文章编号: 1000_0887(2004) 02_0111_10

H_∞ 分散控制系统范数计算的模态综合法(Ⅰ)*

钟万勰[1☆], 吴志刚[1], 高 强[1], 梁以德[2], F.W.威廉姆斯[2]

(1.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023;
☆访问香港城市大学; 2.香港城市大学 建筑系, 香港)

(我刊编委钟万勰来稿)

摘要: 在大系统控制中, H_∞ 分散控制方法将整个系统划分成一系列子系统分别研究, 然后综合设计大系统的分散控制器, 这与结构力学中的子结构分析技术类似。 本着这一思想建立了分散 H_∞ 控制与子结构振动分析的模拟关系、分散控制系统的最优 H_∞ 范数与整体结构一阶本征值之间的对应关系, 进而利用结构力学中的模态综合法和扩展 Wittrick_Williams 算法计算这一参数。 论文的第(Ⅰ)部分主要介绍系统 H_∞ 控制及其本征函数的正交性和展开定理; 第(Ⅱ)部分介绍分散控制系统最优 H_∞ 范数计算的模态综合法及数值算例。

关 键 词: H_∞ 控制; 分散控制; 模态综合; 广义 Rayleigh 商; 扩展 Wittrick_Williams 算法
中图分类号: O32; TP273 文献标识码: A

引 言

大系统控制理论的发展很自然地走向了分散控制(decentralized control)方案[1,2], H_∞ 鲁棒控制理论也随之与分散控制技术相结合用于解决大系统的干扰抑制、可靠控制等问题[3~5]。 从实际控制系统设计的角度讲, 系统临界参数 γ_{cr}^{-2} 的确定是应首先予以解决的问题, 这里 γ_{cr} 是系统的最优 H_∞ 范数。 线性二次 LQ 控制以及 Kalman_Bucy 滤波与结构静力学相模拟[6]; H_∞ 控制与 H_∞ 滤波的临界参数 γ_{cr}^{-2} 与结构力学中稳定与振动问题的本征值互相模拟[7~9]; 本文的工作则进一步表明分散 H_∞ 控制理论对应于结构力学中的动力子结构分析理论。

1 分散 H_∞ 控制

为简单起见, 先考虑状态反馈分散 H_∞ 控制问题。 设大系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_w\boldsymbol{w} + \boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

* 收稿日期: 2002_12_09; 修订日期: 2003_10_08
基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1999032805); 国家自然科学基金资助项目(19732020, 10202004); 英国工程与物理科学研究理事会资助项目(GR/R05437/01)
作者简介: 钟万勰(1934—), 男, 浙江德清人, 教授, 中国科学院院士
(联系人. Tel/Fax: 86_441_4708437; E_mail: zwoffice@dlut.edu.cn)。

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维状态向量, $\boldsymbol{u}$ 是 m_u 维控制向量, $\boldsymbol{w}$ 是 m_w 维干扰噪音向量, 其强度可随时间变化; 矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_w$, $\boldsymbol{B}_u$, $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 均具有恰当的维数; $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_u)$, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_w)$ 可控. 且

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_{m_u},\quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}. \tag{3a, b}$$

有限时间段 $[0, t_{\mathrm{f}}]$ 上的 H_∞ 控制问题可以描述为: 在输入噪音为

$$\|\boldsymbol{w}\|^2 \equiv \int_0^{t_{\mathrm{f}}} \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\mathrm{d}t = 1$$

的条件下, 最优控制系统的响应和输入分别为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$, 其中控制 $\boldsymbol{u}$ 的选择要使系统的 H_∞ 范数最小, 而干扰噪音 $\boldsymbol{w}$ 的选择则使这一范数为最大. 可以用变分形式将这一问题表达为

$$\|G\|^2 = \max_{\boldsymbol{w}}\min_{\boldsymbol{u}} \frac{\int_0^{t_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})}{\int_0^{t_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

其中 $\|G\|$ 是闭环系统的 H_∞ 范数, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$ 是半正定矩阵, 下标 f 表示在 $t = t_{\mathrm{f}}$ 处取值. 还可将其中的二次指标进一步表示为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_{\mathrm{f}}} (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}}). \tag{5}$$

以上是对整个大系统集中控制问题的建模. 分散控制方法将大系统的状态向量 $\boldsymbol{x}$ 分解为 p 个状态子向量 $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ 之直和, 它们互不相交. 通过分别对 p 个子系统进行控制来实现大系统的控制目标[1~5]. 此时任一子系统的状态方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}_{wi}\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{B}_{ui}\boldsymbol{u}_i + \sum_{j\neq i}^{p}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{u}_i, \tag{7}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示子系统之间的联系, 还可以表示为 $\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{H}_j$ $(i \neq j)$, 而 $\boldsymbol{L}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{ij} < \boldsymbol{I}$. 另外要求 $(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_{ui})$, $(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_{wi})$ 可控, $\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{0}$.

