

文章编号: 1000-0887(2000) 01-0039-06

# 各向异性湍浮力模型的研究

阳 坤, 洪益平, 周雪漪, 李玉梁

(清华大学 水利水电工程系, 北京 100084)

(林建忠推荐)

摘要: 通过对隐式代数应力模型应力结构的分析, 认为湍浮力流动的应力由应变和浮力作用引起, 从而利用应力输运的线性近似和平衡近似提出了非线性各向异性湍浮力模型 该模型避免了数值奇异, 其可靠性通过计算和实验的对比得到了验证

关键词: 代数应力模型; 湍浮力模型; 各向异性

中图分类号: X522; X524 文献标识码: A

浮力流动是自然界的基本流动之一, 如河口或近海的排污、火电厂的温排水均会由于排放水体和受纳水域的密度差而引起湍浮力流动 浮力作用加剧了紊动, 要准确模拟较为困难

用隐式代数应力模型对湍流进行模拟, 考虑了紊动的各向异性, 通用性较好, 但当流动存在大应变时可能出现数值奇异, 导致计算失败<sup>[1]</sup> 为提高模拟精度并避免数值奇异, 人们采用不同途径模拟应力<sup>[2,3,4,5]</sup> 但这些模型均没有考虑浮力作用, 因此如何提出考虑各向异性、计及浮力作用且能避免数值奇异的模型, 以准确地模拟湍浮流动成为本文要解决的关键问题

## 1 各向异性湍浮力流动模型

本文通过分析隐式代数应力模型的应力表达式的组成, 寻求将不存在数值奇异的无浮力模型改进成湍浮力模型的途径

首先将应力表示为应变引起的应力  $(\overline{u_i u_j})_1$  和浮力作用引起的应力  $(\overline{u_i u_j})_2$  两者的叠加:

$$\overline{u_i u_j} = \underbrace{(\overline{u_i u_j})_1}_{\text{应变引起的应力}} + \underbrace{(\overline{u_i u_j})_2}_{\text{浮力作用引起的应力}} \quad (1)$$

### 1) 应变引起的应力 $(\overline{u_i u_j})_1$

为使计算不出现数值奇异,  $(\overline{u_i u_j})_1$  可选择无浮力线性模型、非线性应力模型或显式代数应力模型的任何一个取代隐式代数应力模型的  $(\overline{u_i u_j})_1$  本文选择 Speziale(1987) 的非线性应力模型计算, 以考虑流动的各向异性 该模型的结构与显式代数应力模型相同, 且满足可实现性原则, 其可靠性已受到大量实例的检验<sup>[3], [6]</sup> 其表达式如下:

$$(\overline{u_i u_j})_1 = \frac{2}{3} K \bar{\epsilon} - 2C \frac{k^2}{s_{\bar{j}}} - C_D C^2 \frac{k^3}{2} \left[ \frac{1}{s_{\bar{j}}} - \frac{1}{3} \frac{s_{mm}}{ij} \right] -$$

收稿日期: 1997\_09\_15; 修订日期: 1999\_06\_23  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59479021)  
作者简介: 阳坤(1970~), 男, 博士.

$$C_D C^2 \frac{k^3}{2} \left[ \overline{s_{ik} s_{lj}} - \frac{1}{3} \overline{s_{mn} s_{mn}} \delta_{ij} \right], \quad (2)$$

其中  $\overline{s_{ij}} = \frac{D \overline{s_{ij}}}{Dt} - \frac{U_i}{x_k} \overline{s_{kj}} - \frac{U_j}{x_k} \overline{s_{ki}}$ ,  $\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{U_i}{x_j} + \frac{U_j}{x_i} \right]$ , 一般忽略  $\frac{D \overline{s_{ij}}}{Dt}$

2) 浮力作用引起的应力  $(\overline{u_i u_j})_2$

浮力作用引起的应力  $(\overline{u_i u_j})_2$  用以下两式表示:

1) Rodi<sup>[7]</sup> 线性近似得到的浮力作用引起的应力:

$$(\overline{u_i u_j})_2 = k \frac{(1 - C_3) \left[ G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right]}{P_k + G_k + (C_1 - 1)}; \quad (3)$$

2) Rodi 平衡近似得到的浮力作用引起的应力:

$$(\overline{u_i u_j})_2 = k \frac{(1 - C_3) \left[ G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right]}{C_1}; \quad (4)$$

其中  $P_k = - \overline{u_i u_i} \frac{U_i}{x_l}$ ,  $G_k = g_i \overline{u_i c}$ ,  $G_{ij} = g_j \overline{u_i c} + g_i \overline{u_j c}$ ,

$$g^i = \begin{cases} 0 & (i = 1, 3), \\ -g & (i = 2), \end{cases} = \frac{1}{a} \left[ -\frac{C}{C} \right],$$

> 0 时, 排放水体受负浮力; < 0, 排放水体受正浮力;

3) 通量  $\overline{u_i c}$

若应用隐式代数应力模型的各向异性通量模型计算 因其通量模型中隐含应力, 故需求解方程组, 数值奇异问题可能再现 本文所采用的方法则是通量按各向同性的扩散梯度模型考虑, 以避免数值奇异并简化计算 即:

$$\overline{u_i c} = - \frac{v_i}{c} \frac{C}{x_i}; \quad (5)$$

其中,  $c$  为 Prandtl 数或 Schmidt 数 平面自由射流取 0.5, 近壁射流取 0.85~0.9

以上应变引起的非线性应力模型和浮力作用引起的两种应力模型, 组合成两种不同的各向异性湍浮力流动应力模型

## 2 模型验证

为了验证将无浮力模型改进成湍浮力模型的思路及各向异性模型的可靠性, 本文应用各向异性湍浮力应力模型计算了平面浮射流

平面二维湍浮力流动的控制方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{x} + \frac{V}{y} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{x} \left[ \overline{UU} - \frac{U^2}{x} \right] + \frac{V}{y} \left[ \overline{UV} - \frac{UV}{y} \right] = - \frac{P}{x} - \frac{\overline{uu}}{x} - \frac{\overline{uv}}{y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{U}{x} \left[ \overline{UV} - \frac{UV}{x} \right] + \frac{V}{y} \left[ \overline{VV} - \frac{V^2}{y} \right] = - \frac{P}{y} - \frac{\overline{uv}}{x} - \frac{\overline{vv}}{y} - C_a g, \quad (8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{U}{x} \left[ \overline{UC} - D \frac{C}{x} \right] + \frac{V}{y} \left[ \overline{VC} - D \frac{C}{y} \right] = - \frac{\overline{uc}}{x} - \frac{\overline{vc}}{y}, \quad (9)$$

$$-\frac{k}{t} + \frac{1}{x}[Uk] + \frac{1}{y}[Vk] = \frac{1}{x_l} \left[ C_k \frac{k^2}{x_l} \right] + P_k + G_k \quad (10)$$

$$-\frac{1}{t} + \frac{1}{x}[U] + \frac{1}{y}[V] = \frac{1}{x_l} \left[ C \frac{k^2}{x_l} \right] + c_1 \frac{1}{k} (P_k + G_k) (1 + C_3 R_f) - C_2 \frac{2}{k} \quad (11)$$

$$= a(1 + C) \quad (12)$$

应力由式(2)和式(4)构成的各向异性湍浮力应力模型(以下简称非线性模型)计算,即

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} K_{ij} - 2C \frac{k^2}{s_{ij}} - C_D C^2 \frac{k^3}{2} \left[ \overline{s_{ij}} - \frac{1}{3} \overline{s_{mm}} \right]_{ij} - C_D C^2 \frac{k^3}{3} \left[ \overline{s_{ik} s_{kj}} - \frac{1}{3} \overline{s_{mn} s_{mn}} \right]_{ij} + k \frac{(1 - C_3) \left[ G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right]}{C_1} \quad (13)$$

