应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 12_1215_09

m_增生算子方程解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近*

张石生

(四川大学 数学系, 成都 610064)

摘要: 研究了 Banach 空间中具 m_增生算子的方程解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近问题• 研究结果改进和发展了一些文献中的最新成果•

关 键 词: m_增生算子; Mann 迭代序列; Ishikawa 迭代序列
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引论及预备知识

本文设 X 是一实 Banach 空间, X^* 为 X 的对偶空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 X 与 X^* 间的配对, $J: X \to 2^{X^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{ f \in X^*: \langle x, f\rangle = \|x\| \cdot \|f\|,\ \|f\| = \|x\| \right\}, \qquad x \in X \cdot$$

一实 Banach 空间称为一致光滑的, 如果其光滑模 $\rho_X(\tau)$:

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1: x, y \in X,\ \|x\| = 1,\ \|y\| = \tau \right\}, \quad \tau > 0$$

满足条件: $\rho_X(\tau)/\tau \to 0$(当 $\tau \to 0$ 时), 众所周知[1, 2], 如果 X 是一致光滑(凸) 的, 当而且仅当 X^* 是一致凸(光滑) 的; 如果 X 是一致光滑的, 则正规对偶映象 J 是单值的而且在 X 的任一有界子集上是一致连续的•

以后用 $D(T)$, $R(T)$ 表示算子 T 的定义域和值域•

算子 $T: D(T) \subset X \to X$ 称为增生的, 如果对任意的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant 0 \cdot$$

一增生算子称为 m_增生的, 如果对任一 $\lambda > 0$(等价于对某一 $\lambda > 0$) 有 $R(T + \lambda I) = X$, 其中 I 是恒等算子•

增生算子的概念首先由 Browder[3] 和 Kato[4] 独立地引入, 在[3] 中 Browder 证明, 如果 X 是一 Banach 空间, T 是一局部 Lispschitz 的增生映象而且 $D(T) = X$ 则 T 是一 m_增生映象, 从而对任给的 $f \in X$, 方程 $x + Tx = f$ 在 X 中有解• 后来 Martin[5] 把上述结果作了推广, 他证明:

* 收稿日期: 1998_03_27; 修订日期: 1999_05_31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971058)
作者简介: 张石生(1934~), 男, 教授, 已发表论文 270 余篇, 获省部级奖 6 项.

连续增生算子如果 $D(T)=X$, 则 T 也是 $m_$增生的•

近年来许多作者证明了 Mann 迭代序列及 Ishikawa 迭代序列[6, 7]强收敛于方程 $x+Tx=f$ 的解, 其中 T 是 Hilbert 空间或 L_p 空间上的 Lipschitz 增生映象[8, 9] 或 T 是一致光滑 Banach 空间上的连续的增生映象[10, 11], 或 T 是 $p_$一致光滑 Banach 空间上的 Lipschitz 增生映象[12, 13, 14], 或 T 是一致光滑 Banach 空间或 L_p 空间上的强增生或强伪压缩映象[15~18]• 所有上述结果推广了 Chidume[8, 10] 中的相应结果•

最近在[19]中, Zhu 在不同的条件下证明了 Mann 型迭代序列强收敛于方程 $x+Tx=f$ 的唯一解, 其中 $T: D(T)\subset X\to X$ 是一 Lipschitz 的 $m_$增生算子, 而 $D(T)$ 是一致光滑 Banach 空间中的开子集• 最近 Chidume, Osilike[20], 把上述结果推广到 Ishikawa 迭代序列的情形, 其中 T 是 Lipschitz 的 $m_$增生映象, 而 $D(T)$ 是一致凸空间或 $p_$一致光滑 Banach 空间中的闭子集•

最近在作者的文章[21], Liu 的[22] 及其他作者的文章[10, 21, 23~26] 中还研究了 Banach 空间中, 非线性强增生映象及单调型映象的具误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列的收敛性问题•

另一方面, 与增生算子紧密相关的是散逸算子• 一算子 $T: D(T)\subset X\to X$ 称为散逸的[27], 如果 $-T$ 是增生的, T 称为 $m_$散逸的, 如果 T 是散逸的, 而且 $R(I-\lambda T)=X$, $\forall \lambda>0$• 在[28] 中 Browder 证明: 如果 T 是局部 Lipschitz 散逸算子且 $D(T)=X$, 则 T 是 $m_$散逸的• 近年来, 在引文[8~10, 20, 13] 中讨论了 Banach 空间中具散逸算子的方程 $x-\lambda Tx=f$ 的某些问题•

