

文章编号: 1000-0887(1999) 11-1101-06

星积分形曲面及其维数*

谢和平¹, 冯志刚^{1,2}, 陈至达³

- (1. 中国矿业大学(北京校区) 岩石力学与分形研究所, 北京 100083;
2. 江苏镇江师范专科学校 数学系, 江苏 镇江 212003;
3. 中国矿业大学(北京校区) 基础科学系, 北京 100083)

(谨以此文纪念敬爱的导师陈至达教授逝世周年——谢和平, 冯志刚)

摘要: 通过分形曲线定义了一类分形曲面(被称为星积分形曲面), 讨论了这类分形曲面的分形维数, 得出了分形曲线的维数与它们所构造出的分形曲面维数之间的关系。

关键词: 维数; 分形曲线; 分形曲面; 星积分形曲面

中图分类号: O18 文献标识码: A

引 言

分形曲面作为一种特殊的分形几何有着广泛的应用前景。大量的文献(如[1~3])研究了不同材料的断裂表面, 表明这些断裂表面均具有分形特征, 可以用分形曲面来模拟。其维数可以用来刻画断裂表面的粗糙度, 从而断裂表面的维数与引起材料损伤及破坏的宏观力学量之间有着相关的关系。

所谓分形曲面就是三维 Euclid 空间 R^3 中特殊的一类分形集。一般地材料的拉断断面可以表示为定义域 E 在坐标平面 xOy 内的一个二元函数 $z = f(x, y)$ 。如果曲面呈现分形特性, 则该函数在 E 上处处连续且处处不可导。较为简单的一类分形曲面可表示为平面 R^2 内的一条分形曲线 $A = \{(x, z) : x \in [c, d], z = g(x)\}$ 和 R 内一区间 $B = [a, b]$ 的直积

$$F = A \times B = \{(x, y, z) : x \in [c, d], y \in [a, b], z = g(x)\},$$

即分形曲面是由曲线 A 沿直线段平移而得。另一类分形曲面是所谓的布朗曲面(参见[4]), 对 $0 < \alpha < 1$, 定义指数为 α 的布朗函数 $f: R^2 \rightarrow R$ 为一随机函数满足: 1) 以概率 1, $f(0, 0) = 0$ 且是 (x, y) 的连续函数; 2) 对 $(x, y), (h, k) \in R^2$, 增量 $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ 服从均值为 0, 方差为 $(h^2 + k^2)^\alpha$ 的正态分布, 即:

$$P(f(x+h, y+k) - f(x, y) \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(h^2 + k^2)^{\alpha/2}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{r^2}{2(h^2 + k^2)^\alpha}\right] dr \cdot$$

* 收稿日期: 1999_07_09;

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(59425003)

作者简介: 谢和平(1956~), 男, 博士, 教授, 博导, 校长。研究方向: 岩石力学等, 已发表专著 5 部, 论文 160 余篇, 曾获国家自然科学基金、国家科技进步奖、国家教委科技进步奖、煤炭科技进步奖等多项奖励。

我们称 $\{(x, y, z): (x, y) \in R^2, z = f(x, y)\}$ 为指数为 α 的布朗曲面。

与人们构造的数学分形相比,自然界中所固有的物理分形^[5]更具有随机性、复杂性和尺度有限性(即尺度在某一正区域 $[r, \xi]$ 内具有分形特性)。在自然界中不存在严格意义上的数学分形。在进行科学研究的过程中,我们只能对具有某些分形特性的对象建立近似的分形模型,然后应用分形作为工具,对对象进行分析和研究。所以随着研究对象、研究者和研究角度等的不同,建立的分形模型会存在差异,这是不奇怪的。对于断裂表面,起初人们均把它作为自相似分形来研究,随着研究的深入,发现用自相似分形来刻画断裂表面存在着某些矛盾。随后人们建立了断裂表面的自仿射分形模型。但是断裂表面不可能具有严格意义上的自仿射性,对断裂表面是否可建立更好的分形模型有待于进一步的探讨。

由于分形曲面的不规则性及随机性,分形曲面维数的计算是一个极其复杂的问题,在实际应用中均是采用近似计算的方法。由于分形断面的每一个剖面轮廓线为一个分形曲线,剖面轮廓线的粗糙性在某种意义上也能反映出断面的粗糙性,再根据分形曲面的维数应介于 2 和 3 之间,因此人们就把断面的分形维数简单的近似地记为轮廓线分形维数加一,显然这种方法是极其粗浅的。类似的方法还有把等高线的分形维数加一作为分形曲面的分形维数,等等。由于各人所用的方法不同,所得到的维数也存在差异,有时这种差异是令人难以接受的。因而,在应用分形维数来解释一些物理现象时,会得出一些不合理的有时甚至是自相矛盾的结论。

