

文章编号: 1000-0887(1999) 12-1259-08

求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程 的混合型微分求积法*

孙建安¹, 朱正佑²

(1. 西北师范大学 物理系, 兰州 730070;

2. 上海大学 数学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(戴世强推荐)

摘要: 微分求积法(DQM)能以较少的网格点求得微分方程的高精度数值解,但采用单纯的微分求积法求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程时,只能对低雷诺数流动获得较好的数值解,当雷诺数较高时会导致数值解不收敛。为此,提出了一种微分求积法与迎风差分法混合求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程的预估-校正数值格式,用伪时间相关算法以较少的网格点获得了较高雷诺数流动的数值解。作为算例,对 Γ_1 和 Γ_2 驱动方腔内的流动进行了计算,得到了较好的数值结果。

关键词: 数值方法; 微分求积法; Navier-Stokes 方程

中图分类号: O357.1 文献标识码: A

引 言

由 R. Bellman^[1,2]提出的微分求积法(DQ 方法)已经被成功地用于求解工程和物理学中的许多问题。由于在 DQ 方法中使用了全部节点的信息拟合节点的各阶导数,因而仅使用较少的网格点就能获得很高精度的数值解。[3]认为这种方法将发展成为象有限差分法和有限元法那样的数值求解各种微分方程的常用技术。

微分求积法也被用于求解流体力学问题^[4,5,6]。[4]中对低雷诺数($Re = 25$)的圆柱绕流问题讨论了涡度-流函数形式的二维不可压缩 Navier-Stokes 方程,对空间变量的导数使用 DQ 方法进行离散,并用四阶 Runge-Kutta 方法求解所获得的常微分方程组。[6]中对较低雷诺数($Re \leq 400$)的驱动方腔内的流动问题将消去涡度后的流函数的四阶偏微分方程进行 DQ 离散,并用 Newton-Raphson 方法迭代求解所得到的非线性方程组。然而当雷诺数较高时这些方法都得不到满意的结果。为了改进 DQ 方法使之适用于高雷诺数的流动问题,本文首先对驱动方腔内的流动问题,直接用 DQ 方法离散涡度-流函数形式的二维不可压缩 Navier-Stokes 方程。数值试验表明,对低雷诺数流动用很少的网格点即可获得令人满意的结果,而对高雷诺数流动问题方法将失败,其原因在于当雷诺数很大时 Navier-Stokes 方程中的对流项将起重大作用,而 DQ 方法缺少一种迎风机制来恰当地描述这种对流性质。为了克服这一不足之处,本文将迎风差分法引入到微分求积法中,提出了一种混合型的 DQ 方法。实质上这种方法是一种

* 收稿日期: 1998_01_06; 修订日期: 1999_04_21

作者简介: 孙建安(1964-),男,副教授,主要从事流体力学数值方法的研究。

预估_校正算法, 涡度输运方程中的对流项预估时使用迎风差分离散, 而校正时使用 DQ 方法离散。采用这种方法我们对二维驱动方腔内的流动进行了数值计算, 结果表明用较少的非均匀网格点就可获得很好的数值计算结果。

在第 1 节中我们将简述 DQ 方法的有关计算格式, 第 2 节中给出我们所使用的混合法的基本格式并简要讨论这种格式的一些实现细节, 第 3 节中给出了驱动方腔流动的具体数值计算方法和结果。数值试验表明, 对高雷诺数问题, 我们仅用 15×15 非均匀网格所获得的数值结果就能与 [7] 中用 129×129 网格的计算结果很好吻合, 表明了本文所提出的方法有更高的计算效率。

1 微分求积法

在微分求积法中, 一个函数对于某个坐标变量的导数被表示为沿该坐标方向所有网格点处函数值的线性组合。考虑定义在矩形区域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 的函数 $f(x, y)$, 分别在 x 方向和 y 方向置入 N 和 M 个网格点, 于是在平行于 x 轴的任一直线 $y = y_j$ 上, 函数 $f(x, y)$ 在网格点 (x_i, y_j) 处对于 x 的一阶和二阶偏导数近似地可写为

$$f_x(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(x)} f_{kj}, \quad f_{xx}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^N B_{ik}^{(x)} f_{kj}, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