本文的目的是证明: 如果 X 是一致的光滑 Banach 空间, $T: D(T)\subset X\to X$ 是具闭的定义域 $D(T)$ 的 $m_$增生算子且 $R(T)$ 是有界的, 则具误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列强收敛于方程 $x+Tx=f$ 的唯一解• 本文结果改进和推广了 Chidume 等[20], Ding[25], Zhu[19], Zeng[26, 定理1, 2] 及其他人的结果•

为了给出本文的主要结果, 我们首先给出下面的引理(见 Chang[15]):

引理 1.1 设 X 是一实 Banach 空间, $J: X\to 2^{X^*}$ 是正规对偶映象, 则对任给的 $x, y\in X$

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y, j(x+y)\rangle,\qquad \forall j(x+y)\in J(x+y)•$$

引理 1.2[22] 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 是三个非负实数序列满足条件:

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n+c_n,\qquad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

其中 $0\leqslant t_n<1$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, $b_n=o(t_n)$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0•$$

引理 1.3[19] 设 X 是一 Banach 空间, $T: D(T)\subset X\to X$ 是一 $m_$增生算子, 则对任给的 $f\in X$, 方程 $x+Tx=f$ 在 $D(T)$ 中有唯一解•

2 主要结果

现给出本文的主要结果•

定理 2.1 设 X 是一致光滑的实 Banach 空间, $T: D(T)\subset X\to X$ 是一 $m_$增生算子, $D(T)$ 是闭的且 $R(T)$ 是有界的• 设 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 X 中的序列, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, 满足条件:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, $\|v_n\|\to 0\ (n\to\infty)$;

(ii) $\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty,\ \alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$.

对任给的$f \in X$, 定义$Sx = f - Tx,\ x \in D(T)$. 如果存在$x_0 \in D(T)$使得由下式定义的序列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

包含于$D(T)$中, 则由(1)定义的具误差的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x + Tx = f$的唯一解x^*.

证 因$T: D(T) \subset X \to X$是m_增生的, 由引理1.3, 方程$x + Tx = f$有唯一解$x^* \in D(T)$. 因$Sx^* = f - Tx^* = x^*$, 故x^*是S的不动点. 又因X是一致光滑的, 故正规对偶映象J是单值的, 从而有

$$\begin{aligned} &\langle Sx - Sy, J(x-y)\rangle = \langle f - Tx - (f - Ty), J(x-y)\rangle = \\ &\quad -\langle Tx - Ty, J(x-y)\rangle \leqslant 0, \qquad \forall x, y \in D(T). \end{aligned} \tag{2}$$

因S的值域$R(S)$是有界的, 令

$$d = \sup\{\|Sx - x^*\| : x \in D(T)\} + \|x_1 - x^*\|, \tag{3}$$

$$M = d + \sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| + 1. \tag{4}$$

现用归纳法证明

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant d + \sum_{j=1}^{n}\|u_j\| \leqslant M, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{5}$$

事实上, 当$n = 0$时, 由(3)和(4)知结论成立. 设(5)对$n = k-1$成立, 其中$k \geqslant 1$, 下证(5)对$n = k$也成立, 事实上

$$\begin{aligned} &\|x_{k+1} - x^*\| = \|(1-\alpha_k)(x_k - x^*) + \alpha_k(Sy_k - x^*) + u_k\| \leqslant \\ &\quad (1-\alpha_k)\|x_k - x^*\| + \alpha_k\|Sy_k - x^*\| + \|u_k\| \leqslant \\ &\quad (1-\alpha_k)\left\{d + \sum_{j=1}^{k-1}\|u_j\|\right\} + \alpha_k d + \|u_k\| = \\ &\quad d + \sum_{j=1}^{k}\|u_j\| \leqslant M. \end{aligned}$$

