

文章编号: 1000-0887(1999) 12-1309-08

Duffing 方程的静态与动态分岔特性研究^{*}

曹庆杰, 张天德, 李久平

(山东工业大学 数理系, 济南 250061)

(陈予恕推荐)

摘要: 对于 Duffing 方程的静态和全局动态分岔, 通过研究平均方程的全局行为得到了出现各种分岔的条件, 揭示了 Duffing 方程周期解的变化过程及其具有的非线性动力学性质。

关键词: Duffing 方程; 平均系统; 分岔

中图分类号: O175.10; O175.14; O317 文献标识码: A

引 言

Duffing 方程是人们所熟悉的具有重要应用背景的非线性振子, 它具有丰富的动力学行为, 这些动力学行为至今还是目前人们研究的重要内容^[1,2,3]。

本文试图就 Duffing 方程的周期解的静态分岔及其过渡条件进行探讨, 就平均方程的动态全局分岔及各种拓扑结构和过渡条件进行研究。借助于平均定理可以了解原系统出现周期解的条件及其过渡过程, 揭示了 Duffing 方程所具有的非线性动力学性质。

1 平均方程

考虑 Duffing 方程

$$\dot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha_0 x^3 = F \cos \omega t, \quad (1)$$

其中, ω_0 为固有圆频率, n 为系统阻尼, α_0 为非线性参数, F 与 ω 分别为外激励幅值和外激励频率。假设 $\omega_0^2 - \omega^2 = \Omega$, n 、 α_0 及 F 均为 ε 小量, 在不引起混淆的情况下我们把符号 ε 略去。

令

$$\begin{cases} x = u \cos \omega t + v \sin \omega t, \\ \dot{x} = -u \omega \sin \omega t + v \omega \cos \omega t, \end{cases} \quad (2)$$

则方程(1)化为

$$\begin{cases} u' \cos \omega t + v' \sin \omega t = 0, \\ -u' \omega \sin \omega t + v' \omega \cos \omega t = f(u, v, t), \end{cases} \quad (3)$$

其中,

* 收稿日期: 1997_12_26; 修订日期: 1999_02_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872041); 国家教委留学回国人员基金资助课题(98837129); 山东省自然科学基金资助课题(Y98A73016)

作者简介: 曹庆杰(1955-), 男, 博士(后), 教授。

$$f(u, v, t) = F \cos \omega t - \alpha_0 (u \cos \omega t + v \sin \omega t)^3 - 2n(-u \omega \sin \omega t + v \omega \cos \omega t) - \Omega(u \cos \omega t + v \sin \omega t)$$

解之得:

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{\omega} f(u, v, t) \sin \omega t, \\ v' = \frac{1}{\omega} f(u, v, t) \cos \omega t. \end{cases} \tag{4}$$

对方程(4)在周期 $[0, 2\pi]$ 内进行平均, 得

$$\begin{cases} u' = -nu + \frac{\Omega}{2\omega}v + \frac{3\alpha_0}{8\omega}(u^2 + v^2)v, \\ v' = -\frac{\Omega}{2\omega}u - mv - \frac{3\alpha_0}{8\omega}(u^2 + v^2)u + \frac{F}{2\omega}, \end{cases} \tag{5}$$

在方程(5)中令

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \varphi = \arctan(v/u),$$

可以得到振幅和幅角的方程

$$\begin{cases} r' = -nr + \frac{F}{2\omega} \sin \varphi, \\ r\varphi' = -\frac{\Omega}{2\omega}r - \frac{3\alpha_0}{8\omega}r^3 + \frac{F}{2\omega} \cos \varphi; \end{cases} \tag{6}$$

振幅方程为:

$$\frac{F^2}{4\omega^2} = n^2 r^2 + r^2 \left[\frac{\Omega}{2\omega} + \frac{3\alpha_0}{8\omega} r^2 \right]^2. \tag{7}$$