为进行比较,还采用了线性湍浮力应力模型(以下简称线性模型)计算,其表达式为

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k_{ij} - C \frac{k^2}{x_j} \left[ \frac{U_i}{x_j} + \frac{U_j}{x_i} \right] + k \frac{(1 - C_3) \left[ G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right]}{C_1} \quad (14)$$

式中  $C = C - C_a$ ,  $U, V, P, C, \rho, k$  分别为水平速度、垂向速度、动水压力、浓度、密度、紊动能和耗散率  $D$  为污染物的分子扩散系数,一般可忽略;  $\nu$  为动力粘滞系数  $C_a, a$  分别为环境浓度、环境密度  $R_f$  为通量Richardson数,  $R_f = -\frac{1}{2} \frac{G}{P_k + G_k}$ ,  $G$  是垂直于射流方向的侧向脉动分量的浮力产生项,对垂向射流,  $G = 0$ ; 对水平射流,  $G = 2G_k$

方程中的常数如表1所示 其中  $C_k, C$  由 C. J. Chen 和 K. Singh<sup>[8]</sup> 计算优化得到,不同于标准  $k_\epsilon$  模型中的常数

表 1

$C$	$C_k$	$C$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_D$	$C_1$	$C_3$
0.09	0.9	2.0	1.44	1.92	0.8	1.68	2.2	0.55

本文用有限体积法离散交错网格,并用SIMPLEC算法求解

计算工况包括 1) 静止环境中垂向平面纯射流、浮射流和羽流,其结果与实验资料作了比较,纯射流和浮射流的计算结果还与 Chen 和 Singh 的双尺度代数应力模型作了对比; 2) 横流作用下的浮射流(见图1),其结果与纯射流作了比较

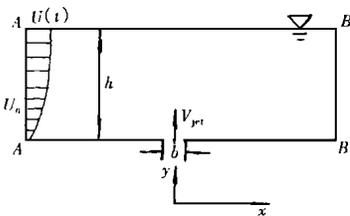


图 1 潮流中的射流示意图

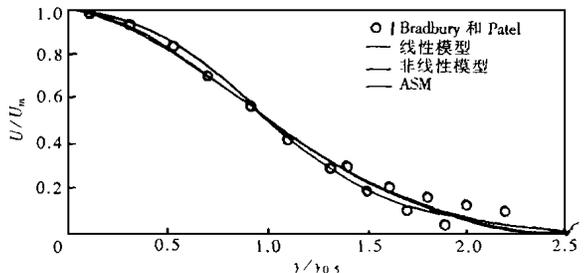
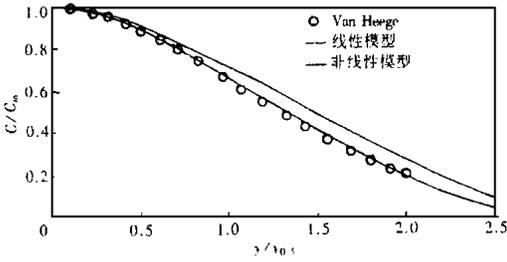
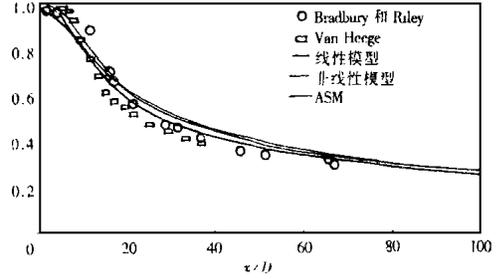


