应用数学和力学, 第 21 卷 第 1 期(2000 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0053_08

单面约束力学系统的 Noether 理论

张 毅[1], 梅凤翔[2]

(1 苏州城建环保学院 基础部, 苏州 215011; 2 北京理工大学 应用力学系, 北京 100081)

(刘曾荣推荐)

摘要: 应用变换群 G_r 的无限小群变换的广义准对称性, 给出了受单面约束的动力学系统的 Noether 理论, 并举例说明结果的应用

关 键 词: 分析力学; 单面约束; 守恒律; 对称性; Noether 定理
中图分类号: O316 文献标识码: A

Noether 定理揭示了力学系统的守恒量与其动力学对称性之间的内在关系 近二十年来, Noether 定理的研究成为力学家, 物理学家的一个热门课题, 并取得一系列重要成果[1~5] 然而, 这些研究都局限于双面约束系统 实际上, 单面约束比双面约束更为普遍, 研究起来也更为困难[6~9]

本文研究具有单面约束的动力学系统的Noether 理论 利用 r_ 参数变换群的无限小群变换的广义准对称性, 研究并给出了受单面约束的动力学系统的Noether 定理和 Noether 逆定理, 从而揭示了单面约束系统的守恒量与其内在的动力学对称性之间的关系 由于受双面约束的完整或非完整系统的 Noether 定理可作为本文定理的推论, 因此本文结果将比以往的研究更具有普遍意义和实际意义

1 单面约束系统的 Noether 定理

研究由 N 个质点组成的力学系统, 其位形由 n 个广义坐标 q_s $(s = 1, \quad, n)$ 确定 设系统的运动受有如下单面约束 [6]

$$f\ (q, t) \quad 0 \quad (\quad = 1, \quad, a), \tag{1}$$

$$(q, q, t) \quad 0 \quad (\quad = 1, \quad, b), \tag{2}$$

则系统的运动方程可写成

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{q_s} - \frac{L}{q_s} = Q_s + \sum_{=1}^{b} \frac{f}{q_s} + \sum_{=1}^{b} \frac{}{q_s} \quad (s = 1, \quad, n), \\ &\quad 0,\ f = 0 \quad (\quad = 1, \quad, a), \\ &\quad 0, \quad = 0 \quad (\quad = 1, \quad, b), \end{aligned} \tag{3}$$

收稿日期: 1997_12_08; 修订日期: 1999_06_11
基金项目: 国家自然科学基金(19572018) 和高校博士点基金资助课题
作者简介: 张毅(1964~), 男, 博士, 副教授. 研究方向: 力学中的数学方法. 已发表论文 50 余篇.

其中 L 为系统的 Lagrange 函数, Q_s 为非势广义力, , 为约束乘子

引进一般形式的 r_参数有限变换群 G_r

$$t^* = g_0(t, q_k, \dot{q}_k, a), \quad q_s^* = g_s(t, q_k, \dot{q}_k, a) \quad (s, k = 1, \quad, n; \quad = 1, \quad, r), \tag{4}$$

其中 a (= 1, , r) 为独立参数 对应的无限小群变换为

$$t^* = t + \quad t = t + \sum_{=1}^{r} \quad {}_0(t, q, \dot{q}),$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \quad q_s = q_s(t) + \sum_{=1}^{r} \quad {}_s(t, q, \dot{q}) \quad (s = 1, \quad, n), \tag{5}$$

其中 为无限小参数, 具有一阶小量

Hamilton 作用量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t, \tag{6}$$

在变换前后的差为

$$I(\ ^*) - I(\ ) = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L(t^*, q^*, \dot{q}^*)\mathrm{d}t^* - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t, \tag{7}$$