基于上述情况,许多学者都在想方设法研究和改进分形曲面维数的计算方法。对于任意集合 $A \subset R^n, B \subset R^m$,可知直积 $A \times B \subset R^{n+m}$, Falconer^[4] 给出了一个维数关系:

$$\dim(A \times B) \leq \dim A + \dim B,$$

如果分形曲面 F 可以表示成 R^2 中分形曲线 A 和 R^1 中一区间的直积,即分形曲面 F 为分形曲线 A 沿一直线段平移而得,则 $\dim F \leq \dim A + 1$ 。而指数 α 的布朗曲面 F 的维数以概率 1 为 $3 - \alpha$,即 $P(\dim F = 3 - \alpha) = 1$ (参见[4])。对于三角形区域或可剖分为三角形区域上的分形插值曲面,Massopust^[6] 研究了它们的分形维数,得到了一些结论。而对于一般自然形成的分形曲面(例如岩石断面),许多文献提出了他们各自的维数计算方法,Xie 等^[7] 提出了投影覆盖法。

本文应用分形曲线来定义了一类分形曲面,我们把它称为两个分形曲线的星积,讨论了这类分形曲面的分形维数(Box_counting 维数),指出这类分形曲面的维数与用于构造它的分形曲线维数的关系。

1 分形维数的基本概念

Mandelbrot 在 1975 年首先引进了分形几何(fractal geometry)这一概念,但是分形至今仍无严格的定义,通常情况下一个集合如果具备了下面性质中的一个或几个性质时就被称为分形(参见[4]): 1) 在任意尺度上具有精细结构; 2) 具有某种自相似性; 3) 分形维数严格大于拓扑维数; 4) 可由迭代生成。

Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数是数学上严格的测度和维数的定义。设 F 为 R^n 中的任意子集, s 为一非负数,对任意 $\delta > 0$ 定义

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 为 } F \text{ 的 } \delta\text{-覆盖} \right\}.$$

当 δ 减小时, 下确界 $H_\delta^s(F)$ 增大, 且当 $\delta \rightarrow 0$ 时趋于一极限. 记

$$H^s(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F).$$

对于任意集合 F 这个极限都存在, 但极限值可以是 0、非负有限实数或 ∞ . 我们称 $H^s(F)$ 为 F 的 s -维 Hausdorff 测度.

若 $H^s(F) < \infty$, 则对于任意 $t > s$, 均有 $H^t(F) = 0$. 从而, 存在 s 的临界值使得 $H^s(F)$ 从无穷“跳跃”到 0, 这个临界值就称为是 F 的 Hausdorff 维数, 记为 $\dim_H F$.

虽然 Hausdorff 维数在理论上严格, 但计算起来却非常困难, 只有极小一部分分形能够算出它们的 Hausdorff 维数, 这给分形的研究和应用带来了很大的障碍. 为此人们又引进了计盒维数(Box-counting 维数)的概念(参见[4]), 通常人们所说的分形维数(fractal dimension) 就是指这一维数.

设 F 为 R^n 中的任意子集, 如果极限

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{\log(1/\delta)}$$

存在, 则称此极限为 F 的计盒维数(分形维数), 记作 $\dim_B(F)$, 为书写方便在本文中我们把它简记为 $\dim(F)$. 其中 $N_\delta(F)$ 是下列数中的任意一个:

- i) 覆盖 F 的半径为 δ 的最小闭球数;
- ii) 覆盖 F 的边长为 δ 的最小的立方体数;
- iii) 与 F 相交的 δ -网立方体的个数;
- iv) 覆盖 F 的直径最大为 δ 的集的最少数;
- v) 球心在 F 上, 半径为 δ 的相互不交的球的最多个数.

另外, 在上面极限中, 当考虑 $\delta \rightarrow 0$ 时, 只要考虑通过任一满足 $\delta_{k+1} \geq c \cdot \delta_k$ 的递减序列 δ_k 趋于零时的极限即可, 其中 $0 < c < 1$, 例如: $\delta_k = c^k$; 又例如: $\delta_k = 1/k$.