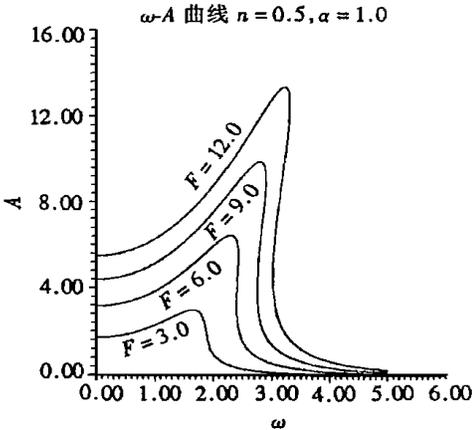


图1 Duffing 方程的 ω - A 幅频曲线

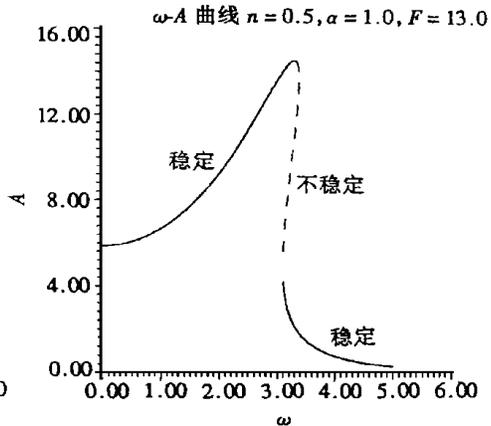


图2 稳定解与不稳定解分支图

图1 给出不同幅值在外激励频率变化时的变化规律, 图2 中给出稳定和稳定的解分支。

从图中可以看到当参数 ω 变化时系统由单个周期解过渡到两个、三个周期解, 最后过渡回单个周期解的过程。

为了进一步弄清这些规律, 我们利用奇异性理论的方法对振幅方程进行分类研究。

2 平均振幅方程的分岔现象

改写振幅方程(7)为

$$\frac{16F^2}{9\alpha_0^2} = \frac{16}{9\alpha_0^2}(4\omega^2 n^2 + \Omega^2)x + \frac{8\Omega}{3\alpha_0}x^2 + x^3, \tag{8}$$

其中, $x = r^2 > 0$. 令 $x = y - 8\Omega/9\alpha_0^2$, 可得

$$y^3 - \lambda^2 + \alpha + \beta y = 0, \tag{9}$$

其中,

$$\beta = \left[\frac{16}{9\alpha_0^2}(4\omega^2 n^2 + \Omega^2) - \frac{8^2\Omega^2}{27\alpha_0^2} \right] = \frac{16}{27\alpha_0^2}(12\omega^2 n^2 - \Omega^2),$$

$$\alpha = -\frac{2 \times 8^2 \Omega^3}{9^3 \alpha_0^3} - \frac{8^3 n^2 \omega^2}{81 \alpha_0^3}, \quad \lambda^2 = \frac{16F^2}{9\alpha_0^2}.$$

取 $h(y, \lambda) = y^3 - \lambda^2$ 作为芽为双翼尖点, 可以证明^[4]

$$G(y, \lambda, \alpha, \beta, \nu) = y^3 - \lambda^2 + \alpha + \beta y + \nu \lambda y \tag{10}$$

为 $h(y, \lambda)$ 的普适开折.

比较(9)与(10)可知, $G_1(y, \lambda, \alpha, \beta) = y^3 - \lambda^2 + \alpha + \beta y$

为 $h(y, \lambda)$ 的一个开折. $G_1(y, \lambda, \alpha, \beta)$ 的转迁集为

$$\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{L} \tag{11}$$

其中,

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \left[\left(\frac{\beta}{3} \right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = 0 \right\}, \\ \mathcal{H} &= \left\{ \beta = 0; \alpha \geq 0 \right\}, \mathcal{L} = \emptyset \end{aligned} \right.$$

这里, \mathcal{B} , \mathcal{H} 和 \mathcal{L} 分别为分岔集、滞后集和双极限点集. Σ 将参数平面 (α - β 平面) 分为如图 3 所示的 3 个具有扰动不变性的区域. 由于开折参数 α 和 β 分别由系统参数 α_0 和 β_0 所确定, 因而区域 III 是不可实现的.

