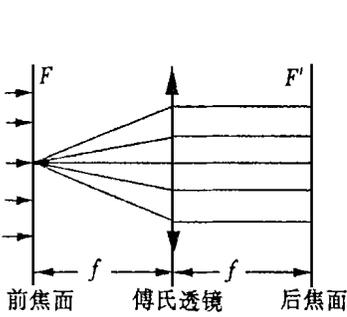


图2 傅立叶频谱分析器

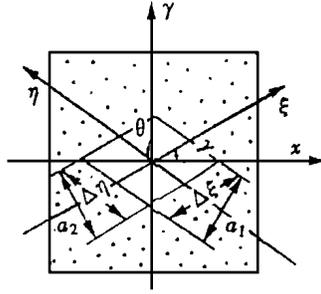


图3 斜方孔的衍射屏

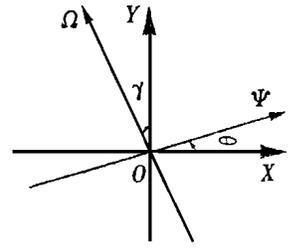


图4 后焦面的坐标系

$$t_1(x, y) = t(\xi, \eta) = \begin{cases} c \text{ (常数)} & (|\xi| < \Delta\xi/2, |\eta| < \Delta\eta/2), \\ 0 & \text{(其它)}. \end{cases} \quad (13)$$

在 F' 面上有

$$U(X, Y) = \iint_{\text{孔}} t_1(x, y) \exp\left[-\frac{ki}{f}(xX + yY)\right] dx dy = c' \left(\frac{\sin\beta_1}{\beta_1}\right) \left(\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right) \Delta\xi\Delta\eta \quad (14)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} c' &= 2c \cos(\gamma - \theta), \\ \beta_1 &= \frac{k \Delta\xi \cos(\gamma - \theta)}{2f} \cdot \frac{\cos \gamma X + \sin \gamma Y}{\cos(\gamma - \theta)}, \\ \beta_2 &= \frac{k \Delta\eta \cos(\gamma - \theta)}{2f} \cdot \frac{-\sin \theta X + \cos \theta Y}{\cos(\gamma - \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

如图4 在后焦面 (XOY) 上引进坐标系 ($\Psi O\Omega$), 令:

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Omega \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos(\gamma - \theta)} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{则 } \beta_1 = \frac{ka_1}{2f} \Psi, \beta_2 = \frac{ka_2}{2f} \Omega \quad (17)$$

其中 a_1, a_2 为两孔边的垂直距离。利用边界条件 $U(0, 0) = c' \Delta\xi\Delta\eta$, 所以

$$U(X, Y) = U(0, 0) \left(\frac{\sin\beta_1}{\beta_1}\right) \left(\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right) \quad (18)$$

$$I(X, Y) = I(0, 0) \left(\frac{\sin\beta_1}{\beta_1}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right)^2 \quad (19)$$

根据现代光学理论, $\left(\frac{\sin\beta_1}{\beta_1}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right)^2$ 即为 X, Y 面上沿 Ψ, Ω 方向的单缝衍射因子。

2.2 斜交光栅的傅立叶频谱计算

斜交光栅可以认为是由两块其主方向分别为 ϕ, ω 的单线栅的斜交密接。取两块光栅的栅线方向为斜坐标 (ξ, η), 则斜交光栅的屏函数为:

$$\left. \begin{aligned} g_1(x, y) &= g(\xi, \eta), \\ g(\xi, \eta) &= \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{-(M-1)/2}^{(M-1)/2} t(\xi + nd_1/\cos(\gamma - \theta), \eta + md_2/\cos(\gamma - \theta)), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 $t(\xi, \eta)$ 为斜方孔屏函数, 经数学推导, 在后焦面上有

$$U(X, Y) = \iint g_1(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{f}(xX + yY)\right] dx dy =$$

$$U(0, 0) \left[\frac{\sin\beta_1}{\beta_1} \right] \left[\frac{\sin\beta_2}{\beta_2} \right] \left[\frac{\sin N\alpha_1}{\sin\alpha_1} \right] \left[\frac{\sin M\alpha_2}{\sin\alpha_2} \right], \tag{21}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\cos\psi X + \sin\psi Y}{\cos(\psi - \theta)} \frac{d_1\pi}{f} = \Psi \frac{d_1\pi}{f}, \\ \alpha_2 &= \frac{-\sin\theta X + \cos\theta Y}{\cos(\psi - \theta)} \frac{d_2\pi}{f} = \Omega \frac{d_2\pi}{f}. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

