

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0017_08

应力和位移约束下连续体结构拓扑优化

杨德庆¹, 隋允康², 刘正兴¹, 孙焕纯³

(1 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030; 2 北京工业大学 机械学院;
北京 100010; 3 大连理工大学 工程力学系, 大连 116024)

摘要: 同时考虑应力和位移约束的连续体结构拓扑优化问题, 很难用现有的均匀化方法或变密度方法等求解。主要困难在于难以建立应力和位移约束与拓扑设计变量间显式关系式; 即使建立了这种关系, 也由于优化问题规模过大, 利用常规的数学规划方法难以求解。隋允康、杨德庆曾提出了基于独立连续拓扑变量及映射变换(ICM)的桁架结构拓扑优化模型。本文在此基础上, 建立了以重量为目标, 考虑应力和位移约束的连续体结构拓扑优化模型, 并推导出应力及位移约束与拓扑设计变量间显式关系式。利用对偶规划简化模型, 通过对应力拓扑解和位移_应力拓扑解的综合协调, 进而对于拓扑协调解采用阈值完成从离散到连续的反演。数值算例验证了本文模型及算法的有效性。

关键词: 结构; 优化; 模型化; 拓扑优化; 对偶规划

中图分类号: O223; TU323 **文献标识码:** A

引 言

连续体结构拓扑优化由于其特殊难度, 直到近 10 年来才得到飞速发展, 代表性的工作有均匀化法、变密度法以及变厚度法等^[1-5]。已有工作主要研究了以结构柔顺度(或应变能)为目标函数, 受整体约束(如体积约束、结构自振频率约束等)下的优化问题, 对含应力与位移约束的连续体结构拓扑优化问题的研究很少见诸刊物。这主要是由于以下原因: 1) 利用目前给出的均匀化法或密度法的模型很难建立应力和位移约束与拓扑设计变量的近似显函数关系式。2) 以结构柔顺度为目标时, 它与各工况边界条件有关, 多工况时结构拓扑优化成为多目标问题, 难以处理。难以同时考虑应力与位移约束, 通常只能考虑体积约束。3) 连续体结构拓扑优化问题的规模很大, 利用常规的数学规划方法难以求解。

实际结构中应力和位移约束是非常重要的, 不考虑它们的设计是不能付诸工程使用的。我们的研究认为, 上述问题一个是模型化问题, 另一个是建立适当模型后, 采用合理算法求解, 克服求解规模大这个难题。本文根据文[6]提出的基于独立连续拓扑变量和映射变换 ICM (Independent_Continuous Mapping) 的拓扑优化方法, 建立了以重量为目标, 考虑应力和位移约束的连续体结构拓扑优化模型, 并给出应力及位移约束与拓扑设计变量间近似显式关系。利用对偶规划简化模型, 并交替使用规划法和准则法, 效率较高地解决了这一问题。

收稿日期: 1998_11_27; 修订日期: 1999_05_18

作者简介: 杨德庆(1968~), 男, 博士后。

1 应力和位移约束下连续体结构拓扑优化模型及对偶解法

将文[6]提出的独立连续拓扑变量概念用于连续体结构拓扑优化 引入拓扑变量 t_i $[0, 1]$ 表征第 i 号膜或块体单元的有与无, 代替传统的 $t_i = 0$ 或 1 的离散值; t_i 取 $[0, 1]$ 中的连续值, 表示从有到无的过渡状态, 并用过滤函数 $f(t_i)$ 识别单元重量、刚度和许用应力 于是将离散的拓扑优化模型映射成连续可微的优化模型:

$$\begin{cases} \text{求 } t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T, \\ \min W = \sum_{i=1}^n f(t_i) w_i^0, \\ \text{s. t. } \sigma_l \leq f(t_i) \sigma_i^0, \\ u_{rl} \leq u_r, \\ 0 \leq t_i \leq 1, \\ (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R), \end{cases} \quad (1)$$