对于无限时间域的分散 H_∞ 控制问题, 文献[3] 给出了下列控制器设计方案: 对预先给定的常数 $\gamma > 0$, 如果存在常数 $\eta_i > 0$ 使得"局部"Riccati 方程

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{B}_{ui}\boldsymbol{B}_{ui}^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}\boldsymbol{B}_{wi}\boldsymbol{B}_{wi}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i + \\ &\qquad \eta_i\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i + \left(\sum_{j\neq i}^{p}\frac{1}{\eta_j}\right)\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i + \boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{0},\end{aligned} \tag{8}$$

存在对称正定解 $\boldsymbol{P}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, 其中 $\boldsymbol{Q}_i$ 是给定的正定矩阵. 则由(6)~(7) 构成的大系统是分散可镇定的, 且闭环大系统的 H_∞ 范数小于 γ[3]. 各子系统的局部状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_i = -\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i. \tag{9}$$

目前分散 H_∞ 控制问题的解法大都基于上述类型的代数 Riccati 方程[3~5], 虽然 $\boldsymbol{Q}_i$ 并不影响此问题的可解性条件[3], 但对于大规模系统, 确定这一系列方程(8) 的可解性条件以及整个系统的最优 H_∞ 范数相对比较困难. 本文给出了基于模态综合理论的计算 H_∞ 分散控制系统临界参数 $\gamma_{\mathrm{cr}}^{-2}$ 的新方法.

为简单起见, 设 $p = 2$, 相应地系统矩阵及向量也成为分块形式

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}n_1\\ n_2\end{matrix},\quad \boldsymbol{z} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{z}_1\\ \boldsymbol{z}_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}q_1\\ q_2\end{matrix}, \tag{10a, b}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{array}{l}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\end{matrix}\right\}\end{array}\begin{array}{l}m_{u1}\\ m_{u2}\end{array},\quad \boldsymbol{w}=\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2\end{matrix}\right\}\begin{array}{l}m_{w1}\\ m_{w2}\end{array},\tag{10c, d}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \varepsilon\boldsymbol{A}_{12}\\ \varepsilon\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{array}{l}n_1\\ n_2\end{array},\tag{11a}$$

$$\boldsymbol{B}_u=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{u11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{u22}\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}m_{u1} & m_{u1}\end{array}\end{array}\begin{array}{l}n_1\\ n_2\end{array},\quad \boldsymbol{B}_w=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{w11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{w22}\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}m_{w1} & m_{w2}\end{array}\end{array}\begin{array}{l}n_1\\ n_2\end{array},\tag{11b, c}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}n_1 & n_2\end{array}\end{array}\begin{array}{l}q_1\\ q_2\end{array},\quad \boldsymbol{D}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}m_{u1} & m_{u2}\end{array}\end{array}\begin{array}{l}q_1\\ q_2\end{array}.\tag{11d, e}$$

从上述公式可以看出，除了 $\boldsymbol{A}$ 阵的分块中有带参数 ε 的子块外，其他的项对于两个状态子向量 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$ 的方程都是分立的，将(10)及(11)代入方程(1)和(2)可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1+\varepsilon\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}_{w11}\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{B}_{u11}\boldsymbol{u}_1,\tag{12a}$$

$$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{u}_1,\tag{12b}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2+\varepsilon\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_{w22}\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{B}_{u22}\boldsymbol{u}_2,\tag{13a}$$

$$\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{D}_{22}\boldsymbol{u}_2.\tag{13b}$$

如果取 $\varepsilon=0$，所得的方程组表明这是两个完全独立的系统，即含 ε 的项将两个子系统联系在一起。在分析时可以先设 $\varepsilon=0$，将它们独立分析，然后再把它们通过含 ε 的项联系在一起。这里要指出，ε 不一定是小参数。文献[7]指出 H_∞ 控制与结构振动本征解问题相模拟，这表明本征函数展开的方法可以用于 H_∞ 控制问题中，尤其对于分散控制的分析。

文献[7]利用精细积分法通过求解一个广义 Rayleigh 商问题来计算 H_∞ 控制的最优参数值 γ_{cr}^{-2}。这个方法意味着 H_∞ 控制与结构振动理论之间存在模拟关系使得模态分析法可以用于 H_∞ 最优控制问题。利用模态分析中的本征函数展开法进行子系统分析要求获得子系统所有的本征函数，因此仅仅一个本征值对于本征函数展开法是不够的。按照模拟理论，在得到各个子系统所有本征函数后，可以将子结构振动分析中的模态综合法用于研究分散 H_∞ 控制问题，本文将对此作详细讨论。