光强分布,

$$I(X, Y) = I(0, 0) \left[\frac{\sin\beta_1}{\beta_1} \frac{\sin N\alpha_1}{\sin\alpha_1} \right]^2 \left[\frac{\sin\beta_2}{\beta_2} \frac{\sin M\alpha_2}{\sin\alpha_2} \right]^2. \tag{23}$$

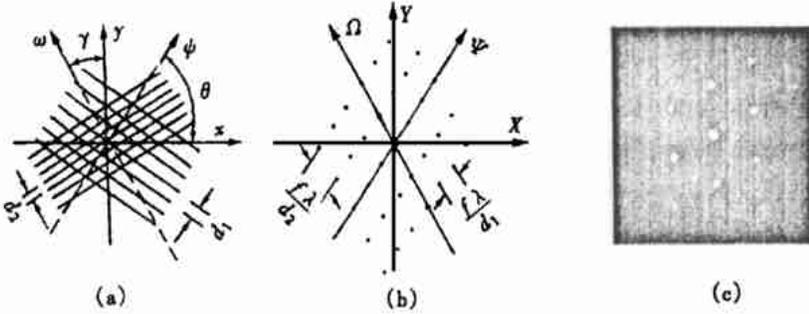


图5 斜交光栅的傅立叶频谱

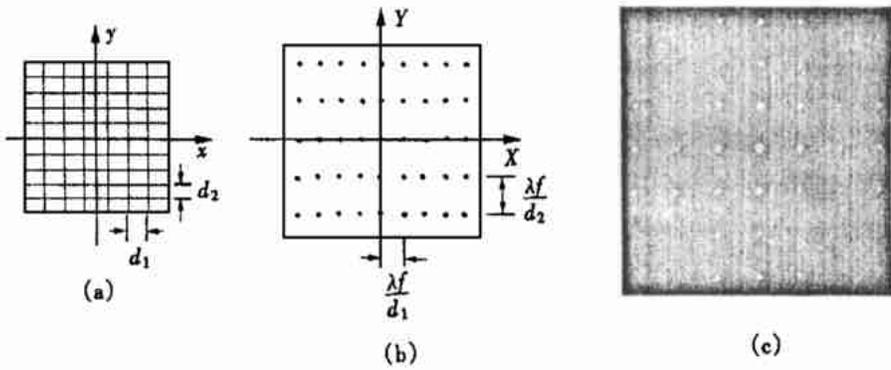


图6 正交光栅的傅立叶频谱

上式中 $\sin N\alpha_1/\sin\alpha_1, \sin M\alpha_2/\sin\alpha_2$ 为沿 Ψ 和 Ω 方向的缝间干涉因子; $\sin\beta_1/\beta_1, \sin\beta_2/\beta_2$ 为沿 Ψ 和 Ω 方向的单缝因子。根据近代光学理论易知斜交光栅的频谱分布规律: 斜交光栅可看成由两块单线栅的斜交密接, 其中之一沿主方向 ψ 的周期为 d_1 , 另一沿主方向 ω 的周期为 d_2 , 则后焦面上的傅立叶频谱为沿 Ψ 和 Ω 方向扩散, 间距为 fNd_1, fNd_2 的斜交点阵, 如图 5(a)、(b), 图 5(c) 为实际照片。

2.3 正交光栅的傅立叶频谱

在式(11)中, 令 $\psi = \theta = 0$, 即得常见的正交光栅的光强分布, 其衍射图样是正交二维点阵, 衍射斑在 X, Y 方向的间距为 fNd_1, fNd_2 , 如图 6 所示, 图 6(c) 为实际照片。

3 频谱应测量法的原理及方法

3.1 原理及方法

将正交光栅粘贴在透明试件上, 试件变形时光栅随试件一起变形。试件放在图 2 所示的

傅立叶透镜前焦面上, 在一细激光束的正射下, 后焦面上出现傅立叶频谱。

当激光束足够小时(如其直径细化到小于 1mm 甚至 0.5mm)• 在连续体情况下(奇异情况除外如裂纹尖端), 可以认为在该激光束内的变形是均匀变形。根据均匀变形的结论, 在该激光束内原来正交的光栅变形后为斜交光栅, 则在接收屏上原来正交的频谱点阵变形后为斜交频谱点阵。这种变化如图 7 所示, 通过测量后焦面上频谱点阵的变化就可以分析前焦面上该点域内的变形状态。

