

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0094_05

多体系统动力学微分/代数方程 约束误差小扰动自我稳定方法

赵维加, 潘振宽, 王艺兵

(青岛大学, 青岛 266071)

(马兴瑞推荐)

摘要: 多体系统动力学微分/代数混合方程组又称为 Euler-Lagrange 方程 其数值积分的困难之一是由违约引起的数值不稳定 基于对约束方程左部的 Taylor 展开, 根据积分步长提出了一种能对约束误差自动修正的小扰动违约稳定方法 该方法大大改善了传统违约修正法的数值性态, 并具有简单、实用、高效的特点 最后对该方法与传统增广方法及其违约修正方法进行了数值比较

关键词: 多体力学; Euler-Lagrange 方程; 违约修正; 数值稳定性

中图分类号: O313 文献标识码: A

引 言

受约束多体系统动力学方程为如下形式的微分/代数方程组, 即 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{cases} M(q, t) \ddot{q} + \dot{q}^T q = F(q, \dot{q}, t), \\ \phi(q, t) = 0, \end{cases} \quad (1a, b)$$

其中, $q \in \mathbb{R}^n$ 是系统广义坐标列阵, $M(q, t)$ 为系统广义质量矩阵, $\phi(q, t) \in \mathbb{R}^m$ 是系统约束函数列阵, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 是 Lagrange 乘子列阵, $F(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统广义外力列阵, J_ϕ 是 关于 q 的 Jacobi 矩阵 据实际问题, 本文做如下假定:

- 1) $M(q, t)$ 对称正定;
- 2) M, ϕ, F 足够光滑;
- 3) J_ϕ 满秩

方程(1)的解还应满足以下初始条件

$$q_0 = q(t_0), \dot{q}_0 = \dot{q}(t_0), \quad (2a, b)$$

及

$$\lambda_0 = \lambda, \dot{\lambda}_0 = \dot{\lambda}, \quad (3a, b)$$

其中, $\lambda = - \lambda^T, \dot{\lambda} = - (J_\phi \dot{q}) \dot{\lambda} - 2 J_\phi \dot{q} - \ddot{\phi}$

收稿日期: 1997_12_21; 修订日期: 1999_10_30

基金项目: 国家自然科学基金(19902006)和山东省自然科学基金(Y97F06152)资助课题

作者简介: 赵维加(1955~), 硕士, 副教授.

潘振宽(1966~), 博士, 教授.

上述方程的求解方法可分为缩并法和增广法^[1] 前者^[2~6]需不断地对 Jacobi 矩阵进行分解以确定用以数值积分的独立坐标, 尽管数值稳定性较好, 但计算效率较低 后者通常可分为直接积分法和约束稳定法^[7] 直接积分方法首先求解由 (1a)、(1b) 联立构成的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} M & \mathbf{1}_q^T \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \end{bmatrix} \quad (4)$$

然后通过对 t 时刻的 q^t, \dot{q}^t 积分得 $q^{t+\Delta t}, \dot{q}^{t+\Delta t}$ 即

$$q^t \xrightarrow{\text{积分}} q^{t+\Delta t}, \quad (5a)$$

$$\dot{q}^t \xrightarrow{\text{积分}} \dot{q}^{t+\Delta t} \quad (5b)$$

即使 t 时刻的 $q^t, \dot{q}^t, \ddot{q}^t$ 精确, 也会引起 $q^{t+\Delta t}, \dot{q}^{t+\Delta t}$ 的误差, 并且不断传播, 使得

$$(q, t) = \dots, \quad (6a)$$

$$(\dot{q}, t) = \dots \quad (6b)$$

即, 不能保证 $(q, t), (\dot{q}, t) = 0$ 满足

约束稳定法是对上述方法的改进 为了保证积分过程中, \ddot{q} 渐近零, 引进常参数 α , 将不稳定的加速度约束方程改写为如下稳定的形式

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \alpha^2 q = 0, \quad (7a)$$