式中 t_i 是 i 单元的独立连续拓扑变量, σ_l 为单元 i 在工况 l 时的 Mises 应力, σ_i^0 为单元 i 的许用应力, w_i^0 为 i 单元的固有重量, u_r 是位移约束, $f(t_i)$ 为过滤函数^[6], 本文采用如下形式:

$$f(t) = t^3, \quad (2)$$

n 为单元总数, L 与 R 分别为荷载工况总数与位移约束总数

欲求解模型(1), 首先要建立位移关于单元拓扑设计变量的近似显函数表达式 由莫尔定理, 结构任意节点某一方向的广义位移由下式给出:

$$u_j = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{matrix} v \\ \end{matrix} \right\}_i^T \left\{ \begin{matrix} R \\ \end{matrix} \right\}_i dv, \quad (3)$$

式中 $\left\{ \begin{matrix} v \\ \end{matrix} \right\}_i$ 为单位虚荷载下单元 i 的应力向量, $\left\{ \begin{matrix} R \\ \end{matrix} \right\}_i$ 为实荷载下单元 i 的应变向量

由于应变

$$\left\{ \begin{matrix} R \\ \end{matrix} \right\}_i = [H]_i^{-1} \left\{ \begin{matrix} R \\ \end{matrix} \right\}_i, \quad (4)$$

其中 $[H]$ 为弹性矩阵, 且

$$[H]_i = f(t_i)[H^0] \quad (5)$$

对二维各向同性材料

$$[H^0] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

由(5)得

$$[H]_i^{-1} = \frac{1}{f(t_i)} [H^0]^{-1} \quad (7)$$

将(4)与(7)代入(3)得

$$u_j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(t_i)} \left\{ \begin{matrix} v \\ \end{matrix} \right\}_i^T [H^0]^{-1} \left\{ \begin{matrix} R \\ \end{matrix} \right\}_i dv \quad (8)$$

对模型(1)中位移约束有

$$u_{rl} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(t_i)} \left\{ \begin{matrix} v \\ \end{matrix} \right\}_i^T [H^0]^{-1} \left\{ \begin{matrix} R \\ \end{matrix} \right\}_i dv \quad (9)$$

得到位移关于单元拓扑设计变量的近似显函数表达式(9)后,按如下策略解模型(1) 首先采用满应力准则法将应力约束化为动态尺寸下限,获得拓扑变量值的下限;然后再用规划法求解位移约束下的拓扑优化 下面给出应力约束的处理:

$$f(t_i) - f(L_i) = \max(\sigma_i^0 / \sigma_i^0) \tag{10}$$

将(9)与(10)代入式(1)得

$$\begin{cases} \text{求 } t \in E^n, \\ \min W = \sum_{i=1}^n f(t_i) w_i^0, \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^n A_{ji} / f(t_i) \leq a_j, \\ f(L_i) - f(t_i) \leq 1, \\ (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, J; r = 1, \dots, R), \end{cases} \tag{11}$$

其中 $A_{ji} = \int_v \left\{ v \right\}_{rl}^T [H^0]^{-1} \left\{ v \right\}_{rl} dv$, $\tag{12}$

$$a_j = u_r; r = 1, \dots, R; l = 1, \dots, L; j = 1, \dots, J; J = R - L$$

引入变换 $z_i = f(t_i) - f(L_i)$, $\tag{13}$

式(11)化为

$$\begin{cases} \text{求 } z \in E^n, \\ \min W = \sum_{i=1}^n w_i^0 z_i, \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^n \frac{A_{ji}}{z_i + c_i} \leq a_j, \\ 0 \leq z_i \leq z_i, \\ (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, J), \end{cases} \tag{14}$$

