应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 01_0030_09

Banach 空间一阶脉冲微分方程的初值问题

孙钦福, 栾世霞

(曲阜师范大学 数学系, 山东曲阜 273165)

(张石生推荐)

摘要: 利用单调迭代方法, 在 Banach 空间中研究了更为一般的一阶脉冲微分方程的初值问题的最小最大拟解的存在性及迭代逼近程序

关 键 词: Banach 空间; 一阶脉冲微分方程; 非紧性测度; 最小最大拟解
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

文[1] 在 R^k 空间讨论了一阶脉冲微分系统初值问题 (IVP)

$$\left.\begin{array}{l} u = f(t, u, u) \qquad (t \quad t_i), \\ u|_{t=t_i} = I_i(u(t_i)) \qquad (i = 1, 2, \quad , m), \\ u(0) = x_0, \end{array}\right\} \tag{*}$$

的最小最大拟解的存在性及迭代逼近、本文, 我们研究了一般的实 Banach 空间中更为一般的一阶脉冲微分方程初值问题(IVP)

$$\left.\begin{array}{l} u = f(t, u, u, Tu, Su) \quad (t \quad t_i), \\ u|_{t=t_i} = I_i(u(t_i), u(t_i)) \quad (i = 1, 2, \quad , m), \\ u(0) = x_0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

的最小最大拟解的存在性及迭代逼近, 其中: $f \quad C[J \quad E \quad E \quad E \quad E, E]$, E 为实的 Banach 空间,

$$J = [0, a], a > 0, 0 < t_1 < t_2 < \quad < t_m < a, I_i \quad C[E, E],$$

$$u|_{t+t_i} = u(t_i^+) - u(t_i^-)(i = 1, 2, \quad , m), x_0 \quad E, Tu(t) = \int_0^t k(t, s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$Su(t) = \int_0^1 h(t, s)u(s)\mathrm{d}s, k \quad C[D, R^+], \quad h \quad C[D_0, R^+],$$

$$D = \{(t, s) \quad R^2: 0 \quad s \quad t \quad a\},$$

$$D_0 = \{(t, s) \quad R^2: 0 \quad t, s \quad a\}$$

记 $k_0 = \max\{k(t, s): (t, s) \quad D\}$, $h_0 = \max\{h(t, s): (t, s) \quad D_0\}$, N $= \{1, 2, \quad , n,$

收稿日期: 1998_06_12; 修订日期: 1999_07_08
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19871048) 和山东省自然科学基金资助课题(Y97A12017)
作者简介: 孙钦福(1967~) , 男, 讲师, 研究方向, 非线性泛函分析, 已发表论文 7 篇. 97 年获国家级优秀数学成果二等奖.

}

作为直接推论, 我们得到了一阶脉冲微分方程初值问题(IVP)

$$\left.\begin{array}{l} u = f(t, u, Tu, Su) \quad (t \quad t_i), \\ u|_{t=t_i} = I_i(u(t_i)) \quad (i = 1, 2, \quad , m), \\ u(0) = x_0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

的最小最大解的存在性及迭代逼近

本文结果将文[1]的 R^k 空间扩充为一般的实 Banach 空间, 这是用文[1]的方法所不能得到的 同时, 本文结果放宽了文[1] ~ [3]的增性条件, 放宽了文[2]、[3]的紧型条件, 去掉了 f 在每个 $I \quad R_R \quad B_R \quad B_R$ 上一致连续这一强的假设 因而, 本文改进和推广了最近的许多结果

1 预备知识和引理

本文总假定 E 为实的 Banach 空间, $J = [0, a]$ 记 $J_0 = [0, t_1], J_1 = (t_1, t_2], \quad , J_m = (t_m, a], J = J/\{t_1, t_2, \quad , t_m\}$ 令 $PC[J, E] = \{x: J \quad E: x(t)$ 在 $t \quad t_i$ 时连续, 在 $t = t_i$ 时左连续, 且右极限 $x(t_i^+)$ 存在, $i = 1, 2, \quad , m\}$ 在范数 $x_{PC} = \sup_J x(t)$ 下, $PC[J, E]$ 成为一个 Banach 空间 令 $K = \{x \quad PC[J, E]: x(t) \quad 0, t \quad J\}$, 易证 K 为 $PC[J, E]$ 中的锥 序区间 $[u_0, v_0]_{PC} = \{x \quad PC[J, E]: u_0(t) \quad x(t) \quad v_0(t), t \quad J\}$

