

文章编号: 1000_0887(1999) 12_1286_05

中心刚体_外 Timoshenko 梁系统的 建模与分岔特性研究*

肖世富¹, 陈 滨²

(1. 西南结构力学研究所, 成都 610003; 2 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

(程昌 钧推荐)

摘要: 对于中心刚体固结悬臂梁系统, 当不考虑梁剪应力(即 Euler-Bernoulli 梁)影响时, 匀速转动梁的平凡解是稳定的. 而对于深梁, 有必要考虑剪应力(即 Timoshenko 梁)的影响, 此时其匀速转动平凡解将出现拉伸屈曲. 为此采用广义 Hamilton 变分原理建立了中心刚体固结 Timoshenko 梁这类刚柔耦合系统的非线性动力学模型, 应用数值方法研究了匀速转动 Timoshenko 梁非线性系统的分岔特性, 以及失稳的临界转速.

关键词: 刚柔耦合系统; 转动 Timoshenko 梁; 拉伸失稳

中图分类号: O317; V214.9 文献标识码: A

引 言

众所周知, 存在刚性大运动和柔性运动的耦合, 乃是柔性多体系统动力学的特征^[1, 2, 3]. 因此, 研究柔性多体系统构形在刚性大运动下的失稳和分岔特性, 是进一步对多柔体系统进行动力学近似计算的基础^[2, 3]. 对于中心刚体外固结悬臂梁这种刚柔耦合系统, 已有不少解析和数值的研究^[4, 5, 6]. 我们在文献[6]中, 对于 Euler-Bernoulli 梁系统, 严格证明了刚体匀速转动不引起柔性梁的失稳与分岔. 但是对于转动的深梁系统, 有必要考虑剪应力的影响, 从而必须考虑转动的 Timoshenko 梁. 文献[7, 8]线性的初步分析已经发现, 此时对匀转速来说, 有拉伸失稳和分岔现象的存在.

本文采用广义 Hamilton 原理严格建立了中心刚体外固结 Timoshenko 梁这类刚柔耦合系统的大挠度非线性动力学模型. 在刚体匀速转动情况下, 我们以此非线性模型为基础, 应用数值方法的打靶法, 确实得到了转动 Timoshenko 梁的屈曲解. 此时 Timoshenko 梁失稳的临界转速规律也可以通过计算得到.

1 系统的数学模型

本文修改文献[6]中研究的刚柔耦合系统, 设系统中的柔梁为 Timoshenko 梁. 因此, 系统

* 收稿日期: 1997_06_17; 修订日期: 1999_04_19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19332022); 863 高科技资助项目(863_2_2_4_2)

作者简介: 肖世富(1970~), 男, 四川中江人, 助理研究员, 硕士, 在《中国科学(A)》等刊物发表多篇论文; 陈滨(1937~), 男, 安徽六安人, 教授, 中国力学学会副理事长, 系学术委员会主任.

建模中需考虑梁横截面内剪应力的影响。此时梁微元段的变形如图 1 所示, 并设其有效横截面剪切面积为 κA 。其余的假定和记号与文献[6]一致。

在惯性坐标系 $O^* x^* y^*$ 中, Timoshenko 梁的 y 位移场可表达为

$$\mathbf{r} = (R + X(x, t) - z\psi(x, t)) \mathbf{e}_1 + (Y(x, t) + z) \mathbf{e}_2 \quad (1)$$

对于柔梁的各向同性线弹性材料, 应有

$$\left. \begin{aligned} N &= EA(\gamma - 1), \quad M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ Q &= \kappa GA(\psi - \theta), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 N 、 M 、 Q 分别为轴力、弯矩与剪力。由(1)、(2)可计算得到系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left\{ A [(\dot{X} - Y\dot{\alpha})^2 + ((R + X)\dot{\alpha} + \dot{Y})^2] + I [(\dot{\psi} + \dot{\alpha})^2 + \dot{\psi}^2] \right\} dx, \quad (3)$$

图 1 梁微元段变形

系统的势能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI (\psi')^2 + \kappa GA (\psi - \theta)^2 + EA (\gamma - 1)^2 \right\} dx. \quad (4)$$

系统建模的根据是广义 Hamilton 原理。当采用 Lagrange 乘子时, 该原理的表达式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[(T - V) - \int_0^L [P(X' - \gamma \cos \theta) + S(Y' - \gamma \sin \theta)] dx \right] + m(t) \delta \alpha \right\} dt = 0, \quad (5)$$