其中 与 * 为给定曲线与邻近曲线 将其对 的主线性部分, 即精确到一阶小量的部分, 记为 I, 则有[4]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{=1}^{r} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L \ _0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{L}{\dot{q}_s} \ _s\right) - \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{\dot{q}_s} - \frac{L}{q_s}\right) \ _s\right]\mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中 $_s = \ _s - \dot{q}_s \ _0$, (s = 1, , n)

于是, 我们有下述定理

定理 1 对单面约束系统(1) ~ (3), 如果有限群 G_r 的无限小群变换(5) 是广义准对称变换并且这些无限小变换满足关系

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{f}{\dot{q}_s} \ _s = 0 \quad (\quad = 1, \quad, a; \quad = 1, \quad, r), \tag{9}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\quad}{\dot{q}_s} \ _s = 0 \quad (\quad = 1, \quad, b; \quad = 1, \quad, r) \tag{10}$$

则系统存在 r 个函数独立的第一积分

$$L \ _0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{L}{\dot{q}_s} \ _s + \quad = C \ , (\quad = 1, \quad, r) \tag{11}$$

证 因无限小变换(5) 是广义准对称变换, 故有[4]

$$I + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\quad) + \sum_{s=1}^{n} Q_s \ q_s\right]\mathrm{d}t = 0, \tag{12}$$

其中 = (t, q) 为任意可微函数

利用 与 运算的关系, 并考虑(5), 有

$$q_s = \sum_{=1}^{r} \quad (\ _s - \dot{q}_s \ _0) = \sum_{=1}^{t} \quad _s \tag{13}$$

将(8)、(11) 式代入(12), 得

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{=1}^{r} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L \ _0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{L}{\dot{q}_s} \ _s + \quad \right) - \right.$$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{q_s}-\frac{L}{q_s}-Q_s\right)\quad q_s\Big]\mathrm{d}t=0, \tag{14}$$

其中 $= \sum_{=1}^{r}$

因为无限小群变换(5) 满足关系(9) 和(10) , 故

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{=1}^{r}\sum_{=1}^{a}\sum_{s=1}^{n}\frac{f}{q_s}\ {}_s\,\mathrm{d}t=0, \tag{15}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{=1}^{r}\sum_{=1}^{b}\sum_{s=1}^{n}\frac{}{q_s}\ {}_s\,\mathrm{d}t=0 \tag{16}$$

将(14) 、(15) 和(16) 式相加, 有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{=1}^{r}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(L\ {}_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{L}{q_s}\ {}_s+\quad\Big)-\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{q_s}-\frac{L}{q_s}-$$

$$Q_s-\sum_{=1}^{a}\frac{f}{q_s}-\sum_{=1}^{b}\frac{}{q_s}\Big)\ {}_s\Big]\mathrm{d}t=0 \tag{17}$$

因为积分域是任意的而 彼此独立, 因此对于所研究的单面约束系统(1) ~ (3) 的实际轨道, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\ {}_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{L}{q_s}\ {}_s+\quad\Big]=0\quad(\ =1,\ \ ,r),$$

或者

$$L\ {}_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{L}{q_s}\ {}_s+\quad=C\quad(\ =1,\ \ ,r)$$ 证毕

定理 1 可称为受单面约束的动力学系统的 Noether 定理 利用该定理可以由已知对称性求出系统的守恒律 值得指出: 由于约束方程(1) , (2) 为不等式, 因此条件(9) , (10) 比双面约束系统相应的条件苛刻得多, 从而大大限制了无限小群变换的生成函数的选择范围而导致守恒量数目的大大减少, 例如, 单面约束系统一般不存在广义能量积分

当 $r=1$ 时, 定理 1 退化为如下推论 1

推论 1 对于单面约束系统(1) ~ (3) , 如果无限小群变换的生成元 $_s,\ _0$ 以及规范函数满足

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{f}{q_s}(\ _s-q_s\ _0)=0\quad(\ =1,\ \ ,a), \tag{18}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{}{q_s}(\ _s-q_s\ _0)=0\quad(\ =1,\ \ ,b), \tag{19}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{L}{q_s}\ {}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{L}{q_s}\ {}_s+\Big(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{L}{q_s}q_s\Big)\ {}_0+\frac{L}{t}\ {}_0+$$