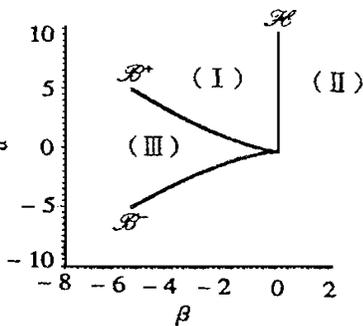


图 3 Duffing 方程静态分岔图

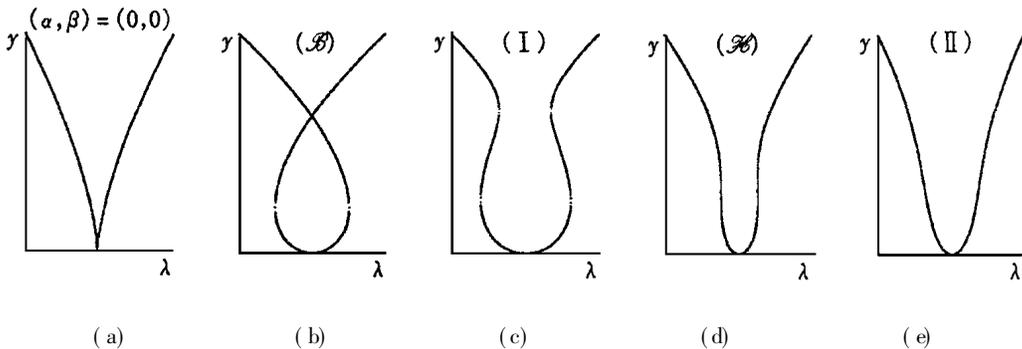


图 4 Duffing 方程分岔曲线图

从以上图形分析可知, Duffing 方程振幅曲线为空间双翼尖点的普适开折的部分开折. 当阻尼参数为零, 外界干扰频率与系统圆频率相等时系统表现出标准的双翼尖点分岔, 如图 4 的第一种分岔曲线所示; 当阻尼参数为零, 外激励频率改变时, 系统参数位于分岔集 \mathcal{B} 上, 出现图 4 的第二种分岔图. 当阻尼参数增加, 系统参数由分岔集 \mathcal{B} 跳到区域 I, 出现图 4 中第三种分岔曲线; 当阻尼参数继续增加, 系统参数位于滞后集 \mathcal{H} 上, 分岔曲线出现滞后现象, 如图 4 的第四种分岔曲线所示; 当阻尼参数再增加时, 系统参数位于区域 II, 出现第五种分岔曲线.

当系统参数位于分岔集 \mathcal{B} 上时, 分岔曲线仍为图 4 中的第二种分岔曲线, 当阻尼参数增加时, 直接跳到区域 II, 出现第五种分岔图.

3 平均方程的全局动态分岔

本节研究平均方程的全局动态分岔。为此,重新标度方程(5)得到

$$\begin{cases} u' = -\alpha u + \beta v + (u^2 + v^2)v, \\ v' = -\beta u - \alpha v - (u^2 + v^2)u + \gamma. \end{cases} \quad (12)$$

3.1 有阻尼平均方程的全局分岔

通过以上讨论,我们知道参数变化时引起系统拓扑结构的变化,本节具体给出整个参数空间中不同参数集合上平均方程的全局动态性质,为此令(12)右边为零,得到由下列曲面围成的三个不同区域,如图5所示。

$$\begin{cases} \Gamma^+ : v^2 = -\frac{2}{27}\beta(\beta^2 + 9\alpha^2) + \frac{2}{27}\sqrt{\beta^2(\beta^2 + 9\alpha^2)^2 - 27\alpha^2(\beta^2 + \alpha^2)^2}, \\ \Gamma^- : v^2 = -\frac{2}{27}\beta(\beta^2 + 9\alpha^2) - \frac{2}{27}\sqrt{\beta^2(\beta^2 + 9\alpha^2)^2 - 27\alpha^2(\beta^2 + \alpha^2)^2}. \end{cases} \quad (13)$$