即

$$q = \dots + 2\alpha \dots - \alpha^2 \dots \quad (7b)$$

这样(4)式相应变为

$$\begin{bmatrix} M & \mathbf{1}_q^T \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -2\alpha\dot{q} - \alpha^2 q \end{bmatrix} \quad (8)$$

即企图通过引入约束误差阻尼机制改善其数值稳定性 文献[7]认为, α 通常取值范围在 5~50 之间可得较好的结果, 且当 $\alpha = 1$ 时达到临界阻尼, 数值稳定最快 但大量数值实验表明该方法成功率在 75% 左右, 且 α 的取值完全靠经验 本文以下提出了 α 的一种自动选取方法, 且数值稳定性比通常的 α , 选取方法好得多

1 约束误差小扰动自我稳定方法

设在数值积分过程中引入步长 h ($h > 0$), 且记 $q_i = q(t_0 + ih)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 设精确解 q_i 的近似解为 \tilde{q}_i , 一般 $\tilde{q}_i - q_i = O(h^3)$ 对 \tilde{q}_{i+1} Taylor 展开得

$$\tilde{q}_{i+1} = \tilde{q}_i + h\dot{\tilde{q}}_i + (h^2/2)\ddot{\tilde{q}}_i + O(h^3) \quad (9)$$

若近似解 \tilde{q}_i 满足

$$\ddot{\tilde{q}}_i + (2/h)\dot{\tilde{q}}_i + (2/h^2)\tilde{q}_i = 0 \quad (10)$$

则恒有

$$\tilde{q}_{i+1} - q_{i+1} = O(h^3) \quad (11)$$

即(10)式有对(1b)式误差进行自我修正的能力, 使得数值积分过程具有好的稳定性, 从而提高计算精度 基于这一思想, (1a)、(1b)可转化为下述方程组

$$\begin{cases} M\tilde{q} + \mathbf{1}_q^T \tilde{q} = F, \\ \ddot{\tilde{q}}_i + (2/h)\dot{\tilde{q}}_i + (2/h^2)\tilde{q}_i = 0 \end{cases} \quad (12a, b)$$

定义 1 如果(1a)、(1b)的初始条件(2a)、(2b)满足

$$(\mathbf{q}_0, t_0) = 0,$$

$$(\dot{\mathbf{q}}_0, t_0) = 0,$$

则称该初值为相容初值

定理 1 在初值为相容初值的前提下,方程(1a)、(1b)与(12a)、(12b)同解,且(12b)作为满足(1b)的解的微分方程组是稳定的

证明 记 $(t) = (\mathbf{q}(t), t)$, 则(12b)及初始条件可写为

$$\begin{cases} + (2/h) + (2/h^2) = 0, \\ (t_0) = (t_0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其解为 $(\mathbf{q}(t), t) = 0$, 从而与(1b)同解 又(13)的解为

$$= A \exp[-t/h] \sin(t + \quad) \quad (14)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, (13) 渐近(1b), 故在求解(1b)的意义下是稳定的

这样, (12a)、(12b)可改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ - (2/h) - (2/h^2) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

(15)与(16)形式相同, 故若 \mathbf{M}^{-1} 、 \mathbf{q} 分别取

$$\begin{cases} = 1/h, \\ = \sqrt{2}/h \end{cases} \quad (16a, b)$$

则(15)式转化为(8)式

2 数值算例与分析

如图 1, 为曲柄滑块机构 其中, 曲柄绕固定轴转动, 均匀连杆的质心沿 x 轴滑动 曲柄对转轴的惯性矩为 $J_1 = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 连杆对质心的惯性矩为 $J_2 = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 连杆的质量为 $m_2 = 2.0 \text{ kg}$, 作用于曲柄上的常值转矩为 $T = 2 \text{ N} \cdot \text{m}$ 系统初始条件为: $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_2 = -0.36136$, $x_2 = 2.5779$; $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$