设 P 是 E 中的锥, 则 P 在 E 中导出一个半序 , 由 K 在 $PC[J, E]$ 中导出的半序仍用 表示 E 中的锥 P 称为正规的, 若存在常数 $N > 0$, 使对任意 $x, y, \quad E, \quad x \quad y$, 有 $x \quad N \quad y$ 锥 P 正规的充要条件是 E 中的任何序区间 $[x, y] = \{z \quad E: x \quad z \quad y\}$ 都是有界的; 锥 P 称为正则的, 若对 E 中的每一个序有上界的递增序列都有极限 分别用 $(\ )$ 和 $(\ )$ 记 Kuratowski 和 Hausdorff 非紧性测度, 设 B 是 E 中的有界集, 则有

$$(B) \qquad (B) \quad 2\,(B) \qquad (3)$$

为了证明主要结果, 需要下列引理:

引理1 1[4] $x \quad P \quad (x) \quad 0, \qquad P^*$

引理1 2[5] 若 $B \quad C[I, E]$ 是等度连续的有界集, 则 $(B) = (B(I)), \ (B(I)) = \max_{t \quad I} (B(t))$, 其中

$$B(t) = \{u(t): u \quad B\} \quad E$$

引理1 3[4] 设 E 是可分的 Banach 空间, $J = [a, b], \{x_n\} \quad C[J, E]$, 若存在 $\quad L[a, b]$, 使得 $x_n(t) \quad (t), t \quad J, n \quad \mathbf{N}$, 则 $(t) = (\{x_n(t): n \quad \mathbf{N}\})$ 是可积的, 且

$$\left(\left\{\int_a^b x_n(t)\,dt: n \quad \mathbf{N}\right\}\right) \qquad \int_a^b (t)\,dt$$

引理1 4[6] 设 $J = [a, b], B \quad C[J, E]$ 是等度连续的有界集, 则 $(\{u(t): u \quad B\})$ 关于 $t \quad J$ 连续, 且

$$\left(\left\{\int_a^b u(t)\,dt: u \quad B\right\}\right) \qquad \int_a^b (\{u(t): u \quad B\})\,dt$$

引理1 5 若 $m(t) \quad C[I, R], I = \quad t_0, t_0 + \ b]$ 满足: 当 $I = [t_0, t_0 + b]$ 时, $m(t_0) \quad 0$, 当 $I = (t_0, t_0 + b]$ 时, $m(t_0^+) = \lim_{t \quad t_0+0} m(t) \quad 0$, 且当 $t \quad (t_0, t_0 + b)$ 时有

$$m(t) \quad -Mm(t)-Q\ {}_{t_0}^{t} k(t,s)m(s)\mathrm{d}s, \qquad (4)$$

其中 $M > 0$, $Q \quad 0$ 为满足下列条件之一的常数:

1) $Q = 0, M > 0$;

2) $bQk_0(\mathrm{e}^{Mb} - 1) \quad M$;

3) $b(M + bQk_0) \quad 1$,

则 $m(t) \quad 0 \quad (t \quad I)$

证明 若 1) 成立, 则易证 $m(t) \quad 0 \quad (t \quad I)$

若 2) 和 3) 成立, 有如下两种情况:

a) $I = [t_0, t_0 + b]$,

若 2) 或 3) 成立, 则由[7]引理 1 知 $m(t) \quad 0, (t \quad I)$

b) $I = (t_0, t_0 + b]$,

令 $$m^*(t) = \begin{cases} m(t) & (t \quad (t_0, t_0 + b]), \\ m(t_0^+) & (t = t_0), \end{cases}$$

则 $m^*(t) \quad C([t_0, t_0 + b], R)$, 且 $m^*(t_0) = m(t_0^+) \quad 0$, 则由(4) 及 a) 知 $m^*(t) \quad 0, (t$ $[t_0, t_0 + b])$, 即 $m(t) \quad 0, (t \quad t_0, t_0 + b])$