而在平行于 y 轴的任一直线 $x = x_i$ 上, 函数 $f(x, y)$ 在网格点 (x_i, y_j) 处对于 y 的一阶和二阶偏导数近似地可写为

$$f_y(x_i, y_j) = \sum_{l=1}^M A_{jl}^{(y)} f_{il}, \quad f_{yy}(x_i, y_j) = \sum_{l=1}^M B_{jl}^{(y)} f_{il}, \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (2)$$

这里 $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ 而 $A_{ik}^{(x)}$ 、 $B_{ik}^{(x)}$ 、 $A_{jl}^{(y)}$ 、 $B_{jl}^{(y)}$ 是加权系数。

为了确定这些加权系数, 我们要选取一些测试函数, 要求对这些测试函数 (1) 和 (2) 式能精确成立。这种测试函数最方便的选择是多项式。当节点个数取定时, 影响微分求积法精度的另一个最重要因素是网格节点的选取。在本文中我们使用如下的均匀和非均匀两类不同的网格:

网格 I: 均匀网格

$$x_i = \frac{(i-1)a}{(N-1)}, \quad y_j = \frac{(j-1)b}{(M-1)}, \quad (3)$$

网格 II: 非均匀网格

$$x_i = \frac{1 - \cos[(i-1)\pi/(N-1)]}{2} a, \quad y_j = \frac{1 - \cos[(j-1)\pi/(M-1)]}{2} b, \quad (4)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$ 。一些理论分析和数值试验都表明: 非均匀网格的计算效果明显好于均匀网格。本文以下的计算中所使用的加权系数均由 [4] 中给出的公式求得。

2 微分求积法与迎风差分法混合求解二维

不可压缩 Navier-Stokes 方程的数值格式

涡度_流函数形式的二维不可压缩 Navier-Stokes 方程可写为

$$\omega + u\omega_x + v\omega_y = (\omega_{xx} + \omega_{yy})/Re, \quad (5)$$

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = -\omega, \quad (6)$$

其中 ω 是涡度, Ψ 是流函数, $u = \Psi_y$ 和 $v = -\Psi_x$ 是速度分量, Re 是雷诺数。

方程 (5) 是时间相关的, 但对定常解有 $\omega_t = 0$ 。若流动问题的边界条件是时间无关的, 则

定常解可以从方程(5)和(6)的解当 $t \rightarrow \infty$ 时求得, 这种方法称为伪时间相关算法. 本文采用这种伪时间相关算法求方程(5)和(6)的定常解.

现在考虑对方程(5)和(6)的离散. 设网格点为 (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$. 时间步长为 Δt . 记 $\omega_{ij}^{(s)}$ 表示涡度 $\omega(t, x, y)$ 当 $t = s \Delta t, x = x_i, y = y_j$ 时的值. 为方便起见, 引用下述记号, 令

$$L_{dq}^x \omega_{ij}^{(s)} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(x)} \omega_{kj}^{(s)}, \quad L_{dq}^{xx} \omega_{ij}^{(s)} = \sum_{k=1}^N B_{ik}^{(x)} \omega_{ij}^{(s)} \quad (7)$$

分别表示 ω_x 和 ω_{xx} 在网格点 (x_i, y_j) 的 DQ 离散;

$$L_{dq}^y \omega_{ij}^{(s)} = \sum_{l=1}^M A_{jl}^{(y)} \omega_{il}^{(s)}, \quad L_{dq}^{yy} \omega_{ij}^{(s)} = \sum_{l=1}^M B_{jl}^{(y)} \omega_{il}^{(s)} \quad (8)$$

分别表示 ω_y 和 ω_{yy} 在网格点 (x_i, y_j) 的 DQ 离散; 令

$$L_u^x \omega_{ij}^{(s)} = \frac{u_{ij}^{(s-1)} + |u_{ij}^{(s-1)}|}{2} \frac{\omega_{ij}^{(s)} - \omega_{i-1,j}^{(s)}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{u_{ij}^{(s-1)} - |u_{ij}^{(s-1)}|}{2} \frac{\omega_{i+1,j}^{(s)} - \omega_{i,j}^{(s)}}{x_{i+1} - x_i}, \quad (9)$$

$$L_v^y \omega_{ij}^{(s)} = \frac{v_{ij}^{(s-1)} + |v_{ij}^{(s-1)}|}{2} \frac{\omega_{ij}^{(s)} - \omega_{i,j-1}^{(s)}}{y_j - y_{j-1}} + \frac{v_{ij}^{(s-1)} - |v_{ij}^{(s-1)}|}{2} \frac{\omega_{i,j+1}^{(s)} - \omega_{i,j}^{(s)}}{y_{j+1} - y_j} \quad (10)$$