其中

$$c_i = f(L_i), \quad z_i = 1 - c_i \tag{15}$$

模型(14)是从包含单元数量很大的一个区域作为基结构开始优化的,每个单元包含一个拓扑设计变量,因此基结构中拓扑变量数也很大 如果再考虑每个单元的应力和位移约束,则问题规模将变得巨大 对于三维连续体结构拓扑优化,其规模更大,一般计算机根本无法求解 为减小求解规模,我们采用对偶规划方法,对模型进行对偶变换 模型(14)的对偶规划为:

$$\begin{cases} \text{求 } E^J, \\ \max L(z, \lambda), \\ \text{s. t. } \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$L(z, \lambda) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n w_i^0 z_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j \left[\sum_{i=1}^n \frac{A_{ji}}{z_i + c_i} - a_j \right] \right\} \tag{17}$$

由式(17)的库_塔克条件得

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = w_i^0 - \sum_{j=1}^J \frac{\lambda_j A_{ji}}{(z_i + c_i)^2} = \begin{cases} > 0 & (z_i^* = 0), \\ = 0 & (0 < z_i^* < z_i), \\ < 0 & (z_i^* = z_i) \end{cases} \tag{18}$$

由式(18)解得

$$z_i^* = \begin{cases} 0 & (d_i = 0), \\ d_i & (0 < d_i < z_i), \\ z_i & (d_i > z_i), \end{cases} \quad (19)$$

其中
$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^J A_{ji}^* / w_i^0} - c_i \quad (20)$$

由于
$$z_i^* = z_i^* (\cdot), \quad (21)$$

根据对偶理论,对 z_i^* 求导数

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial z_i^*} = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ji}}{z_i^* (\cdot) + c_i} - a_j \quad (22)$$

设

$$n_a = \{i \mid 0 < z_i^* < z_i\}, \quad (23)$$

其二阶导数

$$\frac{\partial^2 L(\cdot)}{\partial z_i^* \partial z_i^*} = - \sum_{i \in n_a} \frac{A_{ji}}{(z_i^* + c_i)^2} \frac{z_i^*}{k} \quad (24)$$

对于 $i \notin n_a$, 即 $z_i^* = 0$ 或 $z_i^* = z_i$, 由式(19)得

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial k} = 0 \quad (25)$$

对于 $i \in n_a$, 由式(18)和(21)得:

$$(z_i^* (\cdot) + c_i)^2 = \sum_{j=1}^J \frac{A_{ji}}{w_i^0}, \quad (26)$$

等式两边求导得

$$2(z_i^* + c_i) \frac{\partial z_i^*}{\partial k} = \frac{A_{ki}}{w_i^0}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial k} = \frac{A_{ki}}{2(z_i^* + c_i)w_i^0} \quad (28)$$

将式(25)与(28)代入(24)得

$$\frac{\partial^2 L(\cdot)}{\partial z_i^* \partial z_i^*} = - \sum_{i \in n_a} \frac{A_{ji} A_{ki}}{2(z_i^* + c_i)^3 w_i^0} \quad (29)$$

将模型(16)用二阶 Taylor 展式近似得

$$\begin{cases} \text{求} & E^J, \\ \max & L(\cdot) \approx \frac{1}{2} L''(\cdot^0) J^T + [L'(\cdot^0) - (\cdot^0)^T L''(\cdot^0) J], \\ \text{s. t.} & 0 \end{cases} \quad (30)$$

欲求解模型(30), 先将式中 $L''(\cdot^0)$ 消掉, 以避免对展开点处 $L''(\cdot^0)$ 选取的困难 采用如下方法处理 $L''(\cdot^0)$:

对 $L''(\cdot^0)$ 中的任一项, 例如第 j 项

$$\sum_{k=1}^J \frac{\partial^2 L(\cdot)}{\partial z_i^* \partial z_i^*} = - \sum_{i \in n_a} \frac{A_{ji}}{2(z_i^* + c_i)w_i^0} \sum_{k=1}^J \frac{A_{ki}}{(z_i^* + c_i)^2} \quad (31)$$

将式(26)代入得

$$f((0)^T \quad 2 \quad (0))J_j = - \frac{A_{ji}}{i \quad n_a \quad 2(z_i^* + c_i)} \tag{32}$$

