

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0045_08

横观各向同性层状弹性场地格林函数的数值解*

陈 镒, 薛松涛, 陈竹昌, 陈 军

(同济大学 结构理论研究所, 上海 200092)

(何福保推荐)

摘要: 采用横观各向同性层状弹性模型模拟半空间之上的层状场地, 用人工透射边界代替半空间以吸收能量。利用薄层元素法给出任意节面上环形垂直及水平简谐荷载作用下场地的位移公式, 并由此导出这类场地任意节面上在垂直及水平简谐集中荷载作用下的位移响应显式解。算例表明本文方法与理论解相近, 横观各向同性性质对格林函数有明显的影响。

关键词: 横观各向同性; 层状弹性场地; 格林函数

中图分类号: TU435 文献标识码: A

前 言

在进行土-结构动力相互作用分析时, 计算土的动力刚度矩阵是关键的一步, 以前绝大多数研究者用弹性、粘弹性半空间或层状半空间模拟场地土。然而, 实际上土的横向模量往往不同于竖向模量^[1], 故采用横观各向同性弹性体模拟场地更接近实际。近十余年来, 许多研究者对横观各向同性层状弹性体的动力响应进行了研究。其中 Waas 等人^[2]已提出了一套完整的分析方法, 并广为应用。但他们在处理下部半空间时采用了固定边界, 这将使上层土的振动能量无法向半空间中辐射, 从而使得其解失真, 尤其在较深的部位。鉴于此, 本文采用人工透射边界, 即用阻尼器模拟下部半空间, 以吸收振动能量, 同时利用了 Kausel 等人^[3]提出的正交条件, 给出了与 Waas 等人不同的参与系数公式, 从而得出了在任意节面环形垂直及水平简谐荷载作用下的位移解。在此基础上, 令环形的半径趋于零, 从而导出横观各向同性层状弹性场地在集中垂直及水平简谐荷载作用下的位移解, 即格林函数, 并与各向同性半空间理论解进行了比较, 同时计算了在表面集中简谐荷载作用下不同深度处的位移响应。计算表明: 文中得出的格林函数解与理论解接近, 但表达式十分简洁, 便于应用; 横观各向同性性质对场地的格林函数有明显的影响, 且随着深度的增加, 这种影响越明显。

1 力学模型及运动方程的解

横观各向同性弹性层状场地的力学模型见图 1。图中表示该场地表面受一可能的环形荷

* 收稿日期: 1999_03_05; 修订日期: 1999_07_25

基金项目: 国家自然科学基金(59778033)、日本文部省科学研究费补助金(国际学术研究)No. 090-44127

作者简介: 陈镒(1944~), 男, 副研究员, 研究方向: 地震工程与工程振动, 发表论文三十余篇。

载。该体系以频率 ω 作简谐运动时的运动方程见文献[4]。底部半空间用一组阻尼器模拟, 其阻尼系数为^[4]:

$$C_D^r = C_D^0 = \rho_m V_s^m, \tag{1a}$$

$$C_D^z = \rho_m V_p^m, \tag{1b}$$

V_s^m 及 V_p^m 分别表示第 m 层介质(即半空间)垂直传播的 S 波及 P 波波速。

在自由振动时, 上下表面有边界条件:

$$[\alpha_z \quad \alpha_z \quad \alpha_{\theta z}]^T = \mathbf{0} \quad (z = 0), \tag{2a}$$

$$[\alpha_z \quad \alpha_z \quad \alpha_{\theta z}]^T = [-f_D^r - f_D^z - f_D^0]^T \quad (z = h_i), \tag{2b}$$

f_D^r, f_D^z, f_D^0 分别表示沿径向, 垂直向及切向的阻尼力。

利用分离变量法, 并在 z 方向对场地土进行离散, 按照 Galerkin 方法, 结合边界条件(2), 最后得到如下的广义 Rayleigh 波及 Love 波的代数特征方程^[2]:

$$(A_R k_R^2 + B_R k_R + C_R) f_R = \mathbf{0}, \tag{3a}$$

$$(A_0 k_0^2 + C_0) f_0 = \mathbf{0}, \tag{3b}$$

式中 $f_R^T = [f_r^T \quad f_z^T]^T, f_r, f_z, f_0$ 仅为的 z 函数, 它们均为 $m \times 1$ 向量。分别表示沿径向, 竖向及切向的“位移”。 A_R, B_R, C_R, A_0, C_0 详见[2]。(3)式与文献[2]中的公式形式相同, 但由于采用了人工边界, 其 C_R 中的 (m, m) 项及 $(2m, 2m)$ 项应分别加上