分别表示 $u\omega_x$ 和 $v\omega_y$ 在网格点 (x_i, y_j) 的迎风差分离散; 令

$$L_{dq}^{xx} \Psi_{ij}^{(s)} = \sum_{k=1}^N B_{ik}^{(x)} \Psi_{kj}^{(s)}, \quad L_{dq}^{yy} \Psi_{ij}^{(s)} = \sum_{l=1}^M B_{jl}^{(y)} \Psi_{il}^{(s)} \quad (11)$$

分别表示 Ψ_{xx} 和 Ψ_{yy} 在网格点 (x_i, y_j) 的 DQ 离散.

现在, 对方程(5)和(6)给出一种使用 DQ 离散的数值格式.

格式 I:

$$\frac{\omega_{ij}^{(s)} - \omega_{ij}^{(s-1)}}{\Delta t} + u_{ij}^{(s-1)} L_{dq}^x \omega_{ij}^{(s)} + v_{ij}^{(s-1)} L_{dq}^y \omega_{ij}^{(s)} = \frac{1}{Re} [L_{dq}^{xx} \omega_{ij}^{(s)} + L_{dq}^{yy} \omega_{ij}^{(s)}], \quad (12)$$

$$L_{dq}^{xx} \Psi_{ij}^{(s)} + L_{dq}^{yy} \Psi_{ij}^{(s)} = -\omega_{ij}^{(s)}, \quad (13)$$

其中 $i = 2, 3, \dots, N-1; j = 2, 3, \dots, M-1$.

格式 I 是一个隐格式, 时间导数项采用简单的向后差分离散, 空间导数项采用 DQ 离散, 我们将得到两组线性方程组. 对(12), 由于边界上 $\omega^{(s)}$ 的值是未知的, 可先使用 $\omega^{(s-1)}$ 的边界值近似代替, 解此线性方程组可得到内点处的 $\omega^{(s)}$ 值. 接着, 可由(13)解得内点处的 $\Psi^{(s)}$, 而边界点处的 $\Psi^{(s)}$ 通常是已知的. 最后, 速度分量可由 $u^{(s)} = \Psi_y^{(s)}$ 和 $v^{(s)} = -\Psi_x^{(s)}$ 计算. 涡度边界值可由定义 $\omega^{(s)} = v_x^{(s)} - u_y^{(s)}$ 计算.

若引入 $(N-2) \times (M-2)$ 维向量

$$\mathbf{z}_1^{(s)} = (\omega_{22}^{(s)}, \omega_{32}^{(s)}, \dots, \omega_{N-1,2}^{(s)}, \dots, \omega_{2,M-1}^{(s)}, \omega_{3,M-1}^{(s)}, \dots, \omega_{N-1,M-1}^{(s)})^T,$$

$$\mathbf{z}_2^{(s)} = (\Psi_{22}^{(s)}, \Psi_{32}^{(s)}, \dots, \Psi_{N-1,2}^{(s)}, \dots, \Psi_{2,M-1}^{(s)}, \Psi_{3,M-1}^{(s)}, \dots, \Psi_{N-1,M-1}^{(s)})^T,$$

可将方程组(12)和(13)改写为如下的矩阵形式:

$$[I + \Delta t \mathbf{P}^{(s-1)}] \mathbf{z}_1^{(s)} = \mathbf{z}_1^{(s-1)} - \Delta t \mathbf{h}^{(s-1)}, \quad (12)'$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{z}_2^{(s)} = -\mathbf{z}_1^{(s)} - \mathbf{g}^{(s)}, \quad (13)'$$