于是由(1)及引理1.1有

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x^*\|^2 = \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Sy_n - x^*) + u_n\|^2 \leqslant \\ &\quad \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Sy_n - x^*)\|^2 + 2\langle u_n, J(x_{n+1} - x^*)\rangle \leqslant \\ &\quad (1-\alpha_n)^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^* - u_n)\rangle + \\ &\quad 2\langle u_n, J(x_{n+1} - x^*)\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

现考察(6)右端第3项:

$$2\langle u_n, J(x_{n+1} - x^*)\rangle \leqslant 2\|u_n\| \cdot \|x_{n+1} - x^*\| \leqslant 2M \cdot \|u_n\|. \tag{7}$$

再考察(6)右端第2项:

$$\begin{aligned} &\langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^* - u_n)\rangle = \langle Sy_n - x^*, J(x_n - x^*)\rangle + \\ &\quad \langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^* - u_n) - J(x_n - x^*)\rangle = d_n + e_n, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$d_n = \langle Sy_n - x^*, J(x_n - x^*)\rangle,$$
$$e_n = \langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^* - u_n) - J(x_n - x^*)\rangle.$$

由(2)~(4),即得

$$\begin{aligned} d_n = & \langle Sy_n - x^*, J(x_n - x^*)\rangle = \\ & \langle Sy_n - x^*, J(y_n - x^*)\rangle - \langle Sy_n - x^*, J(y_n - x^*) - J(x_n - x^*)\rangle \leqslant \\ & -\langle Sy_n - x^*, J(y_n - x^*) - J(x_n - x^*)\rangle \leqslant \\ & \|Sy_n - x^*\| \cdot \|J(y_n - x^*) - J(x_n - x^*)\| \leqslant \\ & d \cdot \|J(y_n - x^*) - J(x_n - x^*)\|. \end{aligned} \tag{9}$$

又因当 $n \to \infty$ 时

$$\begin{aligned} \|y_n - x^* - (x_n - x^*)\| = & \|y_n - x_n\| = \|\beta_n(Sx_n - x_n) + v_n\| \leqslant \\ & \beta_n\{\|Sx_n - x^*\| + \|x_n - x^*\|\} + \|v_n\| \leqslant \\ & 2\beta_n \cdot M + \|v_n\| \to 0. \end{aligned}$$

因 X 是一致光滑的,故正规对偶映象 J 在 X 的任一有界子集上是一致连续的,于是有

$$\|J(y_n - x^*) - J(x_n - x^*)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

现证 $|e_n| \to 0(n \to \infty)$. 事实上,我们有

$$\begin{aligned} |e_n| = & |\langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^* - u_n) - J(x_n - x^*)\rangle| \leqslant \\ & \|Sy_n - x^*\| \cdot \|J(x_{n+1} - x^* - u_n) - J(x_n - x^*)\| \leqslant \\ & d \cdot \|J(x_{n+1} - x^* - u_n) - J(x_n - x^*)\|. \end{aligned}$$

因为当 $n \to \infty$ 时

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^* - u_n - (x_n - x^*)\| = & \|x_{n+1} - x_n - u_n\| = \\ & \alpha_n \|Sy_n - x_n\| \leqslant \alpha_n\{\|Sy_n - x^*\| + \|x_n - x^*\|\} \leqslant \\ & 2\alpha_n M \to 0. \end{aligned}$$

于是由正规对偶映象 J 的一致连续性,可得

$$\|J(x_{n+1} - x^* - u_n) - J(x_n - x^*)\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而 $|e_n| \to 0(n \to \infty)$. 于是由(6)~(8)得知

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant & (1 - \alpha_n)^2 \|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n(d_n + e_n) + 2M \cdot \|u_n\| \leqslant \\ & (1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n(k_n + |e_n|) + 2M \cdot \|u_n\|, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\quad k_n = d \cdot \|J(y_n - x^*) - J(x_n - x^*)\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

令 $\|x_n - x^*\|^2 = a_n$, $\alpha_n = t_n$, $2\alpha_n(k_n + |e_n|) = b_n$, $2M \cdot \|u_n\| = c_n$. 于是(10)化成

$$a_{n+1} \leqslant (1 - t_n)a_n + b_n + c_n.$$

由条件(i)~(iii)易知 $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$, $b_n = o(t_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$. 于是由引理 1.2, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 即 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|^2 = 0$. 故序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x + Tx = f$ 的唯一解x^*. 证毕.