3.2 频谱点阵的光学变换放大

在图 7 的光学变换中, 根据前面的推导, 前焦面上变形前、后光栅的几何参数和后焦面上频谱点之间对应的几何参数有如下关系:

$$\begin{cases} A = f \mathcal{N} a, \\ B = f \mathcal{N} b, \end{cases} \quad \begin{cases} A' = f \mathcal{N} a' \cos(\alpha + \beta), \\ B' = f \mathcal{N} a' \cos(\alpha + \beta). \end{cases} \quad (24)$$

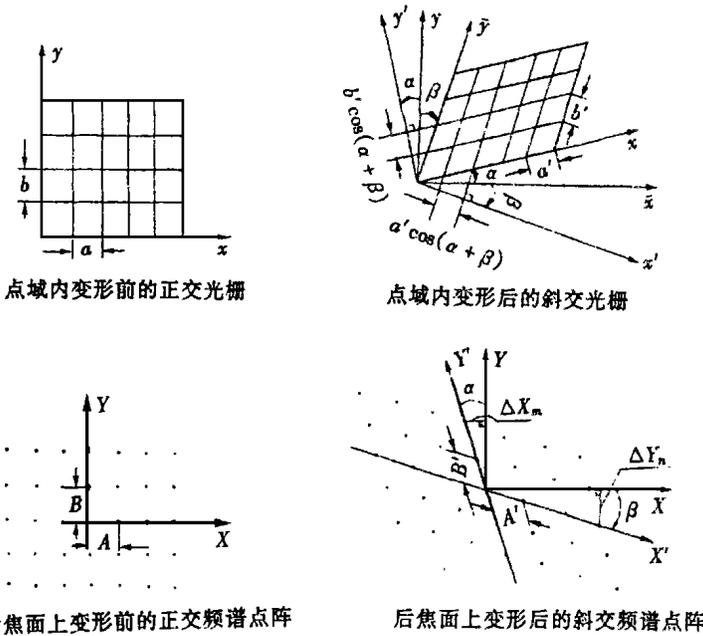


图 7 光栅和频谱点阵在变形前、后的光学变换

一般而言, 前焦面上激光束内光栅的几何参数很小, 难以直接测量。而通过利用傅里叶频谱分析装置, 在后焦面上的频谱点阵得到了放大。例如, 取光栅栅距 $a = 1/300$ mm, 焦距 $f = 588$ mm, 激光波长 $\lambda = 6328 \times 10^{-7}$ mm, 则后焦面上频谱点阵间距 $A = f \mathcal{N} a = 111.62$ mm, 与光栅栅距相比其放大倍数为 $111.62 \times 300 = 33486$ 。如果取 ± 3 级的频谱间距作为基本测量单位, 则放大倍数为 6×33486 倍。

变形测量时的实验公式为:

$$\Theta_e = \arcsin \left\{ \frac{1}{2}(\sin \alpha - \sin \beta) \right\}, \quad (25)$$

$$\| S_j^i \|_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha - \frac{A' \cos(\alpha + \beta)}{A} + (1 - \cos \Theta_e) & 1/2(\sin \alpha + \sin \beta) \\ 1/2(\sin \alpha + \sin \beta) & \cos \beta - \frac{B' \cos(\alpha + \beta)}{B} + (1 - \cos \Theta_e) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

3.3 示例

为了说明新方法是如何根据频谱点阵变形前后的变化来计算应变张量, 现给出用两次曝光法实测时的两个实例, 为了说明的方便使用描图纸描出其“负片”。

例 1 双向均匀受压(图 8)

频谱照片表明变形前、后的 ± 1 级频谱已完全分开, 取 ± 1 级频谱间距为基本测量长度, 有 $A_{\pm 1} = B_{\pm 1} = 24.75 \text{ mm}$, $A'_{\pm 1} = B'_{\pm 1} = 28.75 \text{ mm}$, $\alpha = \beta = 0$ 代入实验公式(25)、(26) 得,

平均整旋角 $\Theta_e = 0$

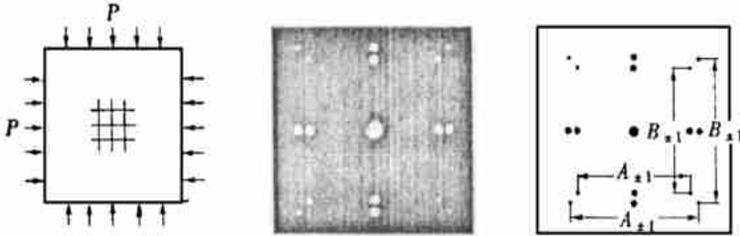


图 8 双向均匀受压示例

应变张量 $\parallel S_j^i \parallel_e = \begin{bmatrix} -0.16 & 0 \\ 0 & -0.16 \end{bmatrix}$