这里 I 是 $(N-2) \times (M-2)$ 阶单位矩阵; $\mathbf{P}^{(s-1)} = (p_{rc}^{(s-1)})$ 和 $\mathbf{Q} = (q_{rc})$ 是 $(N-2) \times (M-2)$ 阶方阵,

$$p_{rc}^{(s-1)} = \delta_{jl} [u_{ij}^{(s-1)} A_{ik}^{(x)} - B_{ik}^{(x)} / Re] + \delta_{ik} [v_{ij}^{(s-1)} A_{jl}^{(y)} - B_{jl}^{(y)} / Re],$$

$$q_{rc} = \delta_{ji} B_{ik}^{(x)} + \delta_{ik} B_{jl}^{(y)};$$

$\mathbf{h}^{(s-1)} = (h_r^{(s-1)})$ 和 $\mathbf{g}^{(s)} = (g_r^{(s)})$ 是 $(N-2) \times (M-2)$ 维向量,

$$\begin{aligned} h_r^{(s-1)} &= [u_{ij}^{(s-1)} A_{i1}^{(x)} - B_{i1}^{(x)}/Re] \omega_{ij}^{(s-1)} + [u_{ij}^{(s-1)} A_{iN}^{(x)} - B_{iN}^{(x)}/Re] \omega_{Nj}^{(s-1)} + \\ &\quad [v_{ij}^{(s-1)} A_{j1}^{(y)} - B_{j1}^{(y)}/Re] \omega_{i1}^{(s-1)} + [v_{ij}^{(s-1)} A_{jM}^{(y)} - B_{jM}^{(y)}/Re] \omega_{iM}^{(s-1)}, \\ g_r^{(s)} &= B_{i1}^{(x)} \Psi_{ij}^{(s)} + B_{iN}^{(x)} \Psi_{Nj}^{(s)} + B_{j1}^{(y)} \Psi_{i1}^{(s)} + B_{jM}^{(y)} \Psi_{iM}^{(s)}; \end{aligned}$$

下标 r, c 与 i, j, k, l 之间的关系如下

$$\begin{aligned} r &= (j-2) \times (N-2) + i - 1, \quad c = (l-2) \times (N-2) + k - 1, \\ i, k &= 2, 3, \dots, N-1; j, l = 2, 3, \dots, M-1, \end{aligned}$$

而 δ_{ik}, δ_{jl} 是克罗内克符号。

实际计算时,可先猜测一组初值 $\omega^{(0)}, \Psi^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}$, 按上述方法逐次求出 $\omega^{(s)}, \Psi^{(s)}, u^{(s)}, v^{(s)}$, 直到满足 $\max |\omega^{(s)} - \omega^{(s-1)}| \leq \varepsilon$ 时停止计算, 这里 ε 是预先设定的精度。

数值试验表明(见第3节), 格式 I 对低雷诺数的流动用很少的网格点即可获得令人满意的数值结果, 但当雷诺数较高时将导致数值解不收敛, 其原因是对高雷诺数流动 Navier-Stokes 方程中的对流项将起到很重要的作用, 而引入迎风机制可以较好地处理这一问题。为此, 本文对方程(5)和(6)给出一种微分求积法与迎风差分法混合使用的预估_校正格式。

格式 II:

预估:

$$\frac{\omega_{ij}^* - \omega_{ij}^{(s-1)}}{\Delta t} + L_u^x \omega_{ij}^* + L_v^y \omega_{ij}^* = \frac{1}{Re} [L_{dq}^{xx} \omega_{ij}^* + L_{dq}^{yy} \omega_{ij}^*], \quad (14)$$

$$L_{dq}^{xx} \Psi_{ij}^* + L_{dq}^{yy} \Psi_{ij}^* = -\omega_{ij}^*; \quad (15)$$

校正:

$$\frac{\omega_{ij}^{(s)} - \omega_{ij}^*}{\Delta t} + u_{ij}^* L_{dq}^x \omega_{ij}^{(s)} + v_{ij}^* L_{dq}^y \omega_{ij}^{(s)} = \frac{1}{Re} [L_{dq}^{xx} \omega_{ij}^{(s)} + L_{dq}^{yy} \omega_{ij}^{(s)}], \quad (16)$$

$$L_{dq}^{xx} \Psi_{ij}^{(s)} + L_{dq}^{yy} \Psi_{ij}^{(s)} = -\omega_{ij}^{(s)}; \quad (17)$$