注 定理 2.1 不仅改进和推广了 Ding[25] 中的结果,而且证明方法也较[25]中的简单明晰.

在定理2.1 中取 $v_n = 0$, $\beta_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, 即得

推论 2.2 设 X、T、D(T)与定理2.1中的相同. 设$\{u_n\}$是X 中的序列,$\{\alpha_n\}$是$[0, 1]$ 中的数列,满足

(ⅰ) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$;

(ⅱ) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty,\ \alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$.

对任给的$f\in X$, 定义$Sx=f-Tx,\ x\in D(T)$. 如果存在$x_0\in D(T)$使得由下式定义的序列$\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sx_n+u_n,\qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{11}$$

包含于$D(T)$中, 则由(11)所定义的具误差的Mann迭代序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x+Tx=f$的唯一解.

注　推论2.2改进和推广了Chidume_Osilke[20, 推论1, 定理5], Zhu[19, 定理3], Zeng[26, 定理1及定理2]以及其他一些人的新结果.

定理2.3　设X是一致光滑的Banach空间, $T: X\to X$是一连续的增生映象, 且T的值域$R(T)$是有界的. 设$\{u_n\}$、$\{v_n\}$是X中的二序列, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的二数列满足定理2.1中的条件(ⅰ)～(ⅲ). 对任给的$f\in X$, 定义$Sx=f-Tx,\ x\in X$. 则对任一$x_0\in X$, 由(1)所定义的具误差的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x+Tx=f$的唯一解.

证　由Martin[5]中的一个结果知, 连续的增生映象T如果$D(T)=X$, 则T是m_增生的, 故方程$x+Tx=f$有唯一解$x^*\in X$. 因而定理的结论由定理2.1直接可得.

在定理2.3中取$v_n=0,\ \beta_n=0,\ n=0,1,2,\cdots$, 则由定理2.3可得下面的

推论2.4　设X、T与定理2.3中的相同, 设$\{u_n\}$是X中的序列, $\{\alpha_n\}$是$[0,1]$中的序列, 使得

(ⅰ) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$;

(ⅱ) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty,\ \alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$.

对任给的$f\in X$, 定义$Sx=f-Tx,\ x\in X$, 则对任一$x_0\in X$, 由(11)所定义的具误差的Mann迭代序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x+Tx=f$的唯一解.

注　定理2.3、推论2.4改进和推广了Chidume和Osilike[20, 定理4, 定理6及推论2]及其他人的一些最新的结果.

下面我们就T是m_散逸算子的情形, 研究方程$x-Tx=f$的唯一解的迭代逼近问题.

定理2.5　设X是一实的一致光滑的Banach空间, $T: D(T)\subset X\to X$是一m_散逸算子, 且T的值域$R(T)$有界. 设$\{u_n\}$、$\{v_n\}$是X中的序列, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的序列, 满足定理2.1中的条件(ⅰ)～(ⅲ). 对任给的$f\in X$, 定义$Sx=f+Tx,\ x\in D(T)$. 如果存在$x_0\in D(T)$, 使得由(1)所定义的序列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$包含于$D(T)$, 则由(1)所定义的具误差的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x-Tx=f$的唯一解.

证　因T是m_散逸的且$R(T)$有界, 故$-T$是m_增生的且$R(-T)$也是有界的, 故定理的结论由定理2.1直接可得.

在定理2.5中令$v_n=0,\ \beta_n=0,\ n=0,1,2,\cdots$, 则得下面的结果.

推论2.6　设X、T与定理2.5中的相同, 设$\{u_n\}$是X中的序列, $\{\alpha_n\}$是$[0,1]$中的序列满

足推论2.2中的条件(i)、(ii)• 对任给的$f\in X$，定义$Sx=f+Tx$，$x\in D(T)$• 如果存在$x_0\in D(T)$使得由(11)所定义的序列$\{x_n\}\subset D(T)$，则由(11)所定义的具误差的Mann迭代序列$\{x_n\}$强收敛于方程$x-Tx=f$的唯一解•