针对两点边值问题的精细积分法还可以进一步用于求解 H_∞ 控制的全部本征解 $[\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t)]$ $(j=1,2,3,\cdots)$，其中 $\varphi_j(t)$ 是无穷多个本征函数。$\varphi_j(t)=[\boldsymbol{x}_{\varphi j}^{\mathrm{T}};\ \lambda_{\varphi j}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 是定义于区间 $[0, t_f]$ 上的向量函数，组成此向量的向量 $\boldsymbol{x}_{\varphi j}$ 和 $\lambda_{\varphi j}$ 分别构成状态向量 $\boldsymbol{x}$ 及其对偶向量 λ 的正交基，相当于结构振动的振型。

精细积分先在初值问题的积分中出现[10~12]，与只能得到近似解的有限差分型传统算法不同，精细积分法可以运用全部计算机字长的精度，因此其结果可以接近于计算机的精度。精细积分随后又推广到两点边值问题[13~15]，Riccati 微分方程与两点边值问题密切相关，故又将精细积分用于求解 Riccati 微分方程，其结果同样接近于计算机精度。文中的本征解的计算也采用精细积分法。

求解各子系统的本征解对后，全系统最优参数 γ_{cr}^{-2} 的计算可通过对子系统本征解的综合而实现，这就是结构振动问题中的模态综合法[16,17]。分散 H_∞ 控制中 γ_{cr}^{-2} 的计算公式可由变分法推导。本文后续各节将介绍分散 H_∞ 控制系统的建模分析与结构动力分析的模态综合法的一致性。

2 子系统 H_∞ 控制的本征解与广义 Rayleigh 商

将大系统分解为各个子系统, 并取 $\varepsilon = 0$, 此时各个子系统皆互相无关• 对其中的任一个子系统, 省略其编号下标, 则问题的变分法表示为

$$\| G \|^2 = \max_{w} \min_{u} \left(\frac{1}{2}\int_0^{t_f} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f) \boldsymbol{S}_f \boldsymbol{x}(t_f) \right), \quad \| \boldsymbol{w} \|^2 = 1, \tag{14}$$

于是问题成为约束下的极小_极大问题, 约束就是动力方程(1) 与输出方程(2)•

对动力约束方程(1) 引入 Lagrange 向量乘子函数 $\lambda(t)$, 并将式(2) 代入变分原理(14)• 对向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 取极值并考虑到式(3) 得

$$\boldsymbol{u} = - \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} \lambda, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{w} = \gamma^{-2} \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}} \lambda, \tag{16}$$

其中 γ 表示系统的 H_∞ 范数• 对于任一个参数 γ^{-2}, 利用式(15) 和(16) 消去 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 给出

$$\begin{cases} J = \displaystyle\int_0^{t_f} \left(- \lambda^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}} + \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \gamma^{-2} \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}} \lambda - \frac{1}{2} \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_u \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} \lambda + \right. \\ \qquad \left. \displaystyle\frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} \right) \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f) \boldsymbol{S}_f \boldsymbol{x}(t_f), \\ \delta J = 0• \end{cases} \tag{17}$$

完成变分运算给出对偶微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{B}_u \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2} \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}) \lambda, \tag{18a}$$

$$\dot{\lambda} = - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \lambda, \tag{18b}$$

对应的边界条件为

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \lambda(t_f) = \boldsymbol{S}_f \boldsymbol{x}(t_f), \tag{19a, b}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是给定初始状态向量• 系统(18) ~ (19) 的全状态向量为

$$\nu(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \lambda(t) \end{Bmatrix}• \tag{20}$$

结束时刻的边界条件(19b) 表明对偶微分方程(18) 的解具有下列关系

$$\lambda(t) = \boldsymbol{S}(t) \boldsymbol{x}(t), \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{S}(t)$ 是一个 $n \times n$ 对称矩阵, $\boldsymbol{x}(t)$ 是待求 n 维向量• 将其代入对偶微分方程(18a, b) 给出

$$\dot{\boldsymbol{S}} = - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}_u \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2} \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{S}(t_f) = \boldsymbol{S}_f, \tag{22}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{B}_u \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2} \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{S}] \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0• \tag{23}$$

方程(22) 是 Riccati 微分方程, 得到矩阵 $\boldsymbol{S}(t)$ 后, 状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以通过向前逐步积分时变微分方程(23) 而解得•