其中 $i = 2, 3, \dots, N-1; j = 2, 3, \dots, M-1$ 。

在格式 II 中, 扩散项总是使用 DQ 离散, 预估时对流项使用迎风差分离散, 校正时对流项使用 DQ 离散, 既保证了雷诺数较高时能够获得收敛的数值解, 又保证了用较少的网格点能够获得精度较高的数值解。

类似于 $z_1^{(s)}$ 和 $z_2^{(s)}$, 引入 $(N-2) \times (M-2)$ 维向量 z_1^* 和 z_2^* , 可将方程(14)、(15)、(16)和(17)改写为如下的矩阵形式:

$$[I + \Delta t P^{(s-1)}] z_1^* = z_1^{(s-1)} - \Delta t \mathbf{h}^{(s-1)}, \quad (14)'$$

$$Q z_2^* = -z_1^* - \mathbf{g}^*, \quad (15)'$$

$$[I + \Delta t P^*] z_1^{(s)} = z_1^* - \Delta t \mathbf{h}^*, \quad (16)'$$

$$Q z_2^{(s)} = -z_1^{(s)} - \mathbf{g}^{(s)}, \quad (17)'$$

这里 $P^{(s-1)} = (p_{rc}^{(s-1)})$, $P^* = (p_{rc}^*)$ 和 $Q = (q_{rc})$ 是 $(N-2) \times (M-2)$ 阶方阵,

$$p_{rc}^{(s-1)} = \delta_{jl} [U_{ijk}^{(s-1)} - B_k^{(x)}/Re] + \delta_{ik} [V_{jil}^{(s-1)} - B_{jl}^{(y)}/Re],$$

$$p_{rc}^* = \delta_{jl} [u_{ij}^* A_{ik}^{(x)} - B_{ik}^{(x)}/Re] + \delta_{ik} [v_{ij}^* A_{jl}^{(y)} - B_{jl}^{(y)}/Re],$$

$$q_{rc} = \delta_{jl} B_{ik}^{(x)} + \delta_{ik} B_{jl}^{(y)};$$

$\mathbf{h}^{(s-1)} = (h_r^{(s-1)})$, $\mathbf{h}^* = (h_r^*)$, $\mathbf{g}^* = (g_r^*)$ 和 $\mathbf{g}^{(s)} = (g_r^{(s)})$ 为 $(N-2) \times (M-2)$ 维向量,

$$h_r^{(s-1)} = [U_{ij1}^{(s-1)} - B_{i1}^{(x)}/Re] \omega_{ij}^{(s-1)} + [U_{ijN}^{(s-1)} - B_{iN}^{(x)}/Re] \omega_{Nj}^{(s-1)} +$$

$$\begin{aligned}
& [V_{ij1}^{(s-1)} - B_{j1}^{(y)}/Re] \omega_{i1}^{(s-1)} + [V_{ijM}^{(s-1)} - B_{jM}^{(y)}/Re] \omega_{iM}^{(s-1)}, \\
h_r^* &= [u_{ij}^* A_{i1}^{(x)} - B_{i1}^{(x)}/Re] \omega_{ij}^{(s-1)} + [u_{ij}^* A_{iN}^{(x)} - B_{iN}^{(x)}/Re] \omega_{ij}^{(s-1)} + \\
& [v_{ij}^* A_{j1}^{(x)} - B_{j1}^{(y)}/Re] \omega_{i1}^{(s-1)} + [v_{ij}^* A_{jM}^{(x)} - B_{jM}^{(y)}/Re] \omega_{iM}^{(s-1)}, \\
g_r^* &= B_{i1}^{(x)} \Psi_{ij}^* + B_{iN}^{(x)} \Psi_{iN}^* + B_{j1}^{(y)} \Psi_{i1}^* + B_{jM}^{(y)} \Psi_{iM}^*, \\
g_r^{(s)} &= B_{i1}^{(x)} \Psi_{ij}^{(s)} + B_{iN}^{(x)} \Psi_{iN}^{(s)} + B_{j1}^{(y)} \Psi_{i1}^{(s)} + B_{jM}^{(y)} \Psi_{iM}^{(s)};
\end{aligned}$$