其中 P 、 S 为 Lagrange 乘子。

将已求得的动能、势能与虚功表达式代入(5), 即可得到本文研究的中心刚体外 Timoshenko 梁这类刚柔耦合系统的大挠度非线性动力学模型

$$\left\{ \begin{aligned} X' &= \gamma \cos \theta, \\ Y' &= \gamma \sin \theta, \\ EA(\gamma - 1) - (P \cos \theta + S \sin \theta) &= 0, \\ \kappa GA(\theta - \psi) + P \gamma \sin \theta - S \gamma \cos \theta &= 0, \\ EI \psi'' + \kappa GA(\theta - \psi) - Q' \psi + Q \psi \alpha^2 - Q \ddot{\alpha} &= 0, \\ P' - Q \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (X' - Y \alpha) - [(R + X)\dot{\alpha} + \dot{Y}] \alpha \right\} &= 0, \\ S' - Q \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(R + X)\dot{\alpha} + \dot{Y}] + (X' - Y \alpha) \alpha \right\} &= 0, \\ I_0 \ddot{\alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \int_0^L \left\{ A [((R + X)\dot{\alpha} + \dot{Y})(R + X) - (X' - Y \alpha)] + I [(\dot{\psi} + \dot{\alpha})^2 + \dot{\psi}^2] \right\} dx \right\} &= m(t) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

及其边界条件

$$\left\{ \begin{aligned} X(0, t) &= 0, \quad Y(0, t) = 0, \quad \psi(0, t) = 0, \\ \psi'(L, t) &= 0, \quad P(L, t) = 0, \quad S(L, t) = 0. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

本文只研究匀速转动不可压缩 Timoshenko 梁拉伸失稳的临界转速与屈曲解。因此, 去掉

方程组(6)与(7)中与时间有关的项,且对于匀速转动不可压缩梁, $\nu \equiv 1$, 设匀角速度为 $\varpi \equiv \Omega$, 引进量纲为一的参数

$$\mu = \sqrt{\frac{\Omega L^4 \Omega^2}{EI}}, \quad \beta = \frac{EI}{\kappa G A L^2}, \quad \varepsilon = \frac{I}{A L^2}, \quad a = \frac{R}{L}, \quad (8)$$

并设

$$x = L\xi, \quad X = (\xi + u)L, \quad Y = \nu L, \quad P = \frac{Elp}{L^2}, \quad S = \frac{Elq}{L^2}, \quad (9)$$

则有

$$\begin{cases} u' = \cos \theta - 1, \\ v' = \sin \theta, \\ \theta = \phi - \beta p \sin \theta + \beta q \cos \theta, \\ \phi'' = \frac{\phi - \theta}{\beta} - \varepsilon \mu^2 \phi, \\ p' = -\mu^2 (a + \xi + u), \\ q' = -\mu^2 v \end{cases} \quad (10)$$

以及边界条件

$$\begin{cases} u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \\ \phi'(1) = 0, \quad p(1) = 0, \quad q(1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

方程(10)与(11)构成了我们寻求 Timoshenko 梁屈曲解的非线性模型. 如果只关心临界转速, 可将(10)与(11)线性化, 得到如下简化方程

$$\begin{cases} v'' - \phi' + \beta \mu^2 (p_0 v')' + \beta \mu^2 v = 0, \\ \phi'' + \frac{v' - \phi}{\beta} + \varepsilon \mu^2 \phi = 0, \\ p_0 = a(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 - \xi^2), \end{cases} \quad (12)$$

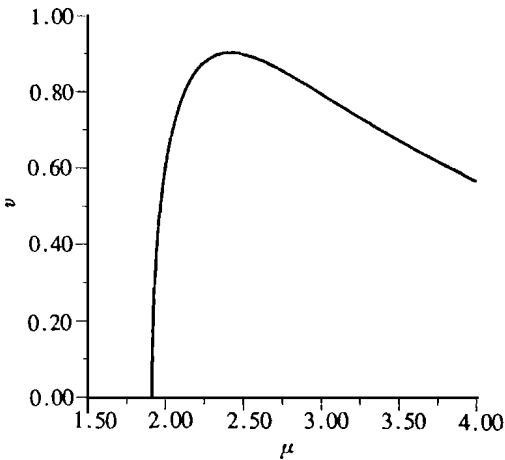


图2 压缩屈曲解 ($a = -2$)

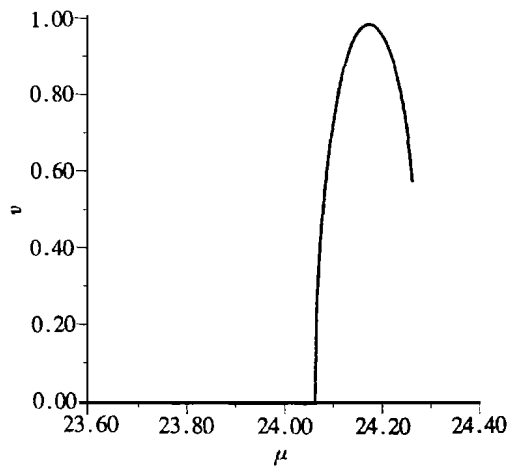


图3 拉伸屈曲解 ($a = 0$)

边界条件为

$$\begin{cases} v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \\ v'(1) = \phi(1), \quad \phi'(1) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

2 分岔行为研究

一般情况下,对于矩形截面 Timoshenko 梁, $\kappa = 5/6$, 因此我们取参数 $\beta = 3\epsilon$ 。下面我们采用打靶法求解系统(10)、(11)的屈曲解,采用初值_代数方法^[9]计算系统(12)、(13)的临界转速。