上述问题中 Riccati 微分方程(22) 的求解是关键一步• H_∞ 控制问题要求参数 γ^{-2} 一定是次优的, 即 $\gamma^{-2} < \gamma_{cr}^{-2}$, 其中 γ_{cr}^{-2} 就是基本本征值 γ_1^{-2}• 对于次优参数, 解矩阵 $\boldsymbol{S}(t)$ 在区间[0, t_f] 内可以保证不出现无穷大• $\gamma_{cr}^{-2} = \gamma_1^{-2}$ 只是最小的本征值, 模态分析则需要全部本征值 $\gamma_j^{-2}(j = 1, 2, \cdots)$ 及相应的本征函数向量 $\varphi_j(t)$, 至少是前 n_e 阶本征解• 对于高阶特征值, 期望解矩阵 $\boldsymbol{S}_j(t)$ 在整个时间段[0, t_f] 内解析而不出现无穷大是不可能的, 这里 $\boldsymbol{S}_j(t)$ 是对应于 γ_j^{-2} 的 Riccati 微分方程的解矩阵• 采用 Riccati 微分方程的讲法对此有困难, 但采用区段合并

消元的方法依然可以讲清楚的, 本征函数向量 $\varphi_j(t)$ 则不会发生无穷大的问题• $S_j(t)$ 在力学上的解释是刚度阵, 当参数 γ^{-2} 超过基本本征值 $\gamma_{cr}^{-2}=\gamma_1^{-2}$ 时, "刚度矩阵" 的元素在$[0, t_f]$ 内必然出现无穷大•

上述微分方程是从变分原理(17) 导出的, 它可以改写为

$$\delta(\Pi_1-\gamma^{-2}\Pi_2)=0, \tag{24}$$

其中

$$\Pi_1=\int_0^{t_f}\left[\lambda^T\dot{x}-\lambda^T Ax+\frac{1}{2}\lambda^T B_u B_u^T\lambda-\frac{1}{2}x^T C^T Cx\right]dt-\frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f), \tag{25}$$

$$\Pi_2=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\lambda^T B_w B_w^T\lambda]\,dt• \tag{26}$$

变分方程(24) 可以写为

$$\gamma_{cr}^{-2}=\min_\lambda\max_x\frac{\Pi_1}{\Pi_2}, \tag{27}$$

这是广义 Rayleigh 商[7], 其中有两类变量 x 与 λ 参与变分• 当矩阵 C 是满秩时, 广义 Rayleigh 商可以退化为常见的 Rayleigh 商• 但在最优控制领域, 矩阵 C 常常不是满秩的, 此时系统的可控性与可观性保证了广义 Rayleigh 商的存在•

运用精细积分法再结合扩展的Wittrick_Williams(W_W) 算法[18], 可以将任意前 n_e 阶本征值求解计算到任意选择的精度• 文献[7] 给出的算法只寻求最低一个本征值, 并且不给出相应的本征函数 $\varphi_1(t)$, 因此不适合当前问题的需要, 分散控制的要点是对各个子系统独立作出详尽分析, 即假设 $\varepsilon=0$, 并计算各子系统前 n_e 阶本征解$[\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t)]$, $(j=1, 2, \cdots, n_e)$•

在此基础上方能按照模态综合法计算整个系统的最优范数, 此时 $\varepsilon>0$• 综合全部分散子系统的本征解以寻求整体大系统的解, 这在结构力学的动力分析中也有相同的情况, 称为子结构模态综合法[16, 17]• 与此相似, 下一节将介绍如何获得控制问题中子系统的本征解•

3 Riccati 微分方程的精细积分及全部本征解

模态综合法需要利用子系统的本征解$[\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t)]$• Riccati 微分方程的精细积分与 W_W 算法的公式已经在[7] 中详细给出, 但该文只着重于基本本征值, 其相应的本征函数的计算并未提供, 因此还是要予以解释清楚•

当 $\gamma^{-2}>\gamma_{cr}^{-2}$ 时直接求解Riccati 微分方程是有困难的, 因为在区段$[0, t_f]$ 内出现了奇点• 精细积分采用区段合并算法, 可以将这些无穷大奇点用本征值计数回避掉, 所以用于求解子系统任意指定精度和阶次的本征值是适宜的, 当然还要结合本征值计数的扩展 W_W 算法• 精细积分对于 γ^{-2} 取任何一个值都可以执行, 然后通过本征值计数的搜索来找到本征值, 可以达到很高的精度• Riccati 矩阵方程的解 $S(t)$ 本身不是本征函数向量, 求出了近似本征值 γ_j^{-2} 后, 可以先找出本征函数向量 $\varphi_j(t)$ 在 $t=0$ 一端的值 $\varphi_j(0)$, 再用精细积分的 2^N 算法将本征函数向量在各格点上的值计算出来, 最后作归一化处理•