于是

$$f^T((0) - (0)^T \quad 2 \quad (0))J_j = \left[a_j - \frac{A_{ji}}{i \quad n_a \quad 2(z_i^* + c_i)} - \frac{A_{ji}}{i=1 \quad z_i^* + c_i} \right]_j = \left[a_j - \frac{3A_{ji}}{i \quad n_a \quad 2(z_i^* + c_i)} - \frac{A_{ji}}{i/n_a \quad z_i^* + c_i} \right]_j \tag{33}$$

将式(33)代入模型(30)并将极大问题化为极小问题求解,得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad E^J, \\ \min - f^J = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \frac{A_{ji}A_{ki}}{(z_i^{(v)} + c_i)^3 w_i^0} + \sum_{j=1}^J \left[a_j - \frac{3A_{ji}}{i \quad n_a \quad 2(z_i^{(v)} + c_i)} - \frac{A_{ji}}{i/n_a \quad 2(z_i^{(v)} + c_i)} \right]_j, \\ \text{s. t.} \quad z_i \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J), \end{array} \right. \tag{34}$$

其中 $z_i^{(v)}$ 为 z_i^* 迭代中近似值,将上式的解代入原_对偶关系中得

$$z_i^* = \begin{cases} 0 & (S_i = 0), \\ S_i & (0 < S_i < z_i), \\ z_i & (S_i \geq z_i) \end{cases} \tag{35}$$

$$S_i = \sqrt{\sum_{r=1}^J A_{ri} / w_i^0 - c_i} \tag{36}$$

由式(13)得

$$t_i^* = f^{-1}(z_i^* + f(t_i)) \tag{37}$$

因为 J 远远小于 n , 问题(34)的规模要比问题(1)小得多,加之采用了对位移约束数值上的粗删策略,问题(34)的规模就更小了

2 应力与位移_应力拓扑解的综合协调和拓扑变量由连续向离散的反演

由于拓扑优化实际上给出体现最佳传力路线的结构的空间连接关系,因而它对各工况的应力是颇为敏感的.仅按上节的计算结果确定拓扑,势必忽略应力的作用,因此引出把上节求出的位移_应力拓扑解同如下求出的各工况应力拓扑解的综合协调过程

单独考虑某工况下应力的零阶近似所得的连续拓扑变量值称为某工况下的应力拓扑解

由问题(1)的应力约束得到 i 单元 l 工况下的应力拓扑解:

$$t_{il}^{(v+1)} = f^{-1}(t_{il}^0) \tag{38}$$

把前一节所得的位移_应力拓扑解看成第 $L+1$ 号荷载工况的应力拓扑解 $t_{il}^{(v+1)} = t_i^*$,从而得到 i 单元 l 工况下的应力拓扑解

$$t_i^{(v+1)} = \sum_{l=1}^{L+1} t_{il}^{(v+1)} / (L+1) \tag{39}$$

在程序实现这一算法时,结构拓扑开始主要由应力控制,通常式(39)只对 L 个应力拓扑解综合,当位移_应力拓扑解参与控制时,才是对 $L+1$ 个解的综合

$t_i^{(v+1)}$ 由连续型变量向离散型变量的反演是借助于 $f(t_i^{(v+1)})$ 同一个阈值 $D^{(v+1)}$ 的比较而实现

的,其算法为

$$t_i^* = \begin{cases} 1 & (f(t_i^{(v+1)}) \geq D^{(v+1)}), \\ 0 & (f(t_i^{(v+1)}) < D^{(v+1)}), \end{cases} \quad (40)$$

阈值的取法依赖于数值计算的经验 鉴于最优拓扑结构体现了各单元对于结构整体的综合效应,因此每轮阈值的选取就应当同各单元的 有/无转化 状态有关 显然, $t_i^* = 1$ 的那些不必再处理了,只需关注那些还没有达到1的拓扑量