为方便起见, 列出本文用到的假设

H1) 存在 $u_0, v_0 \quad PC[J, E] \quad C^1[J, E]$, $u_0 \quad v_0$ 是 IVP(1) 的一对拟下、上解, 即

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 \quad f(t, u_0, v_0, Tu_0, Su_0), & (t \quad t_i), \\ u_0|_{t=t_i} \quad I_i(u_0(t_i), v_0(t_i)) & (i = 1, 2, \quad , m), \\ u_0(0) \quad x_0 & \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} v_0 \quad f(t, v_0, u_0, Tv_0, Sv_0), & (t \quad t_i), \\ v_0|_{t=t_i} \quad I_i(v_0(t_i), u_0(t_i)) & (i = 1, 2, \quad , m), \\ v_0(0) \quad x_0 & \end{array}\right\}$$

H1) 存在 $u_0, v_0 \quad PC[J, E] \quad C^1[J, E]$, $u_0 \quad v_0$ 是 IVP(2) 的一对下、上解, 即

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 \quad f(t, u_0, Tu_0, Su_0), & (t \quad t_i), \\ u_0|_{t=t_i} \quad I_i(u_0(t_i)) & (i = 1, 2, \quad , m), \\ u_0(0) \quad x_0 & \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} v_0 \quad f(t, v_0, Tv_0, Sv_0), & (t \quad t_i), \\ v_0|_{t=t_i} \quad I_i(v_0(t_i)) & (i = 1, 2, \quad , m), \\ v_0(0) \quad x_0 & \end{array}\right\}$$

H2) 对 $t \quad J, x, y, x^*, y^* \quad [u_0, v_0]_{PC}, x^* \quad x, y^* \quad y$

$$f(t, x, y^*, Tx, Sx) - f(t, x^*, y, Tx^*, Sx^*) \quad -M(x - x^*) - QT(x - x^*)$$

且对 $u_0(t_i) \quad x^* \quad x \quad v_0(t_i), u_0(t_i) \quad y^* \quad y \quad v_0(t_i)$

$$I_i(x, y^*) \quad I_i(x^*, y) \qquad (i = 1, 2, \quad , m),$$

其中 $M > 0$, $Q \quad 0$ 为满足下列三条件之一的常数:

1) $Q = 0, M > 0$;

2) $aQk_0(e^{Ma} - 1) \quad M;$

3) $a(M + aQk_0) \quad 1$

$H_2)$ 对 $t \quad J, x, x^* \quad [u_0, v_0]_{PC}, x^* \quad x,$

$f(t, x, Tx, Sx) - f(t, x^*, Tx^*, Sx^*) \quad - M(x - x^*) - QT(x - x^*)$ 且对 $u_0(t_i) \quad x^* \quad x \quad v_0(t_i),$

$$I_i(x^*) \quad I_i(x) \quad (i = 1, 2, \quad, m),$$

其中 $M > 0, Q \quad 0$ 是满足 $H_2)$ 中三条件之一的常数

$H_3)$ 对 $t \quad I$ 及单调有界序列 $B_1, B_2 \quad [u_0, v_0]_{PC}$, 有

$$(f(t, B_1(t), B_2(t), TB_1(t), SB_1(t))) \quad L_1 \max\left\{ (B_1(t)), \ (B_2(t))\right\} + L_2 \ (TB_1(t)) + L_3 \ (SB_1(t));$$

$$(I_i(B_1(t_i), B_2(t_i))) \quad M_i \max\left\{ (B_1(t_i)), \ (B_2(t_i))\right\}, (i = 1, 2, \quad, m),$$

其中 $L_j \quad 0(j = 1, 2, 3)$ 与 $M_i \quad 0(i = 1, 2, \quad, m)$ 为常数且满足

$$2a(L_1 + M + aL_2k_0 + aL_3h_0 + 2aQk_0) + \sum_{i=1}^{m} M_i < 1$$

$H_3)$ 对 $t \quad I$ 及单调有界序列 $B \quad [u_0, v_0]_{PC}$, 有

$$(f(t, B(t), TB(t), SB(t))) \quad L_1 \ (B(t)) + L_2 \ (TB(t)) + L_3 \ (SB(t)),$$