对于当前考虑状态反馈最优控制问题, 解的形式是 $\lambda(t)=S(t)x(t)$, 即式(21), 两端齐次边界条件是

$$x(0)=0,\quad \lambda(t_f)=S_f x(t_f)• \tag{28a, b}$$

如果 γ^{-2} 不是本征值, 则Riccati 矩阵 $S(0)$ 并不奇异, 于是满足齐次边界条件(28) 的只有平凡解• 然而当 γ^{-2} 的取值接近本征值 γ_j^{-2} 时, $S(0)$ 将是数值非常大的奇异矩阵• 这表明可以找

到非零向量 $\lambda(0)$ 对应于边界条件(28)。 然后由$[\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0},\ \lambda(0)]$ 开始,运行 2^N 算法,将全状态的本征函数在各格点时刻 t 的值计算出来。 即

$$\gamma_j^{-2},\quad \boldsymbol{\varphi}_j(t)=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_{\varphi j}(t)\\ \lambda_{\varphi j}(t)\end{Bmatrix}\qquad (j=1,2,3,\dots)。\tag{29}$$

总之,通过精细积分与扩展 W_W 算法的合用,可以将给定范围 $0<\gamma_j^{-2}<\gamma_{\#}^{-2}$ 内的本征解全部找出,这里 $\gamma_{\#}^{-2}$ 是预先给定的一个值。 找出全部本征解后,任意初值条件与任意参数 $\gamma^{-2}<\gamma_{cr}^{-2}$ 的全状态向量就可以用全状态的本征向量函数(29)展开来表示。

4　本征解的正交归一,完备性及展开定理

既然已经找到全部本征解(29),就可以用本征函数展开的方法求解。 结构振动问题中也有用本征向量展开的求解方法,当然这需要首先提供本征向量的正交性。 结构振动问题是 Rayleigh 商的本征值问题,但 H_∞ 控制是广义 Rayleigh 商的本征值问题,其正交性应当再予以考察。 所讨论的本征值问题的本征函数显然满足下列正交特性。

$$\int_0^{t_f}\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm T}(t)\left[J\left(\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}+\boldsymbol H\right)\right]\boldsymbol{\varphi}_j(t)\,\mathrm dt=0,\tag{30}$$

其中

$$J=\begin{bmatrix}\boldsymbol 0 & \boldsymbol I\\ -\boldsymbol I & \boldsymbol 0\end{bmatrix},\tag{31a}$$

$$\boldsymbol H=\begin{bmatrix}-\boldsymbol A & \boldsymbol B_u\boldsymbol B_u^{\mathrm T}-\gamma^{-2}\boldsymbol B_w\boldsymbol B_w^{\mathrm T}\\ \boldsymbol C^{\mathrm T}\boldsymbol C & \boldsymbol A^{\mathrm T}\end{bmatrix}。\tag{31b}$$

根据式(30),设有两个本征解 $\boldsymbol\varphi_i(t)$ 与 $\boldsymbol\varphi_j(t)$ 分别满足方程

$$\dot{\boldsymbol\varphi}_i(t)+\boldsymbol H\boldsymbol\varphi_i(t)=\boldsymbol 0,\tag{32a}$$

$$\dot{\boldsymbol\varphi}_j(t)+\boldsymbol H\boldsymbol\varphi_j(t)=\boldsymbol 0,\tag{32b}$$

即

$$\dot{\boldsymbol x}_{\varphi i}=\boldsymbol{Ax}_{\varphi i}-(\boldsymbol B_u\boldsymbol B_u^{\mathrm T}-\gamma_i^{-2}\boldsymbol B_w\boldsymbol B_w^{\mathrm T})\lambda_{\varphi i},\tag{33a}$$

$$\dot\lambda_{\varphi i}=-\boldsymbol C^{\mathrm T}\boldsymbol{Cx}_{\varphi i}-\boldsymbol A^{\mathrm T}\lambda_{\varphi i},\tag{33b}$$

$$\dot{\boldsymbol x}_{\varphi j}=\boldsymbol{Ax}_{\varphi j}-(\boldsymbol B_u\boldsymbol B_u^{\mathrm T}-\gamma_j^{-2}\boldsymbol B_w\boldsymbol B_w^{\mathrm T})\lambda_{\varphi j},\tag{34a}$$

$$\dot\lambda_{\varphi j}=-\boldsymbol C^{\mathrm T}\boldsymbol{Cx}_{\varphi j}-\boldsymbol A^{\mathrm T}\lambda_{\varphi j},\tag{34b}$$