分析可知,参数位于上图区域II时,系统仅有一个稳定的焦点;当参数变化穿越(13)确定的曲面时,在一个焦点的基础上,跳出一个鞍结点;参数变化进入区域I或者区域II时,系统的鞍结点破裂出一个鞍点和焦点,此时系统有两个焦点和一个鞍点;当系统参数位于曲线

$$\begin{cases} v^2 = -\frac{2}{27}\beta(\beta^2 + 9\alpha^2), \\ \beta^2 = 3\alpha^2 \end{cases} \quad (14)$$

上时,系统只有唯一的结点,此时的相轨线结构如图7所示。

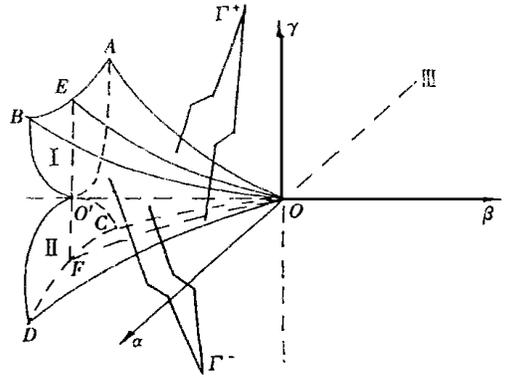


图5 Duffing 平均方程的分岔域

下列图形中给出一组原系统参数变化时相轨线的拓扑线构图,可以看出相图的变化规律。

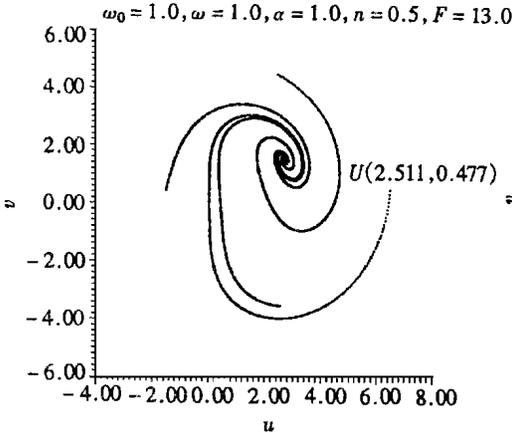


图6 区域III时平均方程相图

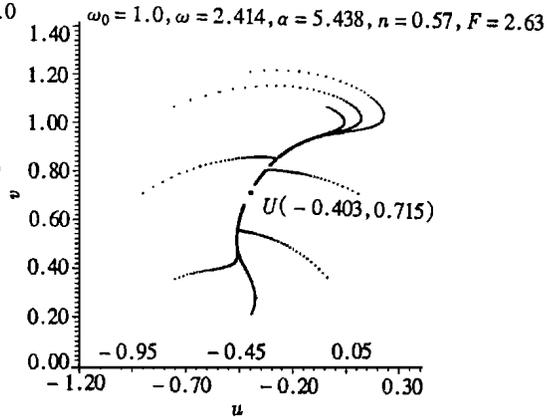


图7 位于曲线(14)上时平均方程的相图

图6和图7分别给出参数位于区域II时和参数位于(14)上的相图;图8为外激励频率增加进入区域I时的相图,图10和图12分别为参数位于曲面 Γ^+ 和曲面 Γ^- 上的相图。