$$(I_i(B(t_i))) \quad M_i(\ (B(t_i))) \quad (i = 1, 2, \quad, m),$$

其中 $L_j \quad 0(j = 1, 2, 3), M_i \quad 0(i = 1, 2, \quad, m)$ 为常数且满足

$$2a(L_1 + M + aL_2k_0 + aL_3h_0 + 2aQk_0) + \sum_{i=1}^{m} M_i < 1$$

2 主要结果

定理2 1 设 E 是实Banach空间, P 是 E 中正规锥, 若假设 $H_1) \sim H_3)$ 成立, 则IVP (1) 在 $[u_0, v_0]_{PC}$ 中存在最小最大拟解对 (u^*, v^*), 更进一步, 以 u_0, v_0 为初始元, 作迭代列

$$\left.\begin{aligned} u_n(t) = & e^{-Mt}\left\{ x_0 + \int_0^t [f(s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s), Tu_{n-1}(s), Su_{n-1}(s)) + \right. \\ & \left. Mu_{n-1}(s) - QT(u_n - u_{n-1})(s)] e^{MS} ds \right\} + \\ & \sum_{0<t_i<t} \exp[- M(t - t_i)] I_i(u_{n-1}(t_i), v_{n-1}(t_i)), \\ v_n(t) = & e^{-Mt}\left\{ x_0 + \int_0^t [f(s, v_{n-1}(s), u_{n-1}(s), Tv_{n-1}(s), Sv_{n-1}(s)) + \right. \\ & \left. Mv_{n-1}(s) - QT(v_n - v_{n-1})(s)] e^{MS} ds \right\} + \\ & \sum_{0<t_i<t} \exp[- M(t - t_i)] I_i(v_{n-1}(t_i), u_{n-1}(t_i)), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

则 $\left\{u_n(t)\right\}$ 和 $\left\{v_n(t)\right\}$ 在 J 上分别一致收敛于 $u^*(t)$ 和 $v^*(t)$, 且满足

$$u_0 \quad u_1 \quad \quad u_n \quad \quad u^* \quad v^* \quad \quad v_n \quad \quad v_1 \quad v_0 \quad (6)$$

证明 对任意给定的 $g, h \quad [u_0, v_0]_{PC}$, 考察一阶线性微分方程初值问题 (IVP)

$$\left.\begin{aligned} &u' = f(t, g, h, Tg, Sg) - M(u - g) - QT(u - g), (t \neq t_i), \\ &\Delta u|_{t=t_i} = I_i(g(t_i), h(t_i)) \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \\ &u(0) = x_0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

直接验证可知

$$u(t) = \mathrm{e}^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s, g(s), h(s), Tg(s), Sg(s)) + Mg(s) - QT(u - g)(s)]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s\right\} + \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t - t_i)] I_i(g(t_i), h(t_i))$$

是 IVP (7) 在 $PC[J, E] \cap C^1[J', E]$ 中的唯一解. 对 $g, h \in [u_0, v_0]_{PC}$, 令

$$A(g, h)(t) = \mathrm{e}^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s, g(s), h(s), Tg(s), Sg(s)) + Mg(s) - QT(u - g)(s)]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s\right\} + \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t - t_i)] I_i(g(t_i), h(t_i)), \tag{8}$$

则 A 映 $[u_0, v_0]_{PC} \times [u_0, v_0]_{PC}$ 入 $PC[J, E] \cap C^1[J', E]$, 且迭代列(6) 可表为

$$u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}), \qquad v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}) \tag{9}$$

更进一步地, 算子 A 满足:

1) $u_0 \leq A(u_0, v_0), (A(v_0, u_0) \leq v_0)$,

2) $A(g_1, h_1) \leq A(g_2, h_2) \quad (\forall g_1, g_2, h_1, h_2 \in [u_0, v_0]_{PC}; g_1 \leq g_2, h_2 \leq h_1)$

先证 1) 令 $u_1 = A(u_0, v_0)$, 则由 A 的定义知:

$$\left.\begin{aligned} &u_1' = f(t, u_0, v_0, Tu_0, Su_0) - M(u_1 - u_0) - QT(u_1 - u_0) \quad (t \neq t_i), \\ &\Delta u_1|_{t=t_i} = I_i(u_0(t_i), v_0(t_i)) \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \\ &u_1(0) = x_0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