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s(\ _s-q_sN_0)+K(t,q,q)=0, \tag{20}$$

则系统存在守恒量

$$\mathrm{E}_{s=1}^{n}\frac{5L}{5q_s}N_s+\Big(L-\mathrm{E}_{s=1}^{n}\frac{5L}{5q_s}q_s\Big)N_0+K=\mathrm{const\#} \tag{21}$$

推论 1 已由另文基于微分变分原理研究给出#

如果系统仅受双面理想 ¶Ä-¶ 型非完整约束

$$(t, q, q) = 0 \quad (B = 1, , , b), \tag{22}$$

有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_B}{\partial q_s} D q_s = 0 \quad (B = 1, , , b)\# \tag{23}$$

将(13)式代入(23)式，并考虑到 EL 的独立性，得

$$\sum_{S=1}^{N} \frac{\partial U_B}{\partial q_s} N_s^L = 0\# \tag{24}$$

由定理 1 得：

推论 2 对于双面理想非完整非保守动力学系统，如果有限群 G_r 的无限小群变换(5) 是广义准对称变换，同时这些无限小群变换又满足 ¶Ä±¶ 定义，则此非完整系统存在 r 个形如(11) 的函数独立的第一积分#

推论 2 已由文献[4]给出#

如果系统没有单面约束(1)、(2)，则定理 1 给出：

推论 3 对于双面理想完整非保守动力学系统，如果有限群 G_r 的无限小群变换(5) 是广义准对称变换，则系统存在 r 个形如(11) 的函数独立的第一积分#

2 单面约束系统的 Noether 逆定理

现在研究根据已知第一积分来寻求相应的无限小广义准对称变换问题#

假设单面约束系统(1)～(3) 有 r 个彼此函数独立的第一积分

$$5^L(t, q, q) = C^L \sim (L = 1, , , r) \tag{25}$$

因此有

$$\frac{d 5^L}{dt} = 0 \tag{26}$$

将(3) 的第一组方程两端乘以 N_s^L 并对 s 求和，再将结果与(26) 式相减，得

$$\frac{\partial 5^L}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial 5^L}{\partial q_s} q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial 5^L}{\partial q_s} q_s - \sum_{s=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial q_j} q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial q_j} q_j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s^d - \sum_{A=1}^{a} K_A \frac{\partial f_A}{\partial q_s} - \sum_{B=1}^{b} L_B \frac{\partial U_B}{\partial q_s} \Big] N_s^L = 0, \tag{27}$$

由(27) 式中 q_s 的系数为零，得到

$$\frac{\partial 5^L}{\partial q_s} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q_s} N_j^L = 0 \quad (s = 1, , , n;\ L = 1, , , r)\# \tag{28}$$

设对所论单面约束力学系统，其 Lagrange 函数的 Hess 行列式

$$| h_{js} | = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q_s} \right| X\ 0, \tag{29}$$

因此，存在矩阵 $H = +h_{js}+$ 的逆矩阵 $H^{-1} = +h_{js}+$，有

$$\sum_{s=1}^{n} h_{ks} h_{sj} = D_{kj}, \tag{30}$$

其中 D_{kj} 是 Kronecker 符号#

解线性方程组(28)，我们得到

$$N_j^L = \sum_{s=1}^{n} h_{js} \frac{\partial 5^L}{\partial q_s} \quad (j = 1, , , n;\ L = 1, , , r); \tag{31}$$

令

$$= LN_0^L + \mathop{E}\limits_{s=1}^{n} \frac{5L}{5q_s} N_s^L + K^L, \tag{32}$$

那么

$$N_0^L = L^{-1}\left(5^L - \mathop{E}\limits_{s=1}^{n} \frac{5L}{5q_s} N_s^L - K^L\right) \quad (L = 1, , , r), \tag{33}$$