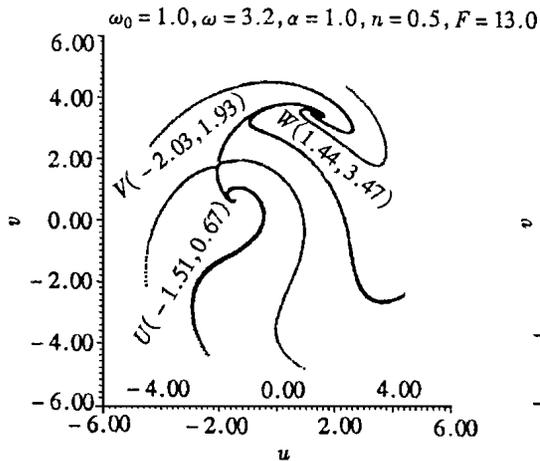


图 8 参数位于区域 I 中平均方程相图

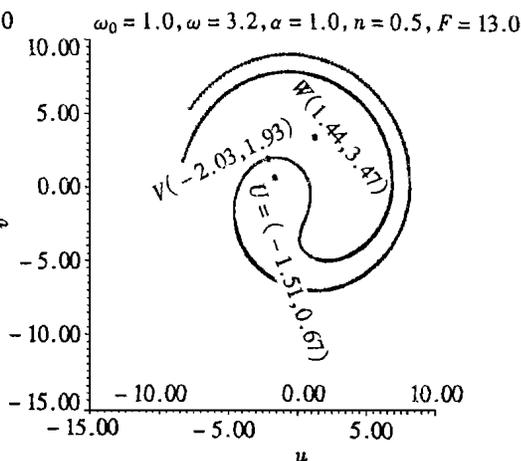


图 9 参数位于区域 I 中平衡点吸引域

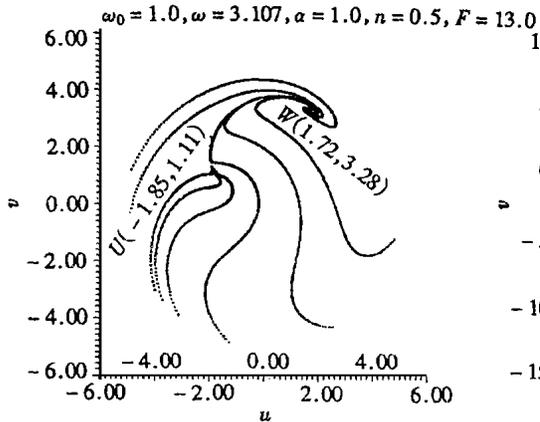


图 10 参数位于 Γ^+ 上平均方程相图

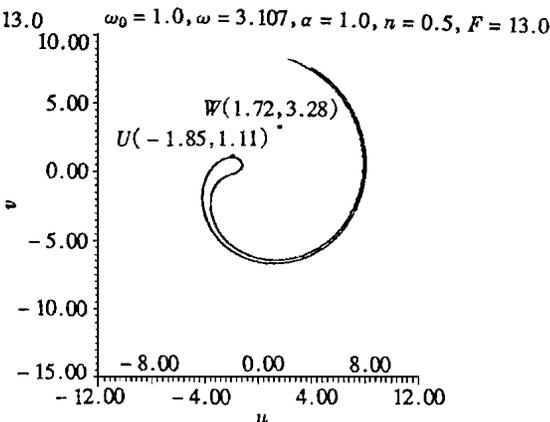


图 11 参数位于 Γ^+ 上平衡点吸引域

本节我们还给出了当阻尼非零时的不同平衡点的吸引域。与平均系统的相图 8、10 和 12 相对应,图 9、11 和 13 分别给出相应的平衡点的吸引域,由图 9 中可以看出,鞍点的稳定流型将平面分成两部分,各部分为所包含的稳定焦点的吸引域,而只有鞍点的稳定流型进入到该奇点;图 11 和图 13 中同样有一条分界线将平面分为两部分,含有稳定焦点的区域是该稳定焦点的吸引域,而另一区域连分界线一同为鞍结奇点的吸引域;图 6 和图 7 的吸引域是整个平面。

3.2 阻尼 $n = 0$ 时平均方程的全局行为

当系统的阻尼 $n = 0$ 时的平衡点位于 u -轴上,而系统参数位于 β_y 平面。全局结构的讨论可以类似给出,此时平均系统的相图由鞍点连线和周期轨道组成。

如图 14 所示,由 Γ^+ 、 Γ^- 和 β_y 平面决定的集合

$$y = \frac{4}{27} \sqrt{-\beta^3}, y = -\frac{4}{27} \sqrt{-\beta^3}, y = 0 \tag{15}$$

将 β_y 平面分成三部分,每一部分具有不同的相图。

当 $y = 0$ 时,由方程(6)知,相图由中心平衡点(0, 0)及平衡点组成的奇异闭轨道($u^2 + v^2 = -Q/2\omega$)组成,如图 15 所示。