图 2 (a) 断面速度分布



(b) 断面浓度分布

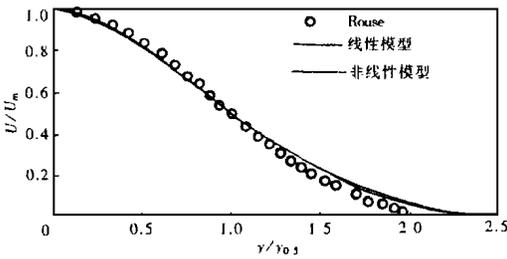


(c) 轴线速度分布

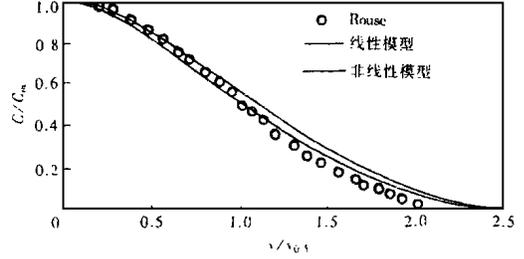
图2 静止环境中纯射流实验与计算比较

静止环境中垂向平面纯射流的断面速度分布、浓度速度分布、轴线流速分布分别如图2(a)、(b)、(c)所示。可见对断面速度分布,三种模型预测均较好;对断面浓度分布,非线性模型明显优于线性模型(双尺度模型无浓度分布结果);对轴线流速分布,非线性模型略优于线性模型和双尺度模型。

静止环境中垂向平面羽流计算的断面速度分布、浓度速度分布分别如图3(a)、(b)所示。可见,两种模型对断面速度分布和断面浓度分布预测均较好,但非线性模型对断面浓度分布预测更准确(双尺度模型无计算结果)。

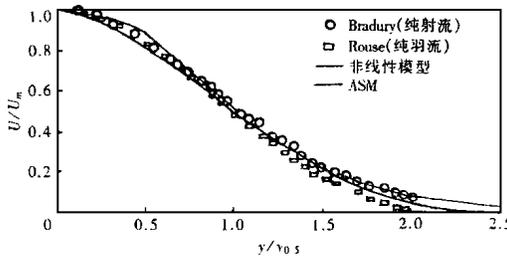


(a) 断面速度分布

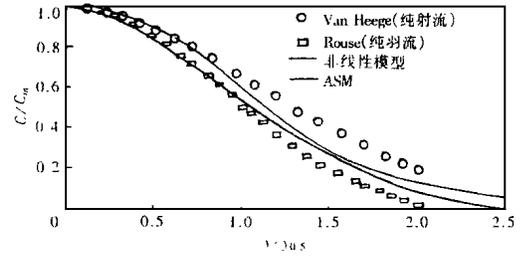


(b) 断面浓度分布

图3 静止环境中羽流实验与计算比较



(a) 断面速度分布



(b) 断面浓度分布

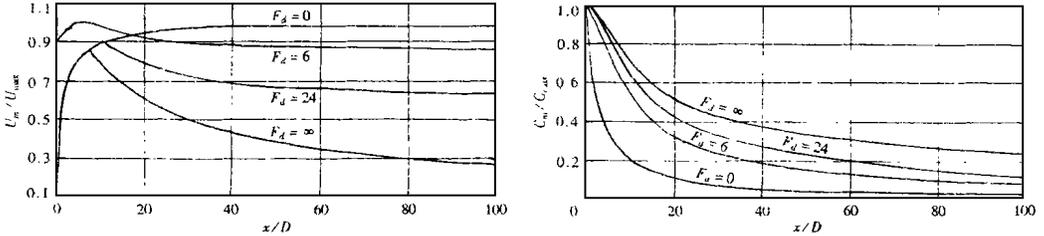
图4 静止环境中浮射流计算比较 ( $F_d = 24$ )

静止环境中垂向平面浮射流计算结果如图4所示。计算工况为密度 Froude 数为 24 的浮射流。浮射流介于纯射流和羽流之间,计算结果也介于纯射流和羽流的实验结果之间。

非线性模型计算的不同密度 Froude 数浮射流的轴线流速和轴线浓度分别如图5(a)、(b)所示。从中可得到结论:浮力作用减缓了轴线流速的衰减,加剧了轴线浓度的衰减。

横流作用下的浮射流与纯射流在射流出口附近的浓度分布如图 6 示 可见浮力加剧了射流出口附近的紊动, 使得物质扩散加快, 浓度降低, 结果是合理的

通过不同情况下计算结果与实验结果比较, 以及不同模型计算结果之间的比较, 可以得到结论: 本文提出的将无浮力模型改进成湍浮力模型的方法是可靠的; 非线性模型比线性模型更优越, 与代数应力模型的精度相当