$i\omega\rho_m V_s^m$ 及 $i\omega\rho_m V_p^m, C_0$ 中 (m, m) 的项应加上 $i\omega Q_m V_s^m$, 这里 $i = \sqrt{-1}$ 。

当在各层 $r = r_0$ 的环上作用有径向、竖向及切向简谐荷载 $P_r e^{i\omega t}, P_z e^{i\omega t}, P_\theta e^{i\omega t}$ 时, 在 $r \geq r_0$ 的范围内各层交界面上的位移为^[2]:

$$U_r = \left[\sum_{j=1}^{2m} H_j' \Phi_{\theta j} \alpha_{Rj} + \frac{n}{r} \sum_{j=1}^m H_j \Phi_{\theta j} \alpha_{\theta j} \right] \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \tag{4a}$$

$$U_z = \left[\sum_{j=1}^{2m} k_{Rj} H_j \Phi_{zj} \alpha_{Rj} \right] \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \tag{4b}$$

$$U_\theta = \left[\frac{n}{r} \sum_{j=1}^{2m} H_j \Phi_{\theta j} \alpha_{Rj} + \sum_{j=1}^m H_j' \Phi_{\theta j} \alpha_{\theta j} \right] \begin{bmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \tag{4c}$$

式中, $H_j = H_n^{(2)}(k_{Rj}r), H_j = H_n^{(2)}(k_{\theta j}r), H_j'$ 表示 $\frac{d}{dr} H_n^{(2)}(k_{Rj}r), \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{bmatrix}$ 等上面的项对应于对称荷载、下面的项对应于反对称荷载引起的响应。 α_{Rj} 及 $\alpha_{\theta j}$ 为参与系数, 其表达式为:

$$\alpha_{Rj} = J_n(k_{Rj}r_0) a_j + \dot{J}_n(k_{Rj}r_0) c_j \quad (j = 1, 2, \dots, 2m), \tag{5a}$$

$$\alpha_{\theta j} = J_n(k_{\theta j}r_0) b_j + \dot{J}_n(k_{\theta j}r_0) d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{5b}$$

对于不同的正交条件 a_j, b_j, c_j, d_j 的表达式不同。Waas 等人根据他们提出的正交条件给出了相应的表达式。这里, 按照 Kausel 等人提出的正交条件可得出:

$$\mathbf{a} = - \frac{-i\pi r_0}{2} \left[\mathbf{K}_R^{-1} \Phi_z^T \mathbf{P}_z + \frac{n}{r_0} \mathbf{K}_R^{-2} \Phi_\theta^T \mathbf{P}_\theta \right] \tag{6a}$$

$$\mathbf{b} = - \frac{-in\pi}{2} \mathbf{K}_0^{-2} \Phi_0^T \mathbf{P}_r \tag{6b}$$

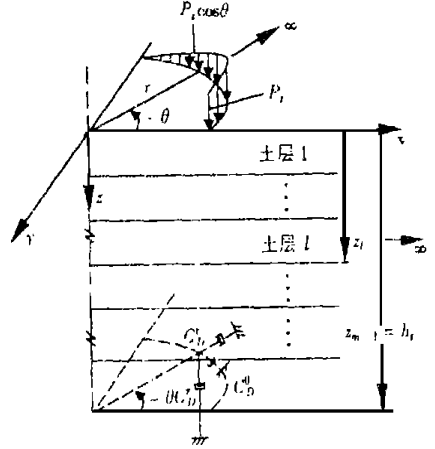


图 1 层状场地的力学模型

$$\mathbf{c} = - \frac{-i\pi r_0}{2} \mathbf{K}_R^{-2} \Phi_r^T \mathbf{P}_r \quad (6c)$$

$$\mathbf{d} = - \frac{-i\pi r_0}{2} \mathbf{K}_\theta^{-2} \Phi_\theta^T \mathbf{P}_\theta \quad (6d)$$