令 $w = u_0 - u_1$, 对 $\forall \varphi \in P^*$, 令 $m(t) = \varphi(w(t)), t \in J$, 则由假设 H_1 和(10) 式可知 $m(0) \leq 0$, 且当 $t \neq t_i$ 时有

$$m'(t) = \varphi(w'(t)) \leq -Mm(t) - QTm(t), \tag{11}$$

从而由引理 1.5 知, $m(t) \leq 0, t \in J_0$, 故由 φ 的任意性可知 $w(t) \leq 0, t \in J_0$, 特别地 $w(t_1) \leq 0$, 而

$$\Delta w|_{t=t_1} = \Delta u_0|_{t=t_1} - \Delta u_1|_{t=t_1} \leq 0.$$

故 $w(t_1^+) = \Delta w|_{t=t_1} + w(t_1) \leq 0$, 从而 $m(t_1^+) \leq 0$, 于是由(11) 式及引理 1.5 知 $m(t) \leq 0$, $t \in J_1$. 类似地我们可证 $m(t) \leq 0, t \in J_2, \cdots, J_m$, 于是 $w(t) \leq 0, t \in J$, 因此 $u_0 \leq A(u_0, v_0)$. 同理可证 $A(v_0, u_0) \leq v_0$.

再证 2) 令 $x_1 = A(g_1, h_1), x_2 = A(g_2, h_2)$, 则由 H_2) 和算子 A 的定义可得 $(x_1 - x_2)(0) = 0$, 且当 $t \neq t_i$ 时有

$$\begin{aligned} x_1' - x_2' = &f(t, g_1, h_1, Tg, Sg_1) - M(x_1 - g_1) - QT(x_1 - g_1) - \\ &f(t, g_2, h_2, Tg_2, Sg_2) - M(x_2 - g_2) - QT(x_2 - g_2) \leq \\ &-M(x_1 - x_2) - QT(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

对 $\forall \varphi \in P^*$, 令 $m(t) = \varphi(w(t)) = \varphi(x_1(t) - x_2(t))$, 则 $m(0) = 0$, 且当 $t \neq t_i$ 时有

$$m'(t) \leq -Mm(t) - QTm(t). \tag{12}$$

同(1)的证明，我们有 $m(t)\le 0,\ t\in J_0, J_1, \dots, J_m$. 因此 $A(g_1, h_1)\le A(g_2, h_2)$.

由 $u_0\le v_0$, (1) 和 (2) 式，利用归纳法易得

$$u_0\le u_1\le\cdots\le u_n\le\cdots\le v_n\le\cdots\le v_1\le v_0. \tag{13}$$

且 A 映 $[u_0, v_0]_{PC}\times[u_0, v_0]_{PC}$ 入 $[u_0, v_0]_{PC}$.

下证 $\{u_n(t)\}$ 和 $\{v_n(t)\}$ 分别在 J 上一致收敛于某 $u^*(t), v^*(t)\in[u_0, v_0]_{PC}$. 事实上，由 P 的正规性易知 K 是正规的，故序区间 $[u_0, v_0]_{PC}$ 有界，对任意的 $g, h\in[u_0, v_0]_{PC}$，由假设 $H_1)$ 和 $H_2)$ 可得

$$\begin{aligned}
u_0'+Mu_0+QTu_0 &\le f(t, u_0, v_0, Tu_0, Su_0)+Mu_0+QTu_0\le\\
&f(t, g, h, Tg, Sg)+Mg+QTg\le\\
&f(t, v_0, u_0, Tv_0, Sv_0)+Mv_0+QTv_0\le\\
&v_0'+Mv_0+QT_0,
\end{aligned}$$

于是 $\{f(t, g, h, Tg, Sg): g, h\in[u_0, v_0]_{PC}\}$ 是 $PC[J, E]$ 中的有界集，令

$$B_{10}=\{u_n\mid n=0, 1, 2, \dots\},\quad B_{20}=\{v_n\mid n=0, 1, 2, \dots\},$$
$$B_1=\{u_n\mid n\in\mathbf{N}\},\quad B_2=\{v_n\mid n\in\mathbf{N}\},$$