这样, 在已知积分 5^L 时, 由(33)、(31) 可确定无限小群变换(5) 式#

如果对于所论单面约束力学系统, 无限小群变换满足关系

$$\mathop{E}\limits_{s=1}^{n} \frac{5fA}{5q_s} N_s^L = 0 \quad (A = 1, , , a; L = 1, , , r), \tag{9}$$

$$\mathop{E}\limits_{s=1}^{n} \frac{5\,U_B}{5q_s} N_s^L = 0 \quad (B = 1, , , b; L = 1, , , r), \tag{10}$$

将(9)、(10)和(32)式代入(27)式, 整理得

$$\frac{d}{dt}\left(LN_0^L + \mathop{E}\limits_{s=1}^{n} \frac{5L}{5q_s} N_s^L\right) - \mathop{E}\limits_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{5L}{5q_s} - \frac{5L}{5q_s} - Q_s^d\right) N_s^L =$$

$$-\frac{d}{dt}K^L \quad (L = 1, , , r)\# \tag{34}$$

由文献[4]的判据4, 它是广义准对称变换# 于是, 有下述定理#

定理2 如果已知单面约束系统(1)~(3)的 r 个函数独立的第一积分, 那么由(5), (31)和(33)确定的无限小群变换, 只要满足关系(9)(10), 必是系统的广义准对称变换#

定理2可称为单面约束系统的Noether逆定理#

显然, 对双面理想非完整系统, 定理2给出:

推论4 如果已知双面理想非完整非保守动力学系统的 r 个函数独立的第一积分, 那么由(5), (31)和(33)确定的无限小群变换, 只要满足 ¶Ä±¶ 定义, 必是系统的广义准对称变换#

推论4已由文献[4]给出#

如果系统不存在约束(1)(2), 则定理2成为:

推论5 如果已知双面理想完整非保守动力学系统的 r 个函数独立的第一积分, 那么由(5), (31)和(33)确定的无限小群变换必是系统的广义准对称变换#

值得指出: 若系统不存在非势广义力 Q_s^d, 则上述定理及推论中广义准对称变换成为准对称变换[4], 此时若 $K^L = 0$, 则为对称变换[4] #

3 算 例

例1 设质量为 m 的质点在不低于光滑直线 $y = x$ 的铅垂平面中运动# 试研究其对称性与守恒律#

这是一个简单的具有单面完整约束的动力学问题# 选取广义坐标 $q_1 = x$, $q_2 = y$# 系统的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}m(q_1^2 + q_2^2) - mgq_2\# \tag{35}$$

约束方程为

$$f = q_2 - q_1 \setminus 0\# \tag{36}$$

现取生成函数和规范函数为

$$N_0 = -1,\ N_1 = q_2,\ N_2 = q_1,\ K = mgq_1 - mq_1q_2, \tag{37}$$

则有

$$t^{*} = t - \varepsilon,\ q_1^{*} = q_1 + \varepsilon q_2,\ q_2^{*} = q_2 + \varepsilon q_1. \tag{38}$$

由文献[4]可知, 变换(38)是系统的准对称变换, 且有

$$\sum_{s=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial q_s}\xi_s = -(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) + (\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = 0. \tag{39}$$

按定理1, 系统存在第一积分(11), 即

$$\Phi = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + mg(q_1 + q_2) = \mathrm{const}, \tag{40}$$

反之, 由(40)可求出对应的无限小群变换(38). 实际上, 因为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_1} = m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2),\ \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_2} = m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \tag{41}$$

又

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1} = m\dot{q}_1,\ \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2} = m\dot{q}_2,$$

故

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_s} = m\delta_{js}\quad (j, s = 1, 2), \tag{42}$$

$$h_{js} = \frac{1}{m}\delta_{js}\quad (j, s = 1, 2), \tag{43}$$

由(31)求得

$$\xi_1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2,\ \xi_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \tag{44}$$