例 2 根据二次曝光的频谱底片来分析点域的变形(图 9)

一点域的频谱如图, 取 ± 2 级频谱间距为基本测量长度, $A_{\pm 2} = B_{\pm 2} = 35.50 \text{ mm}$, $A'_{\pm 2} = 39.75 \text{ mm}$, $B'_{\pm 2} = 35.50 \text{ mm}$, $\alpha = -30.96^\circ$, $\beta = 11.31^\circ$, 则

应变张量 $\parallel S_j^i \parallel_e = \begin{bmatrix} -0.132 & -0.159 \\ -0.159 & 0.011 \end{bmatrix}$

该点域的变形如图 9 所示, 其中 g_1, g_2 为变形前的正交坐标基矢, g_1, g_2 变形后的坐标基矢。

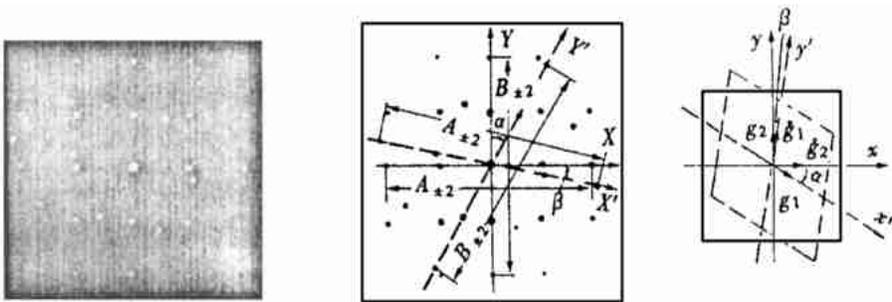


图 9 点域的变形分析示例

4 频谱测量的计算机自动识别与处理系统

早期的激光频谱变形测量法的记录方法主要有两次曝光法和后焦面上的实时机械测量法, 在实验过程中需要人工处理大量的图象数据, 而最新发展起来的 CCD 摄像机与计算机组成的测量系统已实现了数据处理的自动化, 其系统如图 10 所示^[6]。

用上述变形频谱模式的识别与处理系统研究了圆环大变形问题。圆环外径 OD 为 50.00 mm , 内径 ID 为 30.00 mm , 厚度为 8 mm 。开始时载荷加在环的垂直直径的两个端点上, 随着变

形的增大两端点的点接触变成了面接触(图 11(a)), 引入量纲一的系数 $\lambda = \delta_v / OD$, δ_v 为垂直压缩量。光栅为每毫米 50 线正交栅, 其结果如图 11 所示。Durelli 和 Parks 曾用 Moire 法详细地研究了该问题^[8], 新方法 with Moire 法相比更加简单和精确。

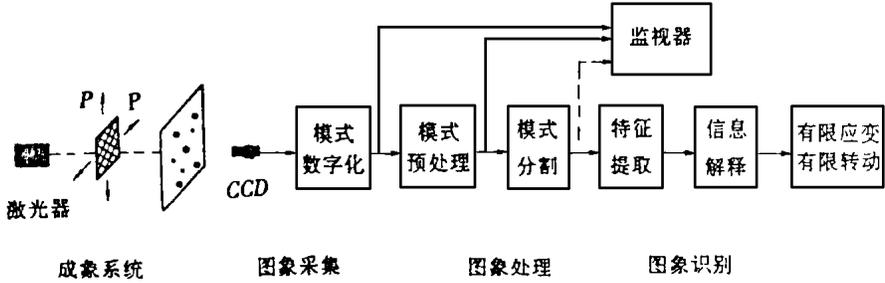
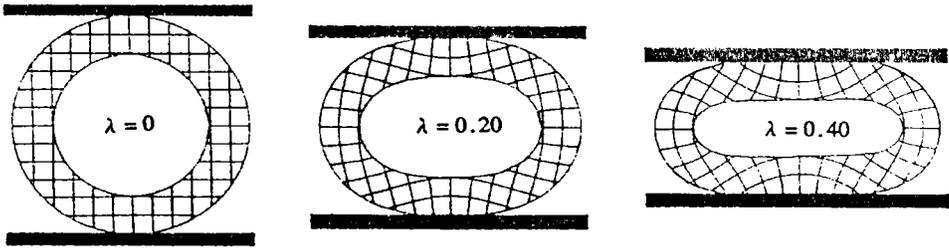
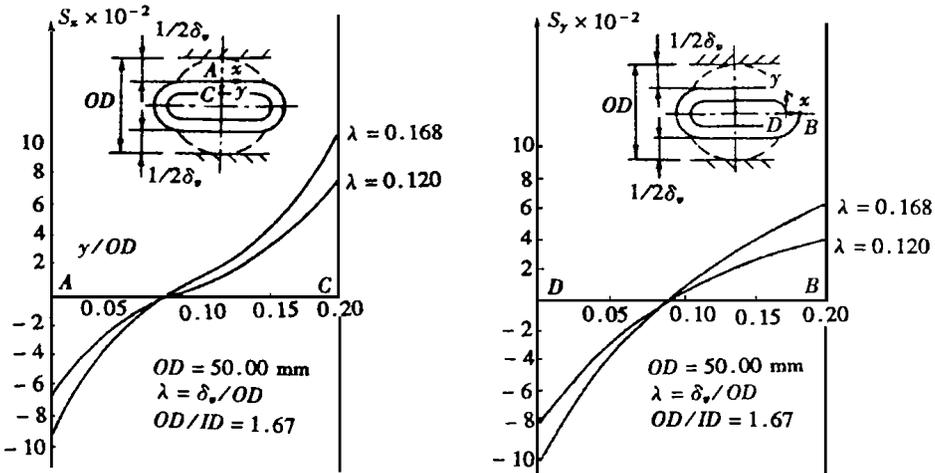