由 $[u_0, v_0]_{PC}$ 有界及(13)式知，$B_{i0}, B_i\ (i=1, 2)$ 都是 $[u_0, v_0]_{PC}$ 中的单调有界列，再由(7)式易知

$$u_n'=f(t, u_{n-1}, v_{n-1}, Tu_{n-1}, Su_{n-1})-M(u_n-u_{n-1})-QT(u_n-u_{n-1})\ (t\ne t_i), \tag{14}$$
$$v_n'=f(t, v_{n-1}, u_{n-1}, Tv_{n-1}, Sv_{n-1})-M(v_n-v_{n-1})-QT(v_n-v_{n-1})\ (t\ne t_i), \tag{15}$$

故 $\{u_n'\}$、$\{v_n'\}$ 是 $PC[J, E]$ 中的有界集，由中值定理易证 $B_{i0}, B_i\ (i=1, 2)$ 在每个 $J_i\ (i=1, 2, \dots, m)$ 上等度连续，由引理 1.2，我们有

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(B_{i0})&=\max_{t\in J}\alpha(B_{i0}(t))=\alpha(B_{i0}(J))\quad(i=1, 2),\\
\alpha(B_i)&=\max_{t\in J}\alpha(B_i(t))=\alpha(B_i(J))\quad(i=1, 2).
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

又由非紧性测度的知识知 $\alpha(B_{i0}(t))=\alpha(B_i(t)),\ i=1, 2$. 令 $m(t)=\alpha(B_1(t)),\ n(t)=\alpha(B_2(t))$，则 $m(0)=n(0)=\alpha(\{x_0\})=0$，且 $m(t), n(t)\in C[I, R^+]$，对每个 n，由 $u_n(t)$、$v_n(t)$ 的连续性可推知 $\{u_n(t), v_n(t): t\in J_i\}\ (i=1, 2, \dots, m)$ 是 E 中的可分集，故不失一般性可设 E 是可分的 Banach 空间，(否则可用 $\{u_n(t), v_n(t): t\in J, n\in\mathbf{N}\}$ 生成的 E 中的闭子空间来代替)，于是由(8), (9), (3) 式及引理 1.3 可得

$$\begin{aligned}
m(t)\le\ &\alpha\Big(\int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, B_{10}(s), B_{20}(s), TB_{10}(s), SB_{10}(s))+MB_{10}(s)-\\
&QT(B_1-B_{10})(s)]\mathrm{d}s\Big)+\sum_{0<t_i<t}\alpha(I_i(B_{10}(t_i), B_{20}(t_i)))\le\\
&2\int_0^t[\beta(f(s, B_{10}(s), B_{20}(s), TB_{10}(s), SB_{10}(s)))+M\beta(B_{10}(s))+\\
&2Q\beta(TB_1(s))]\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^m M_i\max\{m(t_i), n(t_i)\}\le\\
&2\int_0^t[\alpha(f(s, B_{10}(s), B_{20}(s), TB_{10}(s), SB_{10}(s)))+Mm(s)+\\
&2Q\alpha(TB_1(s))]\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^m M_i\max\{m(J), n(J)\}\le
\end{aligned}$$

$$2\int_0^t[(L_1+M)\max\{m(s),n(s)\}+(L_2+2Q)\alpha(TB_1(s))+$$

$$L_3\alpha(SB_1(s))]\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^m M_i\max\{m(J),n(J)\}. \tag{17}$$

由 $B_1(s)$ 的一致有界性及 $k(t,s)$, $h(t,s)$ 的一致连续性可得 $k(t,s)B_1(s)$、$h(t,s)B_1(s)$ 是一致有界的, 且在 J 上是分段等度连续的, 于是由引理 1.4 得

$$\alpha(TB_1(s))\le\alpha\left(\int_0^t k(t,s)B_1(s)\mathrm{d}s\right)\le k_0\int_0^t m(s)\mathrm{d}s,$$

$$\alpha(SB_1(s))\le\alpha\left(\int_0^1 h(t,s)B_1(s)\mathrm{d}s\right)\le h_0\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s.$$

于是

$$m(t)\le[2a(L_1+M+aL_2k_0+2aQk_0+aL_3h_0)+\sum_{i=1}^m M_i]\max\{m(J),n(J)\}, \tag{18}$$

同理可得

$$n(t)\le[2a(L_1+M+aL_2k_0+2aQk_0+aL_3h_0)+\sum_{i=1}^m M_i]\max\{m(J),n(J)\}. \tag{19}$$