和(19)中给定的齐次边界条件。 将 $\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}$ 左乘式(33a),$\boldsymbol x_{\varphi j}^{\mathrm T}$ 左乘式(33b),再将两者相减后对$[0,t_f]$ 全区段积分,运用分部积分法,并注意到 $\lambda_{\varphi i}(t_f)=\boldsymbol S_f\boldsymbol x_{\varphi i}(t_f)$, 可导出

$$\int_0^{t_f}\big[\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol x}_{\varphi i}+\lambda_{\varphi i}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol x}_{\varphi j}-\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}_{\varphi i}-\lambda_{\varphi i}^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}_{\varphi j}+\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}(\boldsymbol B_u\boldsymbol B_u^{\mathrm T}-\gamma_i^{-2}\boldsymbol B_w\boldsymbol B_w^{\mathrm T})\lambda_{\varphi i}-\boldsymbol x_{\varphi j}^{\mathrm T}\boldsymbol C^{\mathrm T}\boldsymbol{Cx}_{\varphi i}\big]\,\mathrm dt-\boldsymbol x_{\varphi j}^{\mathrm T}(t_f)\boldsymbol S_f\boldsymbol x_{\varphi i}(t_f)=0。\tag{35}$$

将 $\lambda_{\varphi i}^{\mathrm T}$ 左乘式(34a),$\boldsymbol x_{\varphi i}^{\mathrm T}$ 左乘式(34b),相减后再对$[0,t_f]$ 全区段积分,运用分部积分法,并注意到 $\lambda_{\varphi j}(t_f)=\boldsymbol S_f\boldsymbol x_{\varphi j}(t_f)$, 又可导出

$$\int_0^{t_f}\big[\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol x}_{\varphi i}+\lambda_{\varphi i}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol x}_{\varphi j}-\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}_{\varphi i}-\lambda_{\varphi i}^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}_{\varphi j}+\lambda_{\varphi j}^{\mathrm T}(\boldsymbol B_u\boldsymbol B_u^{\mathrm T}-\gamma_j^{-2}\boldsymbol B_w\boldsymbol B_w^{\mathrm T})\lambda_{\varphi i}-\boldsymbol x_{\varphi j}^{\mathrm T}\boldsymbol C^{\mathrm T}\boldsymbol{Cx}_{\varphi i}\big]\,\mathrm dt-\boldsymbol x_{\varphi j}^{\mathrm T}(t_f)\boldsymbol S_f\boldsymbol x_{\varphi i}(t_f)=0。\tag{36}$$

式(35)、(36)两者相减得到

$$(\gamma_i^{-2} - \gamma_j^{-2})\int_0^{t_f} \lambda_{\varphi j}^{T} \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{T} \lambda_{\varphi i}\mathrm{d}t = 0. \tag{37}$$

上式就是本征函数对于非负对称矩阵 $\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{T}$ 的正交性定理: 对于不同的本征值 γ_i^{-2} 与 γ_j^{-2}, 相应的全状态本征函数 $\varphi_i(t)$ 和 $\varphi_j(t)$ 对于非负对称矩阵 $\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{T}$ 是正交的. 可以想象, 这就是结构振动时本征向量对于质量阵正交的翻版. 而归一化条件则可以表示为

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\lambda_{\varphi i}^{T} \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{T} \lambda_{\varphi i}]\mathrm{d}t = 1. \tag{38}$$

运用该正交性的结果, 由(35)得到

$$\int_0^{t_f}\Big[\lambda_{\varphi j}^{T}\dot{\boldsymbol{x}}_{\varphi i} + \lambda_{\varphi i}^{T}\dot{\boldsymbol{x}}_{\varphi j} - \lambda_{\varphi j}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\varphi i} - \lambda_{\varphi i}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\varphi j} + \lambda_{\varphi j}^{T}\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{T}\lambda_{\varphi i} - \boldsymbol{x}_{\varphi j}^{T}\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{\varphi i}\Big]\mathrm{d}t - \boldsymbol{x}_{\varphi j}^{T}(t_f)\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{x}_{\varphi i}(t_f) = 0, \tag{39}$$

这就是结构振动时本征向量对于刚度正交的翻版. 因归一化条件(38), 又有

$$\int_0^{t_f}\Big[\lambda_{\varphi i}^{T}\dot{\boldsymbol{x}}_{\varphi i} - \lambda_{\varphi i}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\varphi i} + \frac{1}{2}\lambda_{\varphi i}^{T}\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{T}\lambda_{\varphi i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_{\varphi i}^{T}\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{\varphi i}\Big]\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_{\varphi i}^{T}(t_f)\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{x}_{\varphi i}(t_f) = \gamma_i^{-2}. \tag{40}$$

本征函数的完备性参照文献[20]中的步骤在这里给出. 根据方程(18a, b)有

$$\begin{Bmatrix} -\dot{\boldsymbol{x}} \\ -\dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{T} + \gamma^{-2}\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{T} \\ -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{T} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0}. \tag{41}$$

定义算子 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{M}$

$$\mathscr{L} = -\boldsymbol{I}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{T} \\ -\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{T} \end{bmatrix}, \tag{42a}$$

$$\mathscr{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{T} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{42b}$$