在如图 1 所建立坐标系下系统动力学方程如

(1)式, 其中

$$\mathbf{q} = [x_1, x_2, \varphi_2]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_2 - x_2 \\ \sin \varphi_1 + 2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_1 - 1 - 2 \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 & 0 & 2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [T \ 0 \ 0]^T$$

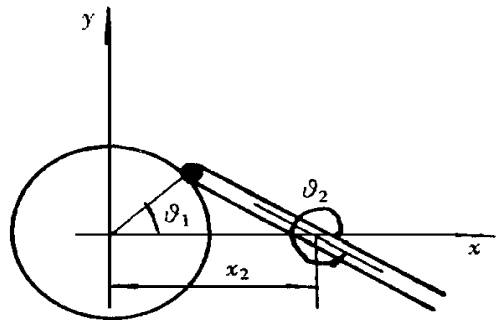


图 1 曲柄滑块机构

取积分步长为 $h = 0.01$ 秒, 用定步长 Runge-Kutta 法对上述方程数值积分 以下对(a)直接积分法($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ 实线)、(b)传统违约稳定法($\varphi_1 = 5$, $\varphi_2 = 10$ 长虚线)、(c)本文方法($\varphi_1 = 100$, $\varphi_2 = 141$ 短虚线)的分析结果进行比较 图 2 为仿真 6 秒时(a)、(b)、(c)方

法位置约束方程违约情形;图3为变量 x_2 随时间变化规律

显然,在计长工作量基本相同的情况下,本文方法的精度比(a)、(b)方法好得多 但在图3中这种差别并不明显,故在图4、5给出了仿真8秒时(b)、(c)方法的相应结果

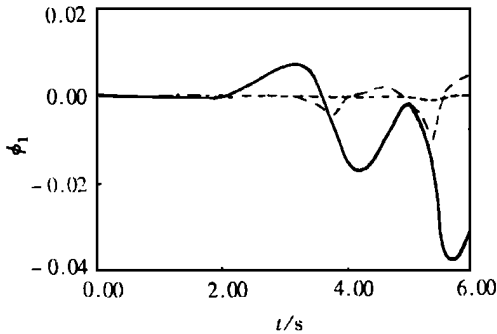


图2 位置约束方程违约

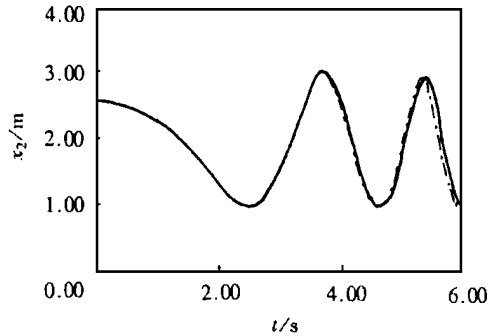


图3 x_2 随时间变化

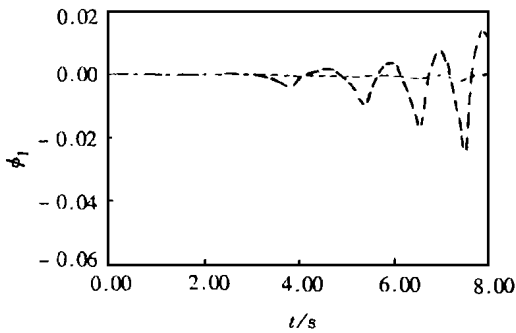


图4 位置约束方程违约

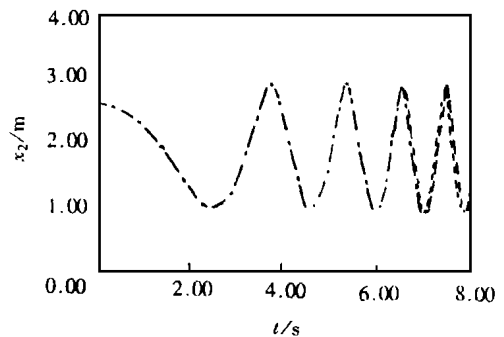


图5 x_2 随时间变化

3 结束语

1) 本文从理论上给出了传统的违约修正法, 参数的自动选择方法, 避免了, 选择的盲目性, 尽管本文, 的取值范围不在其通常范围内, 但所给出的方法数值稳定性却好多 而本文方法与传统方法相比未增加计算工作量