2.1 屈曲解计算

对于非线性系统(10)、(11),在参数 $\epsilon = 0.01$ 时,我们用打靶法计算,确实得到了系统的压缩屈曲解($a = -2$)与拉伸屈曲解($a = 0$),其端部挠度屈曲解如图2、图3所示。结果显示:Timoshenko 梁端部挠度压缩屈曲解与拉伸屈曲解均为叉式分岔。

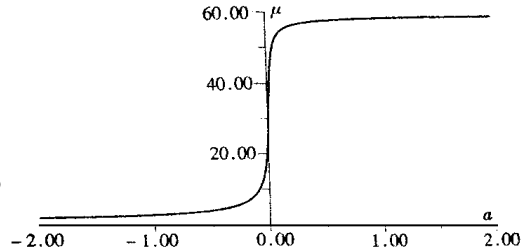


图4 $\epsilon = 0.01$ 时临界转速_参数 a 的变化图

2.2 临界转速计算

对于系统(12)、(13),我们采用初值_代数法分别计算了参数 $\epsilon = 0.01$ 、 $\epsilon = 0.005$ 、 $\epsilon = 0.001$ 三种情况下,匀速转动 Timoshenko 梁失稳的临界转速随参数 a 的变化规律,结果如图4、图5、图6所示。计算结果说明:随着参数 ϵ 的变小,在拉伸情况下,临界转速急剧增大。此结论进一步印证了匀速转动 Euler-Bernoulli 梁平凡解的稳定性^[6]。

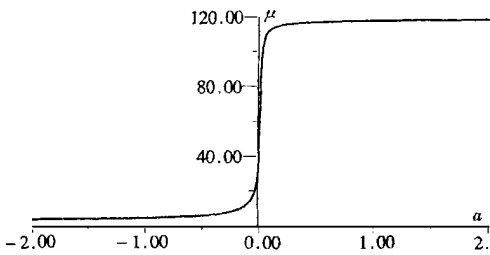


图5 $\epsilon = 0.005$ 时临界转速_参数 a 的变化图

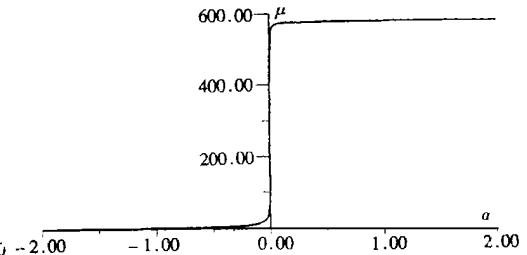


图6 $\epsilon = 0.001$ 时临界转速_参数 a 的变化图

[参 考 文 献]

- [1] Shabana A A. Dynamics of Multibody Systems [M]. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [2] 陈滨. 柔性多体系统(FMS)动力学研究的若干问题[A]. 见: 黄文虎, 陈滨, 王照林主编. 一般力学(动力学, 振动与控制)最新进展[C]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [3] 陆佑方. 柔性多体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.
- [4] Bloch A M. Stability analysis of a rotating flexible system[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1989, 15(2): 211~ 234.
- [5] 潘振宽, 颜幼平, 洪嘉振, 等. 转动刚体上固结悬臂梁系统的动力学数值分析[J]. 力学与实践, 1995, 17(5): 26~ 29.
- [6] 肖世富, 陈滨. 一类刚柔耦合系统的建模与稳定性研究[J]. 力学学报, 1997, 29(4): 439~ 447.
- [7] Lee S Y, Kuo Y H. Bending frequency of a rotating beam with an elastically restrained root[J]. ASME J Appl Mech, 1991, 58(1): 209~ 214.
- [8] Lee S Y, Lin S M. Bending vibrations of rotating nonuniform Timoshenko beams with an elastically restrained root[J]. ASME J Appl Mech, 1994, 61(4): 949~ 955.
- [9] 朱正佑, 程昌钧. 分支问题的数值计算方法[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1989.

Modeling and Bifurcation Analysis of the Centre Rigid Body Mounted on an External Timoshenko Beam

Xiao Shifu¹, Chen Bin²

(1. Southwest Institute of Structural Mechanics, Chengdu 610003, P R China;

2. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: For the system of the centre rigid body mounted on an external cantilever beam, the equilibrium solution of the steadily rotating beam is stable if the effect of its shearing stress (i. e. the beam belongs to the Euler-Bernoulli type) is not considered. But for the deep beam, it is necessary to consider the effect of the shearing stress (i. e. the beam belongs to the Timoshenko type). In this case, the tension buckling of the equilibrium solution of the steadily rotating beam may occur. In the present work, using the general Hamilton Variation Principle, a nonlinear dynamic model of the rigid-flexible system with a centre rigid body mounted on an external Timoshenko beam is established. The bifurcation regular of the steadily rotating Timoshenko beam is investigated by using numerical methods. Furthermore, the critical rotating velocity is also obtained.

Key words: rigid-flexible coupling system; rotating Timoshenko beam; tension buckling