再根据式(25)及(26), 对任意全状态向量函数 $\nu(t) = [\boldsymbol{x}_\nu^{T}, \lambda_\nu^{T}]^{T}$ 及 $\theta(t) = [\boldsymbol{x}_\theta^{T}, \lambda_\theta^{T}]^{T}$ 定义下列二次型泛函

$$\Pi_1(\nu, \theta) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\nu^{T}(J\mathscr{L})\theta\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\Big[\lambda_\nu^{T}\dot{\boldsymbol{x}}_\theta + \lambda_\theta^{T}\dot{\boldsymbol{x}}_\nu - \lambda_\nu^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\theta + \lambda_\theta^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\nu + \lambda_\nu^{T}\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{T}\lambda_\theta - \boldsymbol{x}_\nu^{T}\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\theta\Big]\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_\nu^{T}(t_f)\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{x}_\theta(t_f) \tag{43a}$$

及

$$\Pi_2(\nu, \theta) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\nu^{T}(J\mathscr{M})\theta\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\lambda_\nu^{T}\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{T}\lambda_\theta]\mathrm{d}t. \tag{43b}$$

对于这里所讨论的问题, 其本征函数的完备性是指任意满足边界条件(19)的连续函数 $\nu(t)$ 都可以表示为

$$\Pi_2(\nu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2, \tag{44}$$

其中 $$a_j = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\lambda_{\varphi j}^{T}(t)\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{T}\lambda_\nu(t)]\mathrm{d}t. \tag{45}$$

考虑用前 n 阶本征函数逼近 $\nu(t)$, 并令 $\rho_n(t)$ 表示逼近误差

$$\rho_n(t) = \nu(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j\,\varphi_j(t), \tag{46}$$

则显然有

$$\Pi_2[\varphi_j(t),\ \rho_n(t)] = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{47}$$

及

$$0 \leqslant \Pi_2[\rho_n(t),\ \rho_n(t)] = \Pi_2[\lambda_\nu(t),\ \lambda_\nu(t)] - \sum_{j=1}^{n} a_j^2. \tag{48}$$

利用前面的正交性条件(40)可得(43a)的下列形式

$$\Pi_1[\varphi_j(t),\ \rho_n(t)] = 0. \tag{49}$$

由式(40)和(48)可得

$$\Pi_1[\nu(t),\ \nu(t)] = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{-2} a_j^2 + \Pi_1[\rho_n(t),\ \rho_n(t)]. \tag{50}$$

因为 $\Pi_1[\nu(t),\ \nu(t)]$ 是有界的[21], 而且 $\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{-2}a_j^2$ 为一正数, 所以 $\Pi_1[\rho_n(t),\ \rho_n(t)]$ 必有上界, 再考虑到 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n^{-2} = \infty$ 以及本征值 γ_{n+1}^{-2} 满足的不等式

$$\gamma_{n+1}^{-2}\,\Pi_2[\rho_n,\ \rho_n] \leqslant \Pi_1[\rho_n,\ \rho_n], \tag{51}$$

则当 $n \to \infty$ 时

$$\Pi_2[\nu(t),\ \nu(t)] - \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \Pi_2[\rho_n(t),\ \rho_n(t)] \to 0, \tag{52}$$

这就证明了本征函数的完备性, 即式(44)。

由于本征函数系是完备的, 故任意全状态向量函数 $\nu(t)$ 可以用本征解来展开

$$\nu(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_\nu(t) \\ \lambda_\nu(t) \end{Bmatrix} = \sum_{j}^{\infty} a_j\,\varphi_j(t) = \sum_{j}^{\infty} a_j \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_{\varphi j}(t) \\ \lambda_{\varphi j}(t) \end{Bmatrix}, \tag{53}$$

其中 a_j 由(45)式定义。

本征解一定保证

$$\Pi_2 = \int_0^{t_f} \lambda_{\varphi j}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}\,\lambda_{\varphi j}(t)\,\mathrm{d}t > 0,$$

所以归一化条件一定可以达成。 事实上, 本征解是从广义 Rayleigh 商(25) ~ (27)导出的, 对于有限值 j, 特征值 γ_j^{-2} 不会是无穷大, 表明 Π_2 不可能是零。

模态展开就是本征解展开, 对上述分散控制问题非常重要; 同样, 模态展开法在结构振动分析中也具有非常关键的作用。

5　小　　结

本文建立了 H_∞ 分散控制与结构力学中的子结构模态综合理论之间的对应关系, 介绍了子系统 H_∞ 控制问题本征函数的正交性、完备性及展开定理等内容。 本文的第(Ⅱ)部分[22]以此为基础介绍了计算分散控制最优 H_∞ 范数的模态综合法。

致谢　本文作者感谢国家重点基础研究发展规划项目 NKBRSF(G1999032805), 国家自然科学基金 NSFC(19732020, 10202004)及英国工程与物理科学研究理事会(GR/R05437/01)的资助。 本文作者之一英国工程院院士 F. W. Williams 教授结束其香港城市大学的任期后将返回英国继续他在 Cardiff 大学的工作。

[参 考 文 献]

[1] Ho Y C, Mitter S K. Directions in Large_Scale Systems: Many_Person Optimization and Decentralized Control[M]. New York: Plenum Press, 1976.