当参数位于区域 I, 奇异闭轨道消失,跳出一个鞍点和一个中心,系统具有三个平衡点,并

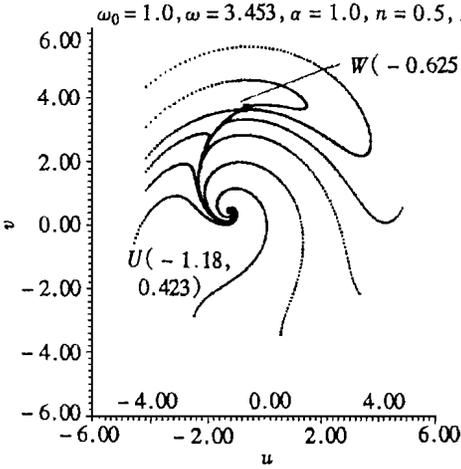


图 12 参数位于 Γ^- 上平均方程相图

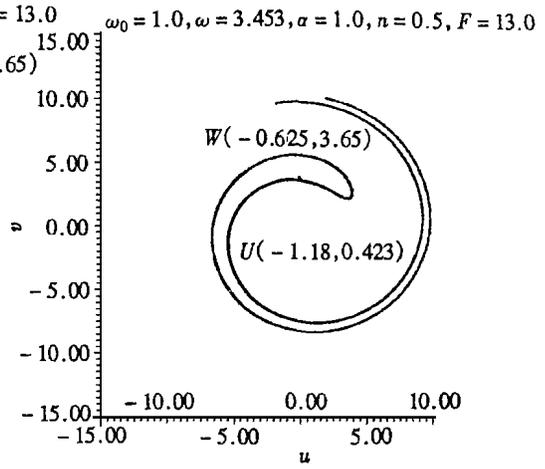


图 13 参数位于 Γ^- 上平衡点吸引域

且出现由一个鞍点出发的双同宿轨道,如图 16 所示

当参数变化到达曲线 $\gamma = 4 \sqrt{-\beta^3}/27$ 时,中间的中心点连同鞍点出发的内同宿轨道一起缩小到一个中心鞍点,此时系统具有一个中心奇点和一个中心鞍点并保留一条同宿轨道,如图 17 所示