取单元的 $f(t_i^{(v+1)})$ 的算术平均为有、无之间的界限是容易接受的,为了便于调控,再乘一个折减系数 $(v+1)$

$$D^{(v+1)} = \left[\frac{f(t_i^{(v+1)})}{n_c} \right]^{(v+1)}, \quad (41)$$

其中, n_c 为拓扑待定单元总数, $(v+1)$ 在 0.55 ~ 0.85 之间取值

经过上述 反演计算,这一轮拓扑优化就完成了由连续型拓扑变量向传统 0_1 型变量转换 记本轮 $t_i^* = 1$ 的所有拓扑变量的集合为 $E^{(v+1)}$ 若 $t_i^* = 0$,则 $t_i^* / E^{(v+1)}$

此时折减系数不应选得过大,因为位移起作用时,一般拓扑结构已很接近最优拓扑 把每个单元拓扑值同阈值相比较,确定单元的取舍 得到新的拓扑结构,再进入下一轮迭代

拓扑优化迭代终止于两个准则的同时满足:

$$|(W^{(v+1)} - W^{(v)}) / W^{(v+1)}| < \epsilon, \quad (42)$$

$$E^{(v+1)} = E^{(v)}, \quad (43)$$

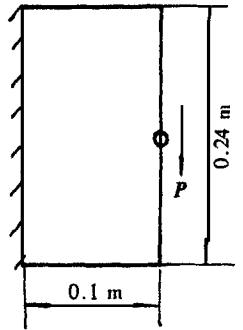


图 1

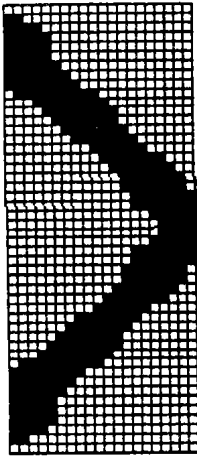


图 2 例 1 拓扑优化结果

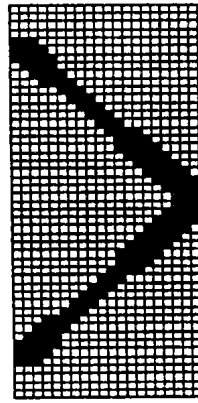


图 3 例 1 仅在应力约束下的最优拓扑结构

式(42)中的 $W^{(v)}$ 、 $W^{(v+1)}$ 为前轮与本轮迭代的结构名义重量, ϵ 为输入的收敛精度 式(43)表明拓扑变量集合不再变动

在进行每轮新的迭代伊始,为了避免结构总刚度阵奇异,采用如下措施处理被删除的单元:

$$t_i^{(v+1)} = \begin{cases} 1 & (t_i^* < E^{(v+1)}), \\ 0 & 001 & (t_i^* / E^{(v+1)}) \end{cases} \quad (44)$$

新一轮迭代时,单元刚度按下式计算

$$k_i = \int_{v_i} B_i^T H_i B_i dv_i = f(t_i) k_i^0 = f(t_i) \int_{v_i} B_i^T H_i^0 B_i dv_i \quad (45)$$

3 算例与讨论

例 1 如图 1 所示,基本结构为 0.24 m × 0.1 m 的平面体,厚度 0.009 m,材料弹性模量为 $6.889 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,许用应力为 $1.55 \times 10^8 \text{ N/m}^2$,设密度为 1.0 g/mm^3 划分为 48 × 20 个矩形单元,一集中荷载 $P = 156.00 \text{ N}$ 作用于右边界中点,为避免应力集中的影响,将荷载分散在右边界中间的两个节点上,右边界中点处垂直向下位移约束 = 0.15 mm,左边界全部采用固定约束.优化后拓扑结构如图 2 所示. $\alpha = 0.775$,迭代次数 = 5, $W = 625.00 \text{ g}$. 仅在应力约束下的拓扑与文 [2] 结果相同,见图 3.