(a) 轴线速度分布

(b) 轴线浓度分布

图 5 不同密度 Froude 数下的轴线流速和轴线速度分布 (计算)

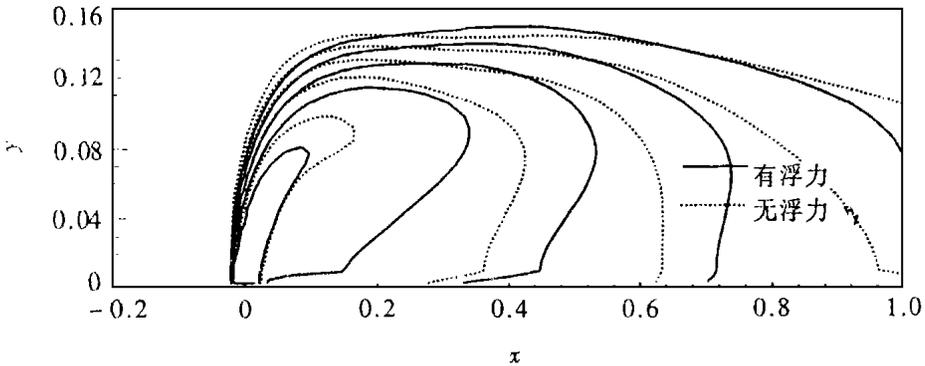


图 6 横流作用下的纯射流和浮射流浓度等值线图比较

### 3 结 论

1 本文分析了各种湍流模型的优缺点, 在隐式代数应力模型的基础上, 将应力的产生归结为应变和浮力作用两部分, 并以此为根据, 在非线性模型的基础上计及浮力作用, 提出了非线性的各向异性湍浮力模型

2 经过模型验证与比较, 说明本文的模型避免了数值奇异, 计算量小, 明显优于线性  $k_\epsilon$  模型又易于在线性  $k_\epsilon$  模型程序的基础上修改 对平二维浮射流的计算表明, 具有较高的精度

### [参 考 文 献]

- [1] Gatski T B, Speziale C G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows[J]. J Fluid Mech, 1993, 254(7): 59~ 78.
- [2] Pope S B. A more general effective-viscosity hypothesis[J]. J Fluid Mech, 1975, 72(2): 331~ 340.
- [3] Speziale C G. On nonlinear  $k_\epsilon$  and  $k_\epsilon$  models of turbulence[J]. J Fluid Mech, 1987, 178(5): 450~ 475.

- [4] Rubinstein R, Barton J M. Nonlinear reynolds stress models and the renormalization group[ J]. Phys Fluids ,1990, A2(8):1472~ 1476.
- [5] Shih T H, Liou W W, Shabbir A, et al. A New  $k_{\epsilon}$  eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows[ J]. Computers Fluids, 1995, 24(3):227~ 238.
- [6] Yakhot V, Orszag S A. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique[ J]. Phys Fluids, 1992, A4(7): 1510~ 1520.
- [7] 周力行. 湍流两相流动与燃烧的数值模拟[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.
- [8] Chen C J, Singh K. Development of a Two\_Scale Turbulence Model and Its Applications[ R]. IIHR Report, 299, 1986, Oct.

## Study on Anisotropic Buoyant Turbulence Model

Yang Kun, Hong Yiping, Zhou Xueyi, Li Yuliang

(Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua

University, Beijing 100084, P R China)

**Abstract:** By analyzing the components of Reynolds stresses of implicit algebraic stress model( IASM) in the paper, that Reynolds stresses in buoyant turbulent flows were produced by both strain and buoyancy is considered. Consequently, a nonlinear anisotropy buoyant turbulence model was developed by applying linearity of equilibrium hypothesis to Reynolds stress transports. The model avoids numerical singularity and its reliability is verified by the comparisons between predictions and experimental data.

**Key words:** algebraic stress model; buoyant turbulence model; anisotropy