参数继续变化位于区域 II 时,中心鞍点消失,同宿轨道化为周期轨道,此时系统只有一个中心奇点,如图 18 所示

当参数变化进入区域 II 时或者位于曲线 $\gamma = -4 \sqrt{-\beta^3}/27$ 时,可给出类似的讨论

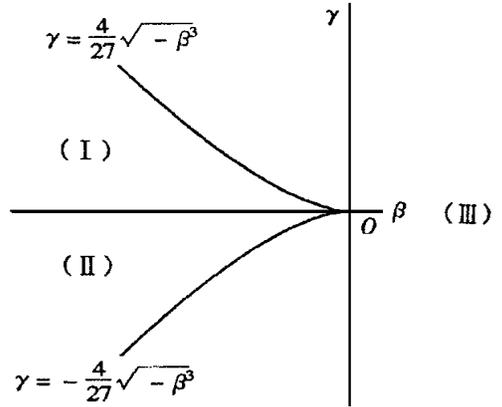


图 14 无阻尼时的分岔图

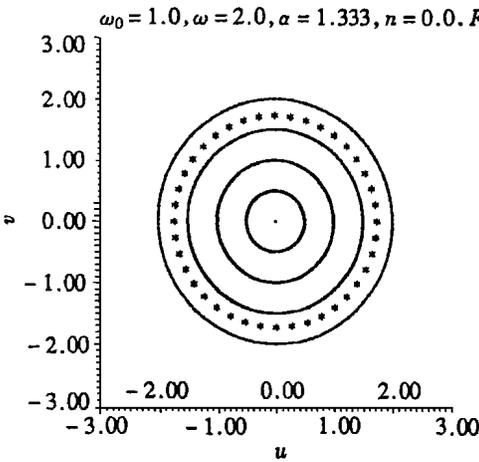


图 15 负 β 轴上平均方程相图

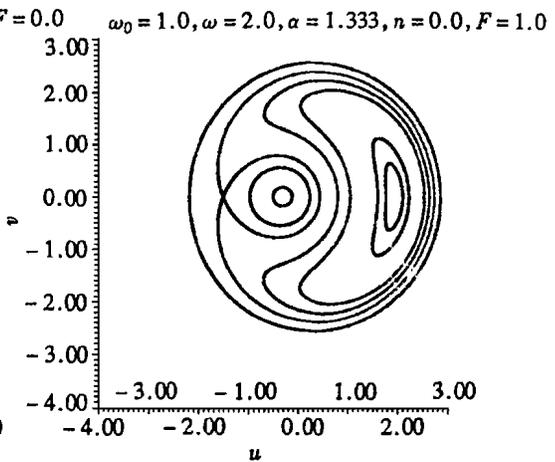
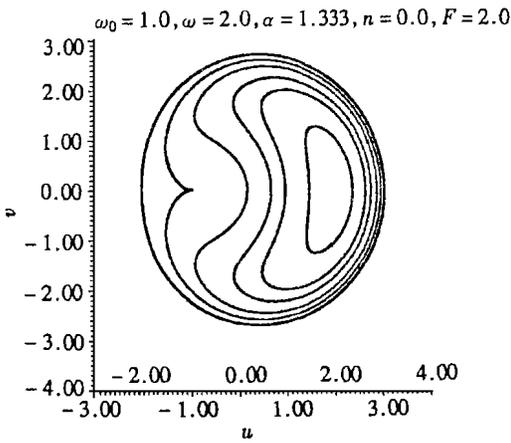
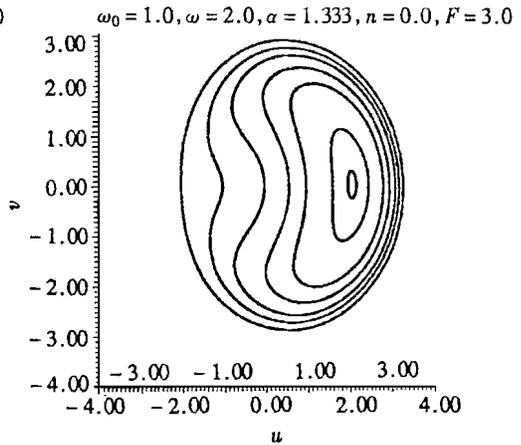


图 16 区域 I 位于 $\beta-\gamma$ 平面上的相图

图 17 Γ^+ 与 β_y 交线上的相图图 18 区域 III 位于 β_y 平面上的相图

4 讨 论

本文利用平均方法^[2,3]研究了 Duffing 方程的静态分岔和平均方程的动态分岔,同时给出静态和动态分岔图,得到了各种分岔现象之间的变化关系;本文还给出了平均系统的一个奇异闭轨线。

借助于平均定理,可得如下结论:

1. 当原系统无阻尼时,平均方程的平衡点位于 u 轴上,原系统具有周期解;
2. 当参数位于图 5 的区域 I 和 II 时,原 Duffing 方程具有 3 个双曲周期解;
3. 当参数位于图曲面 Γ^+ 或 Γ^- 时,原 Duffing 方程具有 2 个双曲周期解;
4. 当参数位于图曲面 Γ^+ 与 Γ^- 的交线或位于图 5 的区域 III 时,原 Duffing 方程只有 1 个双曲周期解。

双曲周期解。

本文所得关于平均方程的结果包含和推广了文献[2]和文献[3]的结果。

[参 考 文 献]

- [1] Holmes P J, Rand D A. The bifurcations of Duffings' equation: an application of catastrophe theory [J]. J Sound and Vibration, 1976, 44(2): 237~ 253.
- [2] 陈予恕, 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [3] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamics, and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
- [4] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1984.

A Study of the Static and Global Bifurcations for Duffing Equation

Cao Qingjie, Zhang Tiande, Li Jiuping

(Department of Mathematics and Physics, Shandong University of
Technology, Jinan 250061, P R China)

Abstract: In this paper, the static and global bifurcations of the forced Duffing equation have been studied by means of the averaged system. Bifurcation condition has been obtained in the whole parametric space. The change of the phase plane structure has been investigated.

Key words: forced Duffing equation; averaged system; bifurcation