式中 $\Phi_r, \Phi_\theta, \Phi_0$ 为由 f_r, f_θ, f_0 规格化后组成的规格化特征向量矩阵·

1. 当第 l 节面 $r = r_0$ 的环上受到垂直荷载 $P_z^l = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi r_0}$ 时, $n = 0$

$$a_j = - \frac{i}{4} k_{Rj}^{-1} \Phi_{2j} \quad (b_j = c_j = d_j = 0),$$

Φ_{2j} 为 Φ_z 第 l 行第 j 列元素·

$$\alpha_{Rj} = - \frac{i}{4} J_0(k_{Rj} r_0) k_{Rj}^{-1} \Phi_{2j} \cdot$$

于是由此荷载引起的在 $r \geq r_0$ 处的位移为:

$$\mathbf{U}_r = - \frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_0^{(2)'}(k_{Rj} r) J_0(k_{Rj} r_0) \Phi_j k_{Rj}^{-1} \Phi_{2j} \right] e^{i\omega t}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{U}_z = - \frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_0^{(2)}(k_{Rj} r) J_0(k_{Rj} r_0) \Phi_{2j} \Phi_{2j} \right] e^{i\omega t}, \quad (7b)$$

$$\mathbf{U}_\theta = \mathbf{0} \quad (7c)$$

2. 当在第 l 节面 $r = r_0$ 的圆环上受到水平荷载 $P_x^l = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi r_0}$ 时, $n = 1$ · 它可以分解成

$$P_x^l = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi r_0} (\cos \theta), \quad P_\theta^l = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi r_0} (-\sin \theta),$$

1) 对 $P_r^l = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi r_0} (\cos \theta)$, $b_j = - \frac{i}{4r_0} k_{\theta j}^{-2} \Phi_{0j}$, $c_j = - \frac{i}{4} k_{Rj}^{-2} \Phi_{1j}$, $a_j = d_j = 0$

$$\alpha_{Rj} = - \frac{i}{4} J_1'(k_{Rj} r_0) k_{Rj}^{-2} \Phi_{1j} \cdot$$

$$\alpha_{\theta j} = - \frac{i}{4r_0} J_1(k_{\theta j} r_0) k_{\theta j}^{-2} \Phi_{0j} \cdot$$

$$\mathbf{U}_r = - \frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)'}(k_{Rj} r) J_1'(k_{Rj} r_0) \Phi_j k_{Rj}^{-2} \Phi_{1j} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m H_1^{(2)}(k_{\theta j} r) \frac{1}{r_0} J_1(k_{\theta j} r_0) \Phi_{0j} k_{\theta j}^{-2} \Phi_{0j} \right] \cos \theta e^{i\alpha t}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{U}_z = - \frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) J_1'(k_{Rj} r_0) \Phi_{2j} k_{Rj}^{-1} \Phi_{1j} \right] \cos \theta e^{i\alpha t}, \quad (8b)$$

$$\mathbf{U}_\theta = - \frac{i}{4} \left[\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) J_1'(k_{Rj} r_0) \Phi_j k_{Rj}^{-2} \Phi_{1j} + \sum_{j=1}^m H_1^{(2)'}(k_{\theta j} r) \frac{1}{r_0} J_1(k_{\theta j} r_0) \Phi_{0j} k_{\theta j}^{-2} \Phi_{0j} \right] (-\sin \theta) e^{i\alpha t}, \quad (8c)$$

2) 对 $P_\theta^l = \frac{e^{i\alpha t}}{2\pi r_0} (-\sin \theta)$

$$a_j = - \frac{i}{4r_0} k_{Rj}^{-2} \Phi_{1j}, \quad d_j = - \frac{i}{4} k_{\theta j}^{-2} \Phi_{0j}, \quad b_j = c_j = 0$$

$$\alpha_{Rj} = - \frac{i}{4} J_1(k_{Rj} r_0) \frac{1}{r_0} k_{Rj}^{-2} \Phi_{1j},$$

$$\alpha_{\theta} = -\frac{i}{4} J_1'(k_{\theta} r_0) k_{\theta}^{-2} \Phi_{\theta j},$$