[2] Jamshidi M. Large_Scale Systems—Modeling, Control and Fuzzy Logic [M]. New Jersey: Prentice_Hall, 1997.

[3] Cheng C F. Disturbances attenuation for interconnected systems by de_centralized control [J]. International Journal of Control, 1997, **66**(2): 213—224.

[4] Date R A, Chow J H. A parametrization approach to optimal H_2 and H_∞ decentralized control problems[J]. Automatica, 1992, **29**(2): 457—463.

[5] Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, **37**(3): 290—304.

[6] ZHONG Wan_xie, Zhong Xiang_xiang. Computational structural mechanics, optimal control and semi_analytical method for PDE [J]. Computers &Structures, 1990, **37**(6): 993—1004.

[7] ZHONG Wan_xie, Howson W P, Williams F W. H_∞ control state feedback and Rayleigh quotient [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, **191**(3_5): 489—501.

[8] ZHONG Wan_xie, Williams F W. H_∞ filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, **46**(7): 1017—1030.

[9] 钟万勰. H_∞控制的变分法与计算[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(12): 1271—1278.

[10] 钟万勰, 杨再石. 连续时间LQ控制主要本征对的算法[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(1): 45—50.

[11] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.

[12] ZHONG Wan_xie, Williams F W. A precise time step integration method [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical, Engineers Part C_Journal of ME, 1994, **208**(C6): 427—430.

[13] 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分 [J]. 计算结构力学及其应用, 1994, **11**(2): 113—119.

[14] ZHONG Wan_xie. The method of precise integration of finite strip and wave guide problems[A]. In: P K K Lee, L G Tham, Y K Cheung Eds. Proceedings of International Conference on Computational Methods in Structure and Geotechnical Engineering [C]. Vol **1**. Hong Kong: China Translation & Printing Service Ltd, 1994, 51—59.

[15] ZHONG Wan_xie. Precise integration of eigen_waves for layered media[A]. In: Arantese Oliveira, Joao Bento Eds. Proc EPMESC_5[C]. Vol **2**. Taejon, Korea: Techno_Press, 1995, 1209—1220.

[16] Leung A Y T. Dynamic Stiffness &Sub_Structures [M]. London: Springer, 1993.

[17] 王文亮, 杜作润. 结构振动与动力子结构分析[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1985.

[18] ZHONG Wan_xie, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick_Williams algorithm to mixed variable systems [J]. Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, 1997, **119**(3): 334—340.

[19] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[20] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics (Vol Ⅰ)[M]. New York: Interscience Publishers Inc, 1953.

[21] Arthurs A M. Complementary Variational Principles [M]. Oxford: Clarendon Press, 1980.

[22] 钟万勰, 吴志刚, 高强, 等. H_∞分散控制系统范数计算的模态综合法(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(2): 121—127.

Modal Synthesis Method for Norm Computation of H_∞ Decentralized Control Systems (Ⅰ)

ZHONG Wan_xie[1☆], WU Zhi_gang[1], GAO Qiang[1],
A. Y. T. Leung[2], F. W. Williams[2]
(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P.R. China;
☆Visiting City University of Hong Kong;
2. Department of Building and Construction,
City University of Hong Kong, Hong Kong, P.R. China)

Abstract: When using H_∞ techniques to design decentralized controllers for large systems, the whole system is divided into subsystems, which are analysed using H_∞ control theory before being recombined. An analogy was established with substructural analysis in structural mechanics, in which H_∞ decentralized control theory corresponds to substructural modal synthesis theory so that the optimal H_∞ norm of the whole system corresponds to the fundamental vibration frequency of the whole structure. Hence, modal synthesis methodology and the extended Wittrick_Williams algorithm were transplanted from structural mechanics to compute the optimal H_∞ norm of the control system. The orthogonality and the expansion theorem of eigenfunctions of the subsystems H_∞ control are presented in part (Ⅰ) of the paper. The modal synthesis method for computation of the optimal H_∞ norm of decentralized control systems and numerical examples are presented in part (Ⅱ).

Key words: H_∞ control; decentralized control; modal synthesis; generalized Rayleigh quotient; extended Wittrick_Williams algorithm