2) 尽管在本文实施中采用定步长显式方法积分, 但不做修改即可用于变步长积分方法, 且数值稳定性更好, 积分效率更高

3) 本文方法极易推广到带非完整约束的微分/代数方程组的数值分析

[参考文献]

- [1] 洪嘉振. 多体系统计算动力学[Z]. 上海: 上海交大科技交流室, 1989.
- [2] Wehage R A, Haug E J. Generalized coordinates partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems[J]. ASME J of Mechanical Design, 1982, **104**(7): 247~ 255.
- [3] Singh R P, Likins P W. Singular value decomposition for constrained dynamic systems[J]. ASME J of Applied Mechanics, 1985, **52**: 943~ 948.
- [4] Kanman J W, Huston R L. Constrained multibody system dynamics An automated approach[J], J of Computers and Structures, 1984, **18**(6): 999~ 1003.

- [5] Kim S S, Vanderploeg M J. QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems[J]. ASME J of Mech Trans and Auto In Design, 1986, **108**: 168~ 183.
- [6] Liang C G, Lance G M. A differential null space method for constrained dynamic analysis[J]. ASME J of Mech Trans and Auto In Design, 1987, **109**: 405~ 411.
- [7] Nikravesh P E. Computer aided Analysis of Mechanical Systems [M]. Englewood Cliffs, N J Prentice Hall, 1987.
- [8] Potra F A, Rheinbolt W C. On the numerical solution of Euler_Lagrange equations[J]. Mechanics of Structures & Machines, 1991, **19**(1): 1~ 18.
- [9] Campbell B S, Leimkuhler B. Differentiation of constraints in differential algebraic equations[J]. Mechanics of Structures & Machines, 1991, **19**(1): 19~ 40.
- [10] Yen J, Haug E J, Tak T O. Numerical methods for constrained equations of motion in mechanical system dynamics[J]. Mechanics of Structures & Machines, 1991, **19**(1): 41~ 76.
- [11] Petzold L R, Potra F A. ODAE methods for the numerical solution of Euler_Lagrange equations[J]. J of Applied Numerical Mathematics, 1992, **10**: 397~ 413.
- [12] 赵维加, 潘振宽, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分代数方程组的一类紧凑算法[J]. 青岛大学学报(自然科学版), 1995, **18**(3): 22~ 28.
- [13] 赵维加, 潘振宽, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分代数方程组的一类缩并算法[J]. 纺织高校基础科学学报, 1995, **18**(3): 234~ 239.
- [14] 赵维加, 潘振宽, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分代数方程组数值积分方法[J]. 力学进展, 1996, **26**(1): 28~ 40.

An Automatic Constraint Violation Stabilization Method for Differential/ Algebraic Equations of Motion Multibody System Dynamics

Zhao Weijia, Pan Zhenkuan, Wang Yibing
(Qingdao University, Qingdao 266071, P R China)

Abstract: A new automatic constraint violation stabilization method for numerical integration of Euler-Lagrange equations of motion in dynamics of multibody systems is presented. The parameters, used in the traditional constraint violation stabilization method are determined according to the integration time step size and Taylor expansion method automatically. The direct integration method, the traditional constraint violation stabilization method and the method presented in this paper are compared finally.

Key words: dynamics of multibody systems; Euler-Lagrange equations; constraint violation stabilization