$$\mathbf{U}_r^{\theta} = -\frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) J_1(k_{Rj} r_0) \frac{1}{r_0} \Phi_j k_{Rj}^{-2} \Phi_{lj} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m H_1^{(2)}(k_{\theta} r) J_1'(k_{\theta} r_0) \Phi_{\theta} k_{\theta}^{-2} \Phi_{\theta j} \right] \cos \theta e^{i\omega t}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{U}_z^{\theta} = -\frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{r_0} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) J_1(k_{Rj} r_0) \Phi_j k_{Rj}^{-1} \Phi_{lj} \right] \cos \theta e^{i\omega t}, \quad (9b)$$

$$\mathbf{U}_{\theta}^{\theta} = -\frac{i}{4} \left[\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) \frac{1}{r_0} J_1(k_{Rj} r_0) \Phi_j k_{Rj}^{-2} \Phi_{lj} + \sum_{j=1}^m H_1^{(2)'}(k_{\theta} r) J_1'(k_{\theta} r_0) \Phi_{\theta} k_{\theta}^{-2} \Phi_{\theta j} \right] (-\sin \theta) e^{i\omega t}, \quad (9c)$$

因此, 由 $P_x = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi r_0}$ 引起的总位移为:

$$\mathbf{U}_r^* = \mathbf{U}_r + \mathbf{U}_r^{\theta}, \quad (10a)$$

$$\mathbf{U}_z^* = \mathbf{U}_z + \mathbf{U}_z^{\theta}, \quad (10b)$$

$$\mathbf{U}_{\theta}^* = \mathbf{U}_{\theta} + \mathbf{U}_{\theta}^{\theta}. \quad (10c)$$

2 格林函数的数值解

1. 垂直集中荷载

当第 l 节面上作用有垂直集中荷载 $P_z^l = e^{i\omega t}$ 时, 则可由式(7) 令 $r_0 \rightarrow 0$ 即得横观各向同性层状弹性场地在垂直集中荷载作用下的格林函数:

$$\mathbf{U}_r = \frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) \Phi_j \Phi_{2lj} \right] e^{i\omega t}, \quad (11a)$$

$$\mathbf{U}_z = -\frac{i}{4} \left[\sum_{j=1}^{2m} H_0^{(2)}(k_{Rj} r) \Phi_j \Phi_{2lj} \right] e^{i\omega t}, \quad (11b)$$

$$\mathbf{U}_{\theta} = \mathbf{0}. \quad (11c)$$

这中利用了公式 $\frac{dH_0^{(2)}(k_{Rj} r)}{dr} = -k_{Rj} H_1^{(2)}(k_{Rj} r)$.

2. 水平集中荷载

当第 l 节面上作用有水平集中荷载 $P_x^l = e^{i\omega t}$ 时, 则可由(10) 式令 $r_0 \rightarrow 0$ 即得横观各向同性层状弹性场地在水平集中荷载作用下的格林函数:

$$\mathbf{U}_r^* = -\frac{i}{4} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} [H_0^{(2)}(k_{Rj} r) - H_2^{(2)}(k_{Rj} r)] \Phi_j \Phi_{lj} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m H_1^{(2)}(k_{\theta} r) \Phi_{\theta} \Phi_{\theta j} k_{\theta}^{-1} \right\} \cos \theta e^{i\omega t}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{U}_z^* = -\frac{i}{4} \left\{ \sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) \Phi_j \Phi_{lj} \right\} \cos \theta e^{i\omega t}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{U}_{\theta}^* = -\frac{i}{4} \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{2m} H_1^{(2)}(k_{Rj} r) \Phi_j \Phi_{\theta j} k_{\theta}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [H_0^{(2)}(k_{\theta} r) - H_2^{(2)}(k_{\theta} r)] \Phi_{\theta} \Phi_{\theta j} \right\} (-\sin \theta) e^{i\omega t}. \quad (12c)$$

当第 l 节面上作用有水平集中荷载 $P_y^l = e^{i\omega t}$ 时的格林函数的推导方法与 $P_x^l = e^{i\omega t}$ 时求格

林函数的方法完全相同。这里不再介绍。

由式(11)及(12)即可知,只要按照(3)求得场地的特征值 $k_{Rj}(j = 1, 2, \dots, m)$, $k_{\theta j}(j = 1, 2, \dots, m)$ 及规格化特征向量 $\Phi_{Rj}(j = 1, 2, \dots, 2m)$, $\Phi_{\theta j}(j = 1, 2, \dots, m)$, 即可得出横观各向同性层状弹性场地格林函数显式解。由此二式还可看到,集中荷载不仅可作用于场地的表面,还可作用于场地内部的任一节面上。这即表明,该二式将表面集中荷载及内部集中荷载的格林函数用统一的比较简单的公式表示出来。这为应用带来了很大的方便。从(11)及(12)式还可以看到,格林函数在 $r = 0$ 处有奇异性,关于此问题将另文专门讨论。