令 $P(t)=\max\{m(t),n(t)\}$, 则由(18)、(19) 式可得

$$P(t)\le[2a(L_1+M+aL_2k_0+2aQk_0+aL_3h_0)+\sum_{i=1}^m M_i]P(J).$$

于是由(16) 式和假设 H_3) 可知

$$\alpha(B_i)=0,\ i=1,2.$$

即 $B_i(i=1,2)$ 是 $PC[J,E]$ 中的相对紧集, 从而 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 分别存在子列 $\{u_{n_k}\}$, $\{v_{n_k}\}$ 一致收敛于某 $u^*, v^*\in PC[J,E]$, 又由 K 的正规性及 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 的单调性易证 $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$ 在 E 中关于 $t\in J$ 分别一致收敛于 $u^*(t)$, $v^*(t)$, 从而由(13) 式易知(6) 式成立.

下证 u^*, v^* 是 IVP (1) 的一对拟解, 对 $\forall\varepsilon>0$, 令 $J_{0,\varepsilon}=[0,t_1-\varepsilon]$, 则 $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$ 关于 $t\in J_{0,\varepsilon}$ 一致收敛. 于是由(14) 式, $u_n(0)=x_0$ 及文[5] 系 2.1.1 知

$$\left.\begin{aligned}&u^{*\prime}(t)=f(t,u^*(t),v^*(t),Tu^*(t),Su^*(t))(t\in J_{0,\varepsilon}),\\&u^*(0)=x_0.\end{aligned}\right\}$$

由 ε 的任意性有

$$\left.\begin{aligned}&u^{*\prime}(t)=f(t,u^*(t),v^*(t),Tu^*(t),Su^*(t)),\ t\in[0,t_1),\\&u^*(0)=x_0.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

类似于(20) 易证

$$u^{*\prime}=f(t,u^*,v^*,Tu^*,Su^*),\ t\in(t_i,t_{i+1}),\ i=1,2,\cdots,m,$$

对每个 $i(1\le i\le m)$, 由 A 的定义, 我们有

$$u_n(t_i^+)=u_n(t_i)+I_i(u_{n-1}(t_i),v_{n-1}(t_i)), \tag{21}$$

而

$$\left.\begin{aligned}&u_n(t_i^+)\to u^*(t_i^+),\quad u_n(t_i)\to u^*(t_i),\\&I_i(u_{n-1}(t_i),v_{n-1}(t_i))\to I_i(u^*(t_i),v^*(t_i))\quad(n\to\infty),\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

于是由(21)、(22) 两式及极限的唯一性可得

$$u^*|_{t=t_i} = u^*(t_i^+) - u^*(t_i) = I_i(u^*(t_i), v^*(t_i)). \tag{23}$$

由(21)、(23)两式知 $u^* \in PC[J,E] \cap C^1[J_c,E]$，且满足

$$\left.\begin{aligned} &u^{*\prime} = f(t, u^*, v^*, Tu^*, Su^*) \quad (t \neq t_i),\\ &\Delta u^*|_{t=t_i} = I_i(u^*(t_i), v^*(t_i)) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),\\ &u^*(0) = x_0. \end{aligned}\right\}$$

同理可得 $v^* \in PC[J, E] \cap C^1[J_c, E]$，且满足

$$\left.\begin{aligned} &v^{*\prime} = f(t, v^*, u^*, Tv^*, Sv^*), (t \neq t_i),\\ &\Delta v^*|_{t=t_i} = I_i(v^*(t_i), u^*(t_i)) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),\\ &v^*(0) = x_0. \end{aligned}\right\}$$

即 u^*, v^* 是 IVP (1) 的一对拟解。

由常规方法易证 (u^*, v^*) 是 IVP (1) 的最小最大拟解对。

当 P 为正则锥时，由定义可知单调有界序列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 是收敛的、故 P 正则时，由定理 2.1 的证明过程可知 $H_3)$ 可去掉。 若 E 为弱序列完备的 Banach 空间，P 为正规锥，则 P 为正则的。 故在这种情况下 $H_3)$ 亦可去掉。 由此得下面两个定理：