下标 r, c 与 i, j, k, l 之间的关系为

$$\begin{aligned}
r &= (j-2) \times (N-2) + i-1, \quad c = (l-2) \times (N-2) + k-1, \\
& \quad i, k = 2, 3, \dots, N-1; j, l = 2, 3, \dots, M-1;
\end{aligned}$$

并且当 i, j 取定时, 记号 $U_{ij}^{(s-1)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 和 $V_{ij}^{(s-1)}$ ($l = 1, 2, \dots, M$) 定义为

$$\begin{aligned}
U_{ij(i-1)}^{(s-1)} &= -\frac{u_{ij}^{(s-1)} + |u_{ij}^{(s-1)}|}{2(x_i - x_{i-1})}, \quad U_{ij(i+1)}^{(s-1)} = -\frac{u_{ij}^{(s-1)} - |u_{ij}^{(s-1)}|}{2(x_i - x_{i+1})}, \\
U_{ij}^{(s-1)} &= -[U_{ij(i-1)}^{(s-1)} + U_{ij(i+1)}^{(s-1)}], \\
V_{ij(j-1)}^{(s-1)} &= -\frac{v_{ij}^{(s-1)} + |v_{ij}^{(s-1)}|}{2(y_j - y_{j-1})}, \quad V_{ij(j+1)}^{(s-1)} = -\frac{v_{ij}^{(s-1)} + |v_{ij}^{(s-1)}|}{2(y_j - y_{j+1})}, \\
V_{ij}^{(s-1)} &= -[V_{ij(j-1)}^{(s-1)} + V_{ij(j+1)}^{(s-1)}], \\
U_{ij}^{(s-1)} &= V_{ij}^{(s-1)} = 0, \quad \text{对其余 } k, l.
\end{aligned}$$

如果从 (14)' 和 (16)' 中形式地消去 ω^* , 可得 $z_1^{(s)}$ 与 $z_1^{(s-1)}$ 之间的如下矩阵关系

$$z_1^{(s)} = [I + \Delta t P^*]^{-1} + \left\{ [I + \Delta t P^{(s-1)}]^{-1} (z_1^{(s-1)} - \Delta t h^{(s-1)}) - \Delta t h^* \right\}. \quad (18)$$

利用格式 II 求方程 (5) 和 (6) 数值解的计算过程如下:

- (i) 对 $\omega^{(0)}$ 、 $\Psi^{(0)}$ 、 $u^{(0)}$ 、 $v^{(0)}$ 置初值及边值, 并令 $s = 1$;
- (ii) 由 (14) 和 (15) 计算内点处的 ω^* 、 Ψ^* ;
- (iii) 计算内点处的 u^* 、 v^* , 计算边界上的 ω^* ;
- (iv) 由 (16) 和 (17) 计算内点处的 $\omega^{(s)}$ 、 $\Psi^{(s)}$;
- (v) 计算内点处的 $u^{(s)}$ 、 $v^{(s)}$, 计算边界上的 $\omega^{(s)}$;
- (vi) 对给定精度的 ε 若 $\max | \omega^{(s)} - \omega^{(s-1)} | \leq \varepsilon$ 则停止计算, 否则 s 增 1 回到步骤 (ii)。

3 算例和数值结果

作为数值例子, 对驱动方腔内不可压缩粘性流体流动做了计算。这个问题已被广泛研究过(如[7~10]), 其控制方程是(5)和(6), 对 L1 驱动方腔, 其边界条件是

$$\begin{aligned}
\Psi &= 0, & \text{当 } x=0, y=0, x=1, y=1, \\
u &= v = 0, & \text{当 } x=0, x=1, y=0, \\
u &= 1, v = 0, & \text{当 } y=1.
\end{aligned}$$

对 L2 长方腔可给出类似的边界条件。计算时给定 $\varepsilon = 10^{-5}$ 。速度分量可由下式计算

$$u_{ij} = \sum_{l=1}^M A_{jl}^{(y)} \Psi_{il}, \quad v_{ij} = -\sum_{k=1}^N A_{ik}^{(x)} \Psi_{kj}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; j = 2, 3, \dots, M-1.$$

涡度边界值的计算以 $x=0$ 边界为例有 $\omega = v_x$, 采用 DQ 离散可得

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(x)} v_{ij}, \quad j = 2, 3, \dots, M-1.$$