最后，我们研究具局部Lipschitz条件的m_增生映象的方程解的Mann迭代逼近问题• 我们有下面的结果•

定理2.7 设X是一实Banach空间，$T: D(T)\subset X\to X$是一满足局部Lipschitz条件的m_增生算子，$L\geqslant 1$是T的局部Lipschitz常数• 设$D(T)$是开的，对给定的$f\in X$，设x^*是方程$x+Tx=f$在$D(T)$中的唯一解，再设$\{\alpha_n\}$是$[0,1]$中的序列满足：

(i) $0\leqslant\alpha_n\leqslant 1/2(1+L)^2$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$•

如果在$D(T)$中存在x^*之一闭凸邻域B及一点$x_0\in B$，使得T在B上是Lipschitz，而且由下式定义的Mann迭代序列$\{x_n\}$：

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Tx_n),\qquad (n=0,1,2,\cdots)\tag{12}$$

包含在B中，则$\{x_n\}$强收敛于方程$x+Tx=f$在$D(T)$中的唯一解x^*，并有下面的误差估计式：

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)\|x_0-x^*\|•$$

证 定义$S: D(T)\subset X\to X$，$Sx=f-Tx$，$x\in D(T)$• 显然x^*是S的不动点，而且S也是具局部Lipschitz常数$L\geqslant 1$的局部Lipschitz算子，且在B上是Lipschitz的• 另外$(-S)$在$D(T)$上是增生的，即对任意的$x,y\in D(T)$，存在$j(x-y)\in J(x-y)$，使得

$$\langle(-S)x-(-S)y, j(x-y)\rangle\geqslant 0,$$

故有

$$\langle Sx-Sy, j(x-y)\rangle\leqslant 0•\tag{13}$$

由(12)及引理1.1即得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sx_n-x^*)\|^2\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sx_n-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\\&\qquad\forall j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)•\end{aligned}\tag{14}$$

因$(-S)$是增生的，故由(13)知存在$j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$使得

$$\langle Sx_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant 0•\tag{15}$$

于是由(14)及(15)可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+\\&2\alpha_n\langle Sx_n-Sx_{n+1}+Sx_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sx_n-Sx_{n+1}, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\|Sx_n-Sx_{n+1}\|•\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2L\alpha_n\|x_n-x_{n+1}\|•\|x_{n+1}-x^*\|•\end{aligned}\tag{16}$$

另一方面，因

$$\begin{aligned}\|x_n-x_{n+1}\|&=\alpha_n\|x_n-Sx_n\|\leqslant\\&\alpha_n\{\|x_n-x^*\|+\|x^*-Sx_n\|\}\leqslant\end{aligned}$$

$$\alpha_n(1+L)\|x_n-x^*\|, \tag{17}$$

于是由(16)和(17)得

$$\|x_{n+1}-x^*\|=\|x_{n+1}-x_n+x_n-x^*\|\leqslant\|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x^*\|\leqslant \left\{\alpha_n(1+L)+1\right\}\|x_n-x^*\|. \tag{18}$$

把(17)和(18)代入(16),并引用条件(i),化简得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\\ &\left\{(1-\alpha_n)^2+L\alpha_n[2\alpha_n^2(1+L)^2+2\alpha_n(1+L)]\right\}\|x_n-x^*\|^2\leqslant\\ &\left\{(1-\alpha_n)^2+L\alpha_n[\alpha_n+2\alpha_n(1+L)]\right\}\|x_n-x^*\|^2=\\ &\left\{(1-\alpha_n)+\alpha_n[-1+\alpha_n(1+3L+2L^2)]\right\}\|x_n-x^*\|^2\leqslant\\ &(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|^2,\qquad (n=0,1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{19}$$

借用不等式$1-x\leqslant e^{-x}$,于是上式可写成

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant e^{-\alpha_n}\|x_n-x^*\|^2\leqslant\cdots\leqslant\\ &\exp\left(-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)\|x_0-x^*\|^2,\qquad (n=0,1,\cdots).\end{aligned}$$

故由条件(ii)知,$\|x_{n+1}-x^*\|\to 0(n\to\infty)$. 又在(20)两端开平方,即得$x_n\to x^*$的误差估计式:

$$\|x_{n+1}-x^*\|=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)\cdot\|x_0-x^*\|.$$

证毕.