定理 2.2 设 E 为弱序列完备的实 Banach 空间，P 为 E 中正规锥，假设 $H_1)$，$H_2)$ 成立，则定理 2.1 的结论成立。

定理 2.3 设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中正则锥，假设 $H_1)$，$H_2)$ 成立，则定理 2.1 的结论成立。

注 2.1 R^k 空间是弱序列完备的实 Banach 空间，锥 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_k): x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k\}$ 是正规的，由定理 2.1 的证明过程可知，将假设 $H_2)$ 中的非负常数换为相应的非负矩阵，对 R^k 空间来说定理 2.2 的结论仍成立。 故定理 2.2 是文[1]定理的推广和改进。 而本文定理 2.1 是用文[1]的方法所不能得到的。

类似于定理 2.1、2.2、2.3，我们有下述推论。

推论 2.1 设 E 是实的 Banach 空间，P 为 E 中正规锥，假设 $H_1)' \sim H_3)'$ 成立，则 IVP (2) 在 $[u_0, v_0]_{PC}$ 中存在最小最大解 u^*, v^*，进一步地，以 u_0, v_0 为初始值作迭代列

$$\begin{cases} u_n(t) = x_0 e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, u_{n-1}(s), Tu_{n-1}(s), Su_{n-1}(s)) + Mu_{n-1}(s) - \\ \qquad QT(u_n - u_{n-1})(s)]ds + \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t-t_i)] I_i(u_{n-1}(t_i)), \\ v_n(t) = x_0 e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, v_{n-1}(s), Tv_{n-1}(s), Sv_{n-1}(s)) + Mv_{n-1}(s) - \\ \qquad QT(v_n - v_{n-1})(s)]ds + \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t-t_i)] I_i(v_{n-1}(t_i)). \end{cases}$$

则 $\{u_n(t)\}$ 和 $\{v_n(t)\}$ 在 J 上分别一致收敛于 $u^*(t)$、$v^*(t)$，且满足

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u^* \leq v^* \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0.$$

推论 2.2 设 E 为弱序列完备的实 Banach 空间，P 为 E 中正规锥，假设 $H_1)' \sim H_2)'$ 成立，则推论 2.1 的结论成立。

推论 2.3 设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中正则锥，假设 $H_1)' \sim H_2)'$ 成立，则推论 2.1 的结论成立。

注 212　推论 211 改进和推广了文[2] 定理 1, 去掉了文[2] ~ [3] f 关于 Tu 项增的假设, 同时也去掉了 f 在每个 I @ B_R @ B_R @ B_R 上一致连续这一强的假设#　推论 212, 213 在特定条件下去掉了文[2] ~ [3] 关于紧型条件的假设, 为具体使用提供了方便#　由注 211 的说明可知, 推论 212 也是文[1] 的推论的推广和改进#

致谢　作者感谢导师刘立山教授、赵增勤教授的精心指导与帮助#

[参 考 文 献]

[1] 张石生, 王凡. 关于一类一阶脉冲微分系统的初值问题[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(4): 279~284.

[2] Guo Dajun, Liu Xinzhi. Extremal solutions of nonlinear impulsive integro_differential equation in Banach spaces[J]. J Math Appl Anal, 1993, **177**(2): 538~ 552.

[3] Erbe L H, Liu Xinzhi. Quasi_solutions of nonlinear impulsive equations in abstract cones[J]. Appl Anal, 1989, **34**(2): 231~ 250.

[4] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. New York: Springer_Verlag, 1985.

[5] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.

[6] Guo Dajun. Extermal solutions of nonlinear Fredholm integral equation in Banach spaces[J]. J North_Eastern Math, 1991, **7**(4): 416~ 423.

[7] 刘立山. Banach 空间非线性混合型微分_积分方程的解[J]. 数学学报, 1995, **38**(6): 721~ 731.

The Initial Value Problems of First Order Impulsive Differential Equations in Banach Spaces

Sun Qinfu,　Luan Shixia

(Department of Mathematics, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, P R China)

Abstract: In this paper, by using of monotone iterative technique, the existence and iterative approximation of the minimax quasi_solutions of the initial value problems for more general first order impulsive differential equations in Banach spaces are investigated.

Key words: Banach space; first order impulsive differential; measure of noncompactness; minimal quasi_solution