3 算 例

1. 为了验证上述公式的正确性,这里将场地退化为各向同性层状弹性体。利用(11)、(12)式计算了在场地表面作用 $P_x e^{i\omega t}$, 场地表面在 x 轴($\theta = 0$) 及 y 轴($\theta = \pi/2$) 上 $r = H$, $r = 2H$ 处的位移 U_x 及在垂直方向作用 $P_z e^{i\omega t}$ 时在 $r = H$, $r = 2H$ 处的位移 U_z 。将之与理论解^[5,6] 进行了比较,其理论解的形式为:

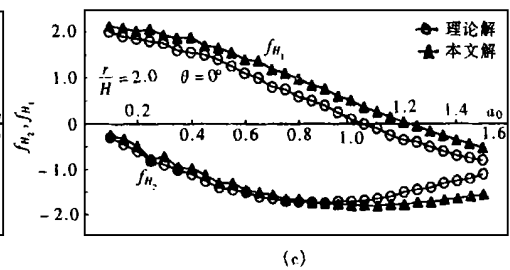
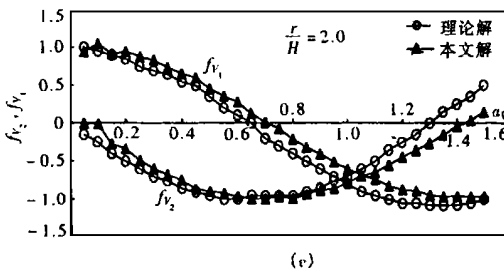
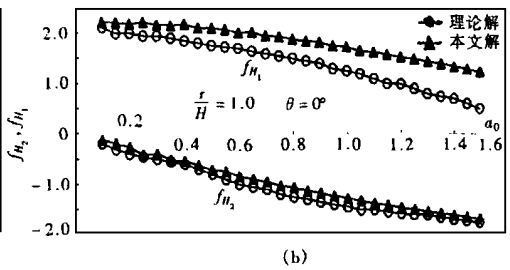
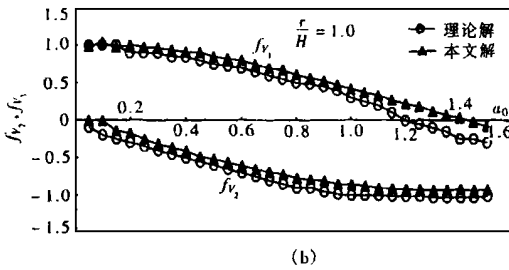
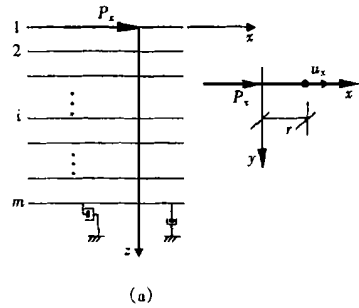
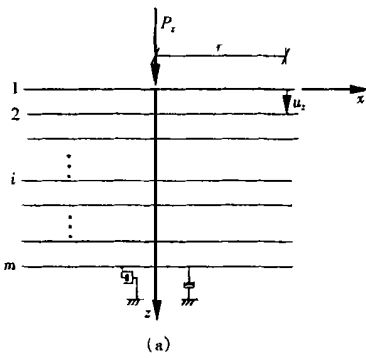


图 2

图 3

$$U_x = \frac{P_x e^{i\omega t}}{4\pi G r} (f_{H1} + i f_{H2}), \tag{13a}$$

$$U_z = \frac{P_z e^{i\omega t}}{2\pi G} \frac{1-\nu}{r} (f_{V1} + i f_{V2}), \tag{13b}$$

这里材料参数与[6]中取相同的值。即： $\rho = 1, \nu = 1/3, D = 0.01, V_s = 100, H = 1.0$ 。 ρ 为材料密度， ν 为泊松比， D 为材料阻尼比， H 为层厚。