[参 考 文 献]

[1] Lindehstrauss J, Tsafriri L. Classical Banach Spaces II[M]. New York/Berlin: Springer_Verlag, 1979.

[2] Xu Z B, Roach G F. Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1991, **157**: 189~210.

[3] Browder F E, Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 875~882.

[4] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan, 1967, **19**: 508~520.

[5] Martin R H, Jr. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces [J]. Proc Amer Math Soc, 1970, **26**: 307~314.

[6] Ishikawa S. Fixed points by a new iterative method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, **44**: 147~150.

[7] Mann W R. Mean value method in iteration[J]. Proc Amer Math Soc, 1953, **4**: 506~510.

[8] Chidume C E. An approximation method for monotone Lipschitzian operators in Hilbert space[J]. J Austral Math Soc, 1986, **41**: 59~63.

[9] Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations of the monotone and dissipative types[J]. Appl Anal, 1989, **33**: 79~86.

[10] Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations of the monotone type in Banach spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 1990, **42**: 21~31.

[11] 邓磊, 丁协平, Lipschitz局部严格伪压缩映象的迭代逼近[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(2): 115~119.

[12] Deng Lei, Ding Xieping. Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo_contractive mappings in

uniformly smooth Banach space[J]. Nonlinear Appl, 1995, **24**: 981~ 987.

[13] Ding Xieping, Deng Lei. Iterative solution of nonlinear equations of the monotone and dissipative types in uniformly smooth Banach spaces[J]. J Sichuan Normal Univ, 1994, **17**(1): 43~ 48.

[14] Tan K K, Xu H K. Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**: 9~ 21.

[15] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**: 149~ 165.

[16] Chidume C E. Iterative approximation of fixed points of Lipschitzian strictly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1987, **99**: 283~ 288.

[17] Chidume C E. An iterative process for nonlinear Lipschitzian strongly accretive mappings in L_p spaces [J]. J Math Anal Appl, 1990, **151**: 453~ 461.

[18] Chidume C E. Approximation of fixed points of strongly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, **120**: 545~ 551.

[19] Zhu L C. Iterative solution of nonlinear equations involving m_accretive operators in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 1994, **188**: 410~ 415.

[20] Chidume C E, Osilike M O. Approximation methods for nonlinear operator equations of the m-accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1995, **189**: 225~ 239.

[21] Chang S S, Tan K K. Iteration processes for approximation fixed points of operators of monotone type[J]. Bull Austral Math Soc, 1998, **57**: 433~ 445.

[22] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**: 114~ 125.

[23] Bruck R E. The iterative solution of the equation $y \in x + Tx$ for a monotone operator T in Hilbert space[J]. Bull Amer Math Soc, 1973, **79**: 1258~ 1262.

[24] Chang S S. Some problems and results in the theory of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1997, **30**(7): 4197~ 4208.

[25] Ding Xieping. Iterative process with errors of nonlinear equations involving m_accretive operators [J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**: 191~ 201.

[26] Zeng Luchuan. Error bounds for approximation solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**: 67~ 80.

[27] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces[M]. Leyden: Noordhoff, 1976.

[28] Browder F E. Nonlinear monotone and accretive operators in Banach spaces[J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1968, **61**: 388~ 392.

[29] Nevanlinna O. Reich S. Strong convergence of contraction semi_groups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces[J]. Israel J Math, 1979, **32**: 44~ 58.

[30] Osilike M O. Approximation methods for nonlinear m_accretive operator equations[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**: 20~ 24.

[31] Reich S. An iterative procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1978, **2**: 85~ 92.

[32] Reich S. Strongly convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, **75**: 287~ 292.

[33] Weng X. Fixed point iteration for local strictly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, **113**: 727~ 731.

[34] 曾六川. Lipschitz 局部强增殖算子的非线性方程的解的迭代构造[J]. 应用数学和力学, 1995, **16** (6): 543~552.

Mann and Ishikawa Iterative Approximation of Solutions for m _Accretive Operator Equations

Zhang Shisheng
(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: The purpose of the paper is to study the Mann and Ishikawa iterative approximation of solutions for m _accretive operator equations in Banach spaces. The results presented in this paper extend and improve some authors' recent results.

Key words: m _accretive operator; Mann iterative sequence; Ishikawa iterative sequence