式(33)给出

$$\xi_0 = L^{-1}\left[-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + mg(q_1 + q_2) - K\right], \tag{45}$$

现在取

$$K = mgq_1 - m\dot{q}_1\dot{q}_2, \tag{46}$$

将(46)代入(45),

$$\xi_0 = -1, \tag{47}$$

从而, (44)给出

$$\xi_1 = q_2,\ \xi_2 = q_1, \tag{48}$$

比较(46)~(48)和(37), 便得结论.

例2 考虑一个质量为 m 的质点在重力作用下的运动. 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3, \tag{49}$$

它的运动受有单面约束

$$f = \dot{q}_1 \geq 0, \tag{50}$$

$$U = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \geq 0, \tag{51}$$

已知系统有第一积分

$$\Phi = m\dot{q}_2\dot{q}_3 + mg q_2 = \mathrm{const}, \tag{52}$$

由于

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_1} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_2} = m\dot{q}_3,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_3} = m\dot{q}_2, \tag{53}$$

又

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q_s} = mD_{js} \quad (j, s = 1, 2, 3),$$

$$h_{js} = \frac{1}{m} D_{js} \quad (j, s = 1, 2, 3),$$

故(31)式给出

$$N_1 = 0,\ N_2 = q_3,\ N_3 = q_2, \tag{54}$$

将(54)代入(33),有

$$N_0 = L^{-1}[-mq_2q_3 + mgq_2 - K], \tag{55}$$

取

$$K = -mq_2q_3 + mgq_2, \tag{56}$$

则

$$N_0 = 0, \tag{57}$$

将(57)代入(54),并考虑到 $N_s = N_s - q_s N_0$,得

$$N_1 = 0,\ N_2 = q_3,\ N_3 = q_2, \tag{58}$$

容易验证

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial q_s} N_s = 0,\quad \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial q_s} N_s = 0, \tag{59}$$

故变换

$$t^* = t,\ q_1^* = q_1,\ q_2^* = q_2 + \varepsilon q_3,\ q_3^* = q_3 + \varepsilon q_2, \tag{60}$$

是系统的广义准对称变换,因 $Q_s^d = 0 (s = 1, 2, 3)$,故上述广义准对称变换,实际上为准对称变换。

[参 考 文 献]

[1] Djukic Dj S, Vujanovic B. Noether's theory in classical nonconservative mechanics[J]. Acta Mechanica, 1975, 23: 17~27.

[2] Vujanovic B. A study of conservation laws of dynamical systems by means of the differential variational principles of Jourdain and Gauss[J]. Acta Mechanica, 1986, 65: 63~80.

[3] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京:北京工业大学出版社, 1993.

[4] 刘端. 非完整非保守动力学系统的Noether定理及其逆定理[J]. 中国科学, A辑, 1990, 20(11): 1189~1197.

[5] 梅凤翔. Birkhoff系统的Noether理论[J]. 中国科学, A辑, 1993, 23(7): 709~717.

[6] 梅凤翔. 分析力学专题[M]. 北京:北京工业学院出版社, 1988.

[7] . [J]. , 1978, 42(5): 781~788.

[8] . [J]. 0, , , 1985, 49(5): 717~723.

[9] Lötstedt P. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints[J]. *SIAM J Appl Math*, 1982, 42(2): 281~296.

[1], Mei Fengxiang[2]
(1 Suzhou Institute of Urban Construction & Environmental Protection, Suzhou 215011, P R China;
2 Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China)

Abstract: Noether's theory of dynamical systems with unilateral constraints by introducing the generalized quasi_symmetry of the infinitesimal transformation for the transformation group G_r is presented and two examples to illustrate the application of the result are given.

Key words: analytical mechanics; unilateral constraint; conservation law; symmetry; Noether's theorem