图2(a~c)为对表面垂直荷载 $P_z e^{i\omega t}$ 算得的在 r 处的位移 U_z 与理论解的比较图。

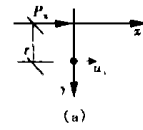


图3(a~c)为对表面水平荷载 $P_x e^{i\omega t}$ 算得的在 x 轴上距荷载作用点 r 处的水平位移 U_x 与理论解的比较图。

图4(a~c)为对表面水平荷载 $P_x e^{i\omega t}$ 算得的在 y 轴上距荷载作用点 r 处的水平位移 U_x 与理论解的比较图。

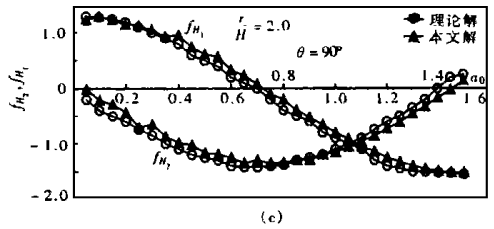
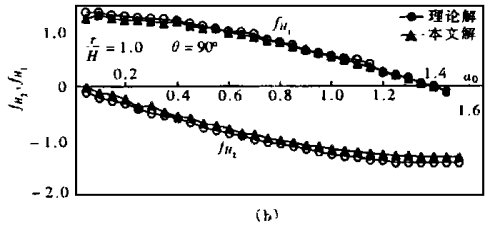


图 4

由这些图可以看出用本文的方法计算的结果与理论解是比较接近的。

2. 为了了解横观各向同性性质对场地响应的影响，这里分别计算了各向同性及横观各向同性这两种模型在表面集中简谐荷载作用下不同深度处的位移。图5~8为表面集中水平荷载 $P_x = e^{i\omega t}$ 引起的第 l 节面 ($l = 1, 12, 24, 36, \theta = 0^\circ$) $r = 2.0$ 处的水平位移。其中“□”为各向同性材料，“▲”为横观各向同性材料。

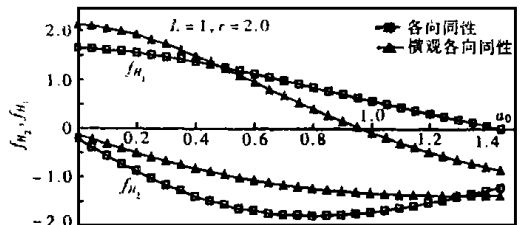


图 5

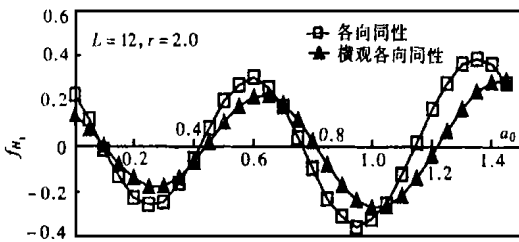
图5为第1节面处的水平位移。

图6(a, b)为第12节面处的水平位移。(其中(a)为实部, (b)为虚部)

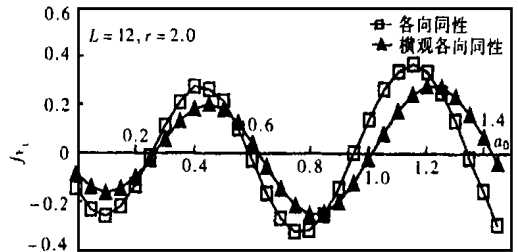
图7(a, b)为第24节面处的水平位移。(其中(a)为实部, (b)为虚部)

图8(a, b)为第36节面处的水平位移。(其中(a)为实部, (b)为虚部)

由上述结果可以看出，土的横观各向同性性质



(a)



(b)

图 6

对格林函数有着明显的影响;对于横观各向同性场地,在表面集中荷载作用下,随着深度的增加,解的振荡趋于明显;横观各向同性场地在较浅的部位位移响应衰减明显,随着深度的增加这种衰减逐渐趋于缓和。作者还计算了不同深度集中荷载作用下的场地响应。限于篇幅,不再在此列出