图 10 变形频谱模式的识别与处理系统



(a) 圆环的大变形



(b) 测量结果

图 11 圆环的大变形测量

5 结 束 语

陈至达教授最初提出用激光频谱来测量变形的设想,经过十多年的发展,已经成为一种成熟的测量技术。该方法有如下特点:1) 对信号做一次检测就可以获得该点域的全部变形信息,工作量小;2) 装置简单,容易实现;3) 非接触测量;4) 实现了数据采集和处理的自动化;5) 适合于现场测量,是一种很有前途的应变测量法。

[参 考 文 献]

- [1] 姜耀东. 大变形的激光频谱分析测量法[D]. 硕士学位论文,徐州:中国矿业学院,1986.
- [2] 姜耀东,陈至达. 大变形的激光频谱分析法[A]. 见:第五届全国实验力学学术会议论文集[C],南京:1987年5月,南京.
- [3] Jiang Yaodong, Chen Zhida. Spectral analysis of finite strain and finite rotation[A]. 20th US Midwestern Mechanics Conference, Development in Mechanics(C), U S A, 1987, 1301~ 1306.
- [4] 姜耀东,陈至达. 应变测量的激光频谱法(I)[J]. 中国矿业大学学报,1991,20(1):16~ 27.
- [5] Jiang Yaodong, Chen Zhida. Laser spectral analysis of strain measurement(II)[J]. Journal of China University of Mining Technology, 1994, (1):100~ 111.
- [6] 刘艳华. 有限变形频谱模式的计算机自动处理与识别[A]. 见:谢和平主编. 非线性力学理论与实践[C]. 北京:中国矿业大学出版社,1996,200~ 205.
- [7] 陈至达. 连续介质有限变形力学几何场论[J]. 力学学报,1979,(2):107~ 117.
- [8] Durelli A.J, Parks V.J. Moire Analysis of Strain[M]. New York Prentics_Hall. Inc, 1970.

Deformation Analysis of Laser Spectra Based on S_R Decomposition Theorem

Jiang Yaodong, An Liqian, Liu Yanhua, Chen Zhida

(China University of Mining & Technology, Beijing Campus, Beijing 100083, P R China)

Abstract: In the Fourier spectral analyzer, the Fourier spectra or the Fraunhofer diffraction pattern of an image is formed on the back focal plane when a laser beam is directed on the image lying on the front focal plane. If the image is deformed, its Fourier spectra are also subjected to change. Therefore the change of the Fourier spectra provides a particular beautiful insight into the deformation of that image. Through proposing the corresponding relationship between the image and its spectra, and analyzing the change of Fourier spectra, the deformation of the image can be obtained. Based on Fourier optical theory and S_R decomposition theorem of finite deformation, this paper presents a state of the art deformation measurement technique using laser spectral analysis. It discusses theoretical foundation of this new technique related to mathematics and optics, experimental principle and the technique of automatic recognizing and processing of the deformed spectral image. The paper is as a special commemoration and memorial to the death anniversary of professor Chen Zhida(1927~ 1998), who initially proposed the above academic idea in early 80s.

Key words: finite deformation; strain measurement; laser spectra