2 星积分形曲面及其维数

设 A 为坐标面 xOz 中的一条分形曲线, B 为 yOz 中的一条水平直线段. 把 A 沿着 B 平移, 我们可得到一个分形曲面 F (图1), 这一分形曲面可以写成二维空间中的集合 A 和一维空间中的集合 B' (B 在 y 轴上的投影) 的直积

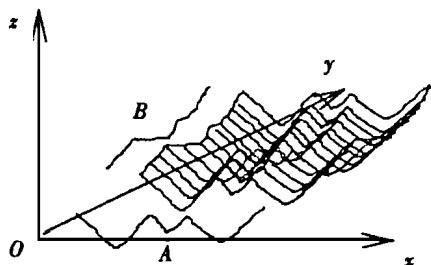
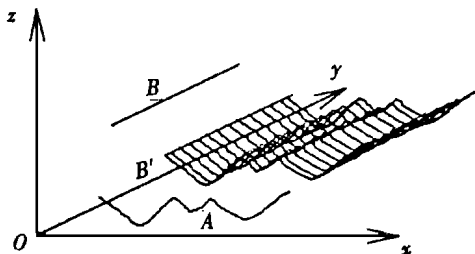


图 1 分形曲线沿直线平移得到的分形曲面

图 2 分形曲线沿曲线平移得到的分形曲面

$$A \times B' = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Falconer^[4] 已证

$$\dim(F) \leq \dim(A) + \dim(B') = \dim(A) + 1.$$

现在假定 B 也是 yOz 中的一条曲线或者分形曲线, 让 A 沿 B 平移, 也可得一个曲面 F (图 2)• 这时的曲面就不再是两条二维平面中曲线 A 和 B 的直积了, 我们把这种曲面称为两曲线的星积, 即

定义 设 $A: z = f(x), x \in [a, b]$ 和 $B: z = g(y), y \in [c, d]$ 分别为坐标平面 xOz 和 yOz 中的(分形)曲线, $f(a) = g(c)$, 则三维空间 $Oxyz$ 中的曲面

$$F = \left\{ (x, y, z) \mid x \in [a, b], y \in [c, d], z = f(x) + g(y) - f(a) \right\}$$

称为 A 和 B 的星积, 记作 $A * B$ •

显然 $A * B = B * A$, 即 A 沿 B 平移所得到的曲面和 B 沿 A 平移所得到的曲面相同• 对于这样曲面的分形维数我们要证明下面定理:

定理 设 $A: z = f(x), x \in [a, b]$ 和 $B: z = g(y), y \in [c, d]$ 分别为坐标平面 xOz 和 yOz 中的(分形)曲线, $f(a) = g(c)$ • 则

$$\dim(A * B) = (\dim(A) + 1) \vee (\dim(B) + 1)$$

即: $A * B$ 的分形维数为 $\dim(A) + 1$ 和 $\dim(B) + 1$ 的较大者•

为了证明这一定理我们先来引出两个引理•

引理 1 如果 $\dim A \geq \dim B \geq 1$, 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta(A) + N_\delta(B)]}{-\log \delta} = \dim A \cdot$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta(A) + N_\delta(B) - \delta^{-1}]}{-\log \delta} = \dim B \cdot$$

其中 $N_\delta(A), N_\delta(B)$ 分别为 A, B 的 δ -覆盖的个数•

证明 设 $\dim A = D$, 由分形维数的定义可知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 当 $0 < \delta < \delta_0$ 时, 有

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} < D + \varepsilon, \quad \frac{\log N_\delta(B)}{-\log \delta} < D + \varepsilon,$$

即 $N_\delta(A), N_\delta(B) < \delta^{-(D+\varepsilon)}$,

从而

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta(A) + N_\delta(B)]}{-\log \delta} \leq D + \varepsilon \cdot$$

再由 ε 的任意性可知第一式成立•

另外, 显然存在 $\delta' > 0$, 当 $0 < \delta < \delta'$ 时也有 $\delta^{-1} < \delta^{-(D+\varepsilon)}$, 由上面类似的方法可证第二式也成立• 引理证毕•

现在设

$$\phi_1: \begin{matrix} R^2 \rightarrow R^2 \\ (x, z) \mapsto \begin{pmatrix} x-a \\ b-a, z \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \phi_2: \begin{matrix} R^2 \rightarrow R^2 \\ (y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y-c \\ d-c, z \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\phi: \begin{matrix} R^3 \rightarrow R^3 \\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x-a, y-c \\ b-a, d-c, z \end{pmatrix} \end{matrix}$$

引理 2 设 ϕ_1, ϕ_2, ϕ 如上定义, 则

- 1) $\phi(A * B) = (\phi_1(A)) * (\phi_2(B))$;
- 2) $\dim \phi_1(A) = \dim A$,
- $\dim \phi_2(B) = \dim B$,

$$\dim \phi(A * B) = \dim A * B.$$

证明 1) 是显然的. 对于 2), 我们设 $\rho(x, y)$ 为 R^2 中的欧氏距离, 则任给 $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in R^2$, 有

$$\rho(\phi_1(x_1, z_1), \phi_1(x_2, z_2)) \leq L \cdot \rho((x_1, z_1), (x_2, z_2)),$$

其中 $L = \max\{1, 1/(b-a)\}$, 所以 ϕ_1 是 Lipschitz 变换, 同理可证 $\phi_1^{-1}, \phi_2, \phi_2^{-1}, \phi, \phi^{-1}$ 均为 Lipschitz 变换. 因为双向 Lipschitz 变换下象与原象的维数是相等的(参见[4]). 所以 2) 中三个式子均成立.