对其余边界可得到类似的公式。

首先,我们采用格式 I 计算 1:1 驱动方腔流动,对均匀网格 I 与非均匀网格 II 的计算效果作了比较。数值试验表明,当雷诺数增大时,使用均匀网格 I 的数值解不收敛但使用非均匀网格 II 的数值解收敛,计算结果见表 1,其中 n_{ie} 表示达到定常解所需的推进步数, N. C. 意为不收敛。由于用非均匀网格 II 所获得的数值解远比用均匀网格 I 所获得的数值解要精确,因此以后的计算均使用非均匀网格 II。

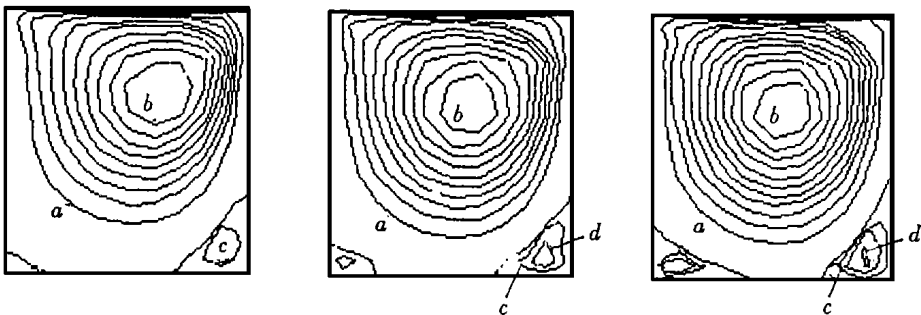
表 1 均匀网格 I 与非均匀网格 II 的比较

Re	9×9 网格				11×11 网格				13×13 网格			
	网格 I		网格 II		网格 I		网格 II		网格 I		网格 II	
	Δt	n_{ie}	Δt	n_{ie}	Δt	n_{ie}	Δt	n_{ie}	Δt	n_{ie}	Δt	n_{ie}
50	0.5	30	0.15	71	0.5	38	0.05	87	N. C.	0.03	281	
100	0.4	56	0.25	91	N. C.		0.08	96	N. C.	0.05	338	
200	N. C.		0.3	98	N. C.		0.1	108	N. C.	0.1	305	

对 1:1 驱动方腔流动采用非均匀网格 II,当雷诺数 $Re \geq 300$ 时,由格式 I 计算的数值解产生振荡甚至不收敛,但由格式 II 计算却能够得到较好的数值结果。表 2 列出了采用 15×15 非均匀网格 II 由格式 II 计算 1:1 驱动方腔流动的部分数值结果,并与 Chia[7] 用 129×129 网格的计算结果进行了比较。表中 (x, y) 表示涡心的位置, Ψ_{vc} 表示涡心处的流函数值,流线见图 1。可以看到,本文使用较少的网格点得到了较好的数值结果。最后,图 2 给出了 1:2 驱动方腔流动采用 13×19 非均匀网格 II 由格式 II 计算得到的部分流线。

表 2 1:1 驱动方腔流动的部分数值结果

Re	Δt	n_{ie}	Ψ_{vc}	(x, y)	[7] 的 Ψ_{vc}	[7] 的 (x, y)
400	0.08	203	-0.102	(0.637, 0.673)	-0.114	(0.554, 0.605)
1000	0.09	226	-0.112	(0.574, 0.651)	-0.118	(0.531, 0.562)
1500	0.08	281	-0.123	(0.534, 0.629)	—	—