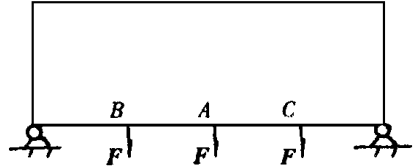


图 4

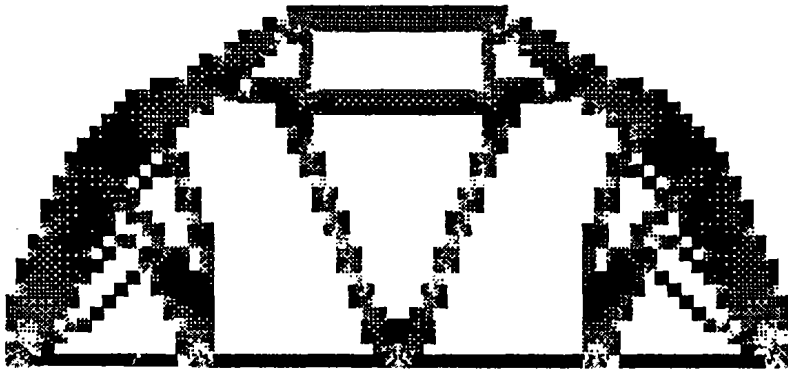


图 5 例 2 的拓扑优化结构

例 2^[7] 如图 4 所示,基本结构为一 16 mm × 10 mm 的平面体,厚度为 1 mm,材料弹性模量为 $2.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$,许用应力为 7000 N/mm^2 ,设密度为 1.0 g/mm^3 划分为 64 × 40 个矩形单元,荷载 $F = 1000 \text{ N}$, A 点处垂直向下位移约束 = 0.16 mm, B、C 点处垂直向下位移约束 = 0.112 mm. 优化后拓扑结构如图 5 所示. $\alpha = 0.1615$,迭代次数 = 18, $W = 441.375 \text{ g}$.

[参 考 文 献]

- [1] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1988, 71(1): 197~ 224.
- [2] Yang R J, Chuang C H. Optimal topology design using programming[J]. Computers & Structures, 1994, 52(2): 265~ 275.
- [3] Jog C S, Haber R B, Bendsoe M P. A new approach to variable topology shape design using a constraint on perimeter[J]. Struct Opt, 1996, 11(1): 1~ 12.
- [4] Eschenauer H A, Kobelev V V, Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures[J]. Struct Opt, 1994, 8(1): 42~ 51.

- [5] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & Structures, 1993, 49(5): 885~ 896.
- [6] Sui Yunkang and Yang Deqing. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model[J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 18(2): 179~ 185.
- [7] 杨德庆. 连续变量化的结构形状及拓扑优化设计理论和方法研究[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 1998.

T o p o l o g y O p t i m i z a t i o n D e s i g n o f C o n t i n u u m S t r u c t u r e s
U n d e r S t r e s s a n d D i s p l a c e m e n t C o n s t r a i n t s

Yang Deqing¹, Sui Yunkang², Liu Zhengxing¹ Sun Huan Chun³

(1) Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong
University, Shanghai, 200030, P R China;

2) Institute of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology,
Beijing, 100010, P R China;

3) Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, P R China)

Abstract: Topology optimization design of continuum structures that can take account of stress and displacement constraints simultaneously is difficult to solve at present. The main obstacle lies in that, the explicit function expressions between topological variables and stress or displacement constraints can't be obtained using homogenization method or variable density method. Furthermore, large quantities of design variables in the problem makes it hard to deal with by the formal mathematical programming approach. In this paper, a smooth model of topology optimization for continuum structures is established which has weight objective considering stress and displacement constraints based on the independent_continuous topological variable concept and mapping transformation method proposed by Sui Yunkang and Yang Deqing. Moreover, the approximate explicit expressions are given between topological variables and stress or displacement constraints. The problem is well solved by using dual programming approach, and the proposed element deletion criterion implement the inversions of topology variables from the discrete to the continuous. Numerical examples verify the validity of proposed method.

Key words: structure; optimization; topology optimization; modeling; dual programming