定理的证明 先证 $a = c = 0, b = d = 1$ 的情形, 由第一节可知我们只要对 $1/n$ 网格的情形进行证明即可.

设 $I_i = [(i-1)/n, i/n], i = 1, 2, \dots, n; N^i(A)$ 为所有 $1/n$ 网格中落在 I_i 内且与 A 相交的网正方形的个数; $N^j(B)$ 为所有 $1/n$ 网格中落在 I_j 内且与 B 相交的网正方形的个数; 而 $N^{ij}(A * B)$ 为所有 $1/n$ 网格中落在 $I_i \times I_j$ 内且与 $A * B$ 相交的网立方体的个数;

对于任意 n 维空间中的区域 E 及 E 上的任意函数 h , 非负实数 $\sup_{x, y \in E} |h(x) - h(y)|$ 称为函数 h 在 E 上的振幅, 记作 $\text{osc}(h, E)$, 显然

$$\text{osc}(f(x) + g(y) - f(a), I_i \times I_j) = \text{osc}(f, I_i) + \text{osc}(g, I_j),$$

由此可得

$$N^i(A) + N^j(B) - 1 \leq N^{ij}(A * B) \leq N^i(A) + N^j(B)$$

因为 $A * B$ 与 $1/n$ 网格相交的网格个数为 $N_{1/n}(A * B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} N^{ij}(A * B)$, 所以

$$nN_{1/n}(A) + nN_{1/n}(B) - n^2 \leq N_{1/n}(A * B) \leq nN_{1/n}(A) + nN_{1/n}(B).$$

不妨设 $\dim A \geq \dim B \geq 1$, 由引理 1 可知

$$\lim_n \frac{\log(N_{1/n}(A * B))}{\log n} = \dim A + 1.$$

所以此时 $\dim(A * B) = \dim A + 1$.

对于 $[a, b], [c, d]$ 为一般区间的情形, 作引理 2 中的变换 ϕ_1, ϕ_2, ϕ , 由本证明过程的前面部分可知 $\dim(\phi(A * B)) = (\dim(\phi_1(A)) + 1) \vee (\dim(\phi_2(B)) + 1)$, 再由引理 2, 定理全部证明.

推论 如果分形曲面 F 可以表示为 R^2 中的分形曲线 A 和 R 中一区间的直积, 即 F 为 A 沿一直线段平移而得, 则 $\dim F = \dim A + 1$.

由定理可知星积分形曲面的维数由维数较大方向上的分形曲线的维数唯一确定. 即小维数(粗糙度)方向上分形曲线的维数(粗糙度)对整个曲面的维数(粗糙度)没有贡献, 它被大维数(粗糙度)方向上分形曲线的维数(粗糙度)所湮没.

[参 考 文 献]

- [1] 谢和平, 陈至达. 分形几何与岩石断裂[J]. 力学学报, 1988, 20(3): 264~275.
- [2] Mandelbrot B B, et al. Fractal character of fracture surfaces of metals[J]. Nature, 1984, 308: 721~723.
- [3] Pande C S, et al. Fractal characterization of fracture surfaces[J]. Acta Metall, 1987, 35(7): 1633~1637.
- [4] Falconer K J. 分形几何——数学基础及其应用[M]. 谢和平等编译. 重庆: 重庆大学出版社,

1991.

- [5] Borodich F M. Some fractal models of fracture[J]. J Mech Phys Solids, 1997, **45**(2): 239~ 259.
- [6] Massopust P R. Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets [M]. San Diego, California: Academic Press, 1994.
- [7] Xie Heping, et al. Direct fractal measurement of fracture surfaces[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**: 3073~ 3084.

On Star Product Fractal Surfaces and Their Dimensions

Xie Heping¹, Feng Zhigang^{1,2}, Chen Zhida³

(1. Institute of Rock Mechanics & Fractals, China University of
Mining and Technology, Beijing 100083, P R China;

2. Department of Mathematics, Zhenjiang Teacher's College,
Zhenjiang, Jiangsu, 212003, P R China;

3. Department of Fundamental Science, China University of Mining and
Technology, Beijing 100083, P R China)

Abstract: In this paper, by using fractal curves, a family of fractal surfaces are defined. Each fractal surface of this family is called Star Product Fractal Surface (SPFS). A theorem of the dimensions of the SPFS is strictly proved. The relationship between the dimensions of the SPFS and the dimensions of the fractal curves constructing the SPFS is obtained.

Key words: dimension; fractal curve; fractal surface, SPFS