Re = 400
 $a \sim b: -0.01 \sim -0.09$
 $c: 0.0002$

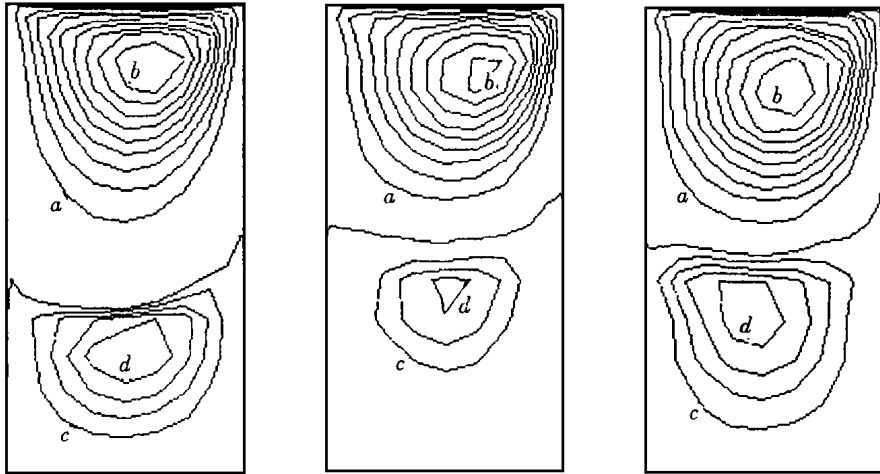
Re = 1000
 $a \sim b: -0.01 \sim -0.1$
 $c \sim d: 0.0002 \sim 0.0004$

Re = 1500
 $a \sim b: -0.01 \sim -0.11$
 $c \sim d: 0.0001 \sim 0.0005$

图 1 1:1 驱动方腔流线

4 结 语

微分求积法能够以较少的网格点求得微分方程的高精度数值解,用这种方法求解许多工程和物理问题均获得成功。当求解不可压缩粘性流体流动时,单纯使用微分求积法只能对低雷诺数流动获得收敛的数值解。为此本文提出了一种微分求积法与迎风差分法混合求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程的预估_校正数值格式,对驱动方腔内的流动用较少的网格点获得了较高雷诺数流动的数值解,数值试验也表明非均匀网格的计算效果优于均匀网格。



$Re = 100$

$a \sim b: -0.01 \sim -0.09$
 $c \sim d: 0.0001 \sim 0.0004$

$Re = 400$

$a \sim b: -0.01 \sim -0.09$
 $c \sim d: 0.001 \sim 0.002$

$Re = 800$

$a \sim b: -0.01 \sim -0.09$
 $c \sim d: 0.001 \sim 0.004$

图2 驱动方腔流线

[参 考 文 献]

- [1] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long term integration[J]. J Math Anal Appl, 1971, 34(2): 235~ 238.
- [2] Bellman R, Kashef B G, Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations[J]. J Comput Phys, 1972, 10(1): 40~ 52.
- [3] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review [J]. Appl Mech Rev, 1996, 49(1): 1~ 27.
- [4] Shu C, Richards B E. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations[J]. Int J Numer Methods Fluids, 1992, 15(7): 791~ 798.
- [5] Chu C, Richards B F. Parallel simulation of incompressible viscous flows by generalized differential quadrature[J]. Comput Syst Eng, 1992, 3(1_4): 271~ 281.
- [6] Striz A G, Chen W L. Application of the differential quadrature method to the driven cavity problem [J]. Int J Non-Linear Mech, 1994, 29(5): 665~ 670.
- [7] Chia U, Chia K N, Shin C T. High- Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. J Comput Phys, 1982, 48(2): 387~ 411.
- [8] Kawaguti M. Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity[J]. J Phys Soc Japan, 1961, 16(8): 2307~ 2315.

- [9] Burggraf O R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flow [J]. J Fluid Mech, 1966, **24**(1): 113~ 151.
- [10] Prosnak W J, Kosma Z J. On a new method for numerical solution of the Navier-Stokes equations [J]. Acta Mechanica, 1991, **89**(1): 45~ 63.

A Mixture Differential Quadrature Method for Solving Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations

Sun Jian'an¹, Zhu Zhengyou^{2,3}

(1. Department of Physics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, P R China ;

2 Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China ;

3 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: Differential quadrature method (DQM) is able to obtain highly accurate numerical solutions of differential equations just using a few grid points. But using purely differential quadrature method, good numerical solutions of two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations can be obtained only for low Reynolds number flow and numerical solutions will not be convergent for high Reynolds number flow. For this reason, in this paper a combinative predicting-correcting numerical scheme for solving two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations is presented by mixing upwind difference method into differential quadrature one. Using this scheme and pseudo-time-dependent algorithm, numerical solutions of high Reynolds number flow are obtained with only a few grid points. For example, F1 and F2 driven cavity flows are calculated and good numerical solutions are obtained.

Key words: numerical method; differential quadrature method; Navier-Stokes equations