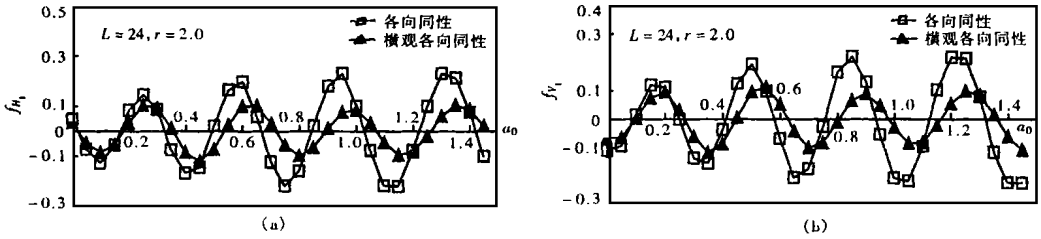


图 7

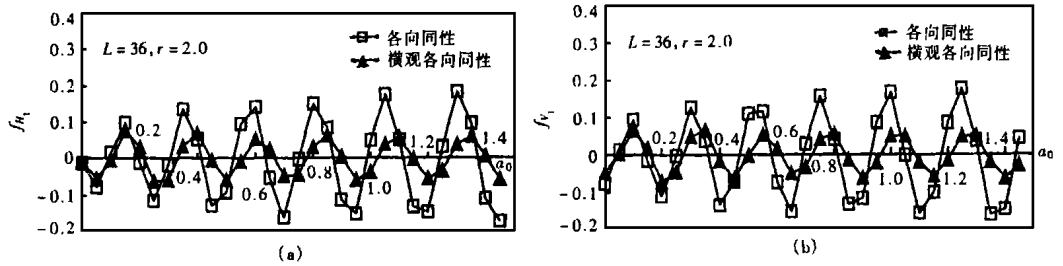


图 8

4 结 语

1. 本文用人工透射边界模拟层状场地下部半空间,推导了横观各向同性层状弹性场地的格林函数显式数值解。这种解将表面集中荷载及场地内部集中荷载的位移解用统一的简单形式表示,为应用带来方便。

2. 通过与表面集中荷载作用时弹性半空间的位移理论解的比较,表明本文给出的数值解与理论解较接近。

3. 算例表明场地的横观各向同性性质对场地的动力响应有明显的影响,应当在场地的动力分析中考虑这一性质。

致谢 在本文完成期间得到日本东北大学山田大彦教授、杉村义宏教授、植松康副教授、滕本胜成助教及名古屋大学飞田润副教授的有益帮助,谨在此表示衷心的感谢。

[参 考 文 献]

[1] 华南理工大学,浙江大学,东南大学,湖南大学编. 地基与基础(新一版)[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1991.

[2] Waas G, Riggs HR, Werkle H. Displacement solutions for dynamic loads in transversely isotropic stratified media[J]. EESD, 1985, 13(2): 173~ 193.

[3] Kausel E, Peek R. Dynamic loads in the interior of a layered stratum: an explicit solution[J]. BSSA, 1982, 72(5): 1459~ 1481.

- [4] 陈镕, 薛松涛, 陈竹昌等. 横观各向同性层状弹性场地对环形简谐荷载的位移响应[J]. 上海力学, 1999, 20(2): 139~ 147.
- [5] 田治见宏. 建物と地盘相互作用, 地震工学[M]. 日本东京: 彰国社, 1968, 55_105.
- [6] 长谷川正辛. 弹性波动论に基づいた群杭の動的挙動に关する基础的研究[A]. ORI 研究报告[R], 日本东京: 清水建设株式会社, 1993 年 10 月.

The Numerical Solution of Green's Functions for Transversely Isotropic Elastic Strata

Chen Rong, Xue Songtao, Chen Zhuchang, Chen Jun

(Institute of Structural Theory, Tongji University, Shanghai 200092, P R China)

Abstract: In this paper, a model of transversely isotropic elastic strata is used to simulate the soil layers situated on a half space. Instead of the half space, an artificial transmitting boundary is used to absorb the vibration energy. The displacement formulas at any soil layer interface under vertical or horizontal harmonic ring load are obtained by using the thin layer element method. From these formulas, the explicit solutions of Green's Functions—the displacement responses at any interface of these strata under vertical and horizon harmonic point loads—are derived. The examples show that the method presented in this paper is close to the theoretical method and the transversely isotropic property has evident influence on the Green's Functions.

Key words: transversely isotropic; layered elastic strata, Green's Function