

文章编号: 1000\_0887(2000) 01\_0011\_06

# 一类基于小波基函数插值的有限元方法\*

骆少明, 张湘伟

(汕头大学, 广东 汕头 515063)

摘要: 在分析具有大的梯度问题中, 将具有紧支集的小波基函数引入到传统的有限元插值函数的构造中, 对传统的插值方法进行修正。对新的插值模式进行了数值稳定性(解的唯一存在性)分析并通过分片分析讨论了解的收敛性, 新的插值模式所引入的附加自由度通过静力凝聚法来消除, 最后得到了基于变分原理的小波有限元列式。

关键词: 小波分析; 有限元法; 非协调分析

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

## 引言

很多实际问题往往具有大的梯度, 例如材料失稳(局部化)问题, 在材料的局部化带内具有很高的应变梯度, 传统的有限元方法, 很难对这类问题进行精确的分析。其它各种改进的有限元分析, 由于受分析方法上的限制, 也各有其局限性<sup>[1,2]</sup>。为了更好地分析具有大梯度的问题, 必须采用比传统的有限元方法有更高的分辨率的方法来进行分析。小波分析是近年来迅速发展起来的全新的分析方法, 是现代分析学的完满结晶, 它在很多实际领域得到了广泛的应用, 最大的长处是可以根据实际需要任意改变分析尺度, 具有很高的分辨率, 而且小波函数具有紧支撑的特性, 具有紧支撑集的正交小波函数极易构造<sup>[3,4]</sup>, 正是描述大梯度问题的有力工具。对具有大梯度的区域, 将正交小波基函数引入到传统的有限元的插值函数中去, 在原有的多项式插值函数上迭加小波项插值函数, 建立新的, 修正了的插值模式, 而相应引入的附加自由度通过静力凝聚法来消除, 对普通的区域(非大梯度区域), 则采用传统的有限元插值以减少计算, 通过相应的变分原理推导小波有限元列式来求解, 这便是小波有限元的含义。

## 1 二维多分辨分析

设  $\{V_j\}_{j \in Z}$  是  $L^2(R)$  中的一串闭子空间列, 容易证明, 张量积空间  $\{V_j^2\}_{j \in Z}$ , 其中  $V_j^2 = V_j \otimes V_j$  构成  $L^2(R^2)$  的一个多分辨分析, 当且仅当  $\{V_j\}_{j \in Z}$  是  $L^2(R)$  的一个多分辨分析, 这时二维多分辨分析  $\{V_j^2\}_{j \in Z}$  的尺度函数  $\Phi(x, y) = \Phi(x)\Phi(y)$  其中  $\Phi$  是一维多分辨分析  $\{V_j\}_{j \in Z}$  的尺度函数。对每一个  $j \in Z$ , 函数系  $\{\Phi_{j, k_1, k_2} = \Phi_{j, k_1}(x)\Phi_{j, k_2}(y) \mid (k_1, k_2) \in Z^2\}$  构成  $V_j^2$  的规范正交基。将空间  $L^2(R^2)$  的这样一个多分辨分析  $\{V_j^2\}_{j \in Z}$  称作为可分离的。

定义小波空间  $W_j^2 = (V_j^2)^\perp$  即  $V_j^2 \oplus W_j^2 = V_{j-1}^2$ , 则有下述定理<sup>[5]</sup>:

\* 收稿日期: 1998\_09\_23; 修订日期: 1999\_10\_30

作者简介: 骆少明(1966-), 男, 博士, 副教授。

定理 1 设  $\{V_j\}_{j \in Z}$  是  $L^2(R^2)$  的一个可分离多分辨分析.

$V_j^2 = V_j \times V_j$ , 其中  $\{V_j\}_{j \in Z}$  是空间  $L^2(R)$  的一个多分辨分析, 其尺度函数为  $\varphi$ , 小波函数为  $\psi$ , 定义 3 个函数:

$$\phi^1(x, y) = \varphi(x) \varphi(y), \quad \phi^2(x, y) = \varphi(x) \psi(y), \quad \phi^3(x, y) = \psi(x) \psi(y), \quad (1)$$

则对任何  $j \in Z$ , 函数系

$$\left. \begin{aligned} \phi_{j; k, m}^1(x, y) &= \varphi_{j, k}(x) \psi_{j, m}(y), \quad \phi_{j; k, m}^2(x, y) = \psi_{j, k}(x) \varphi_{j, m}(y), \\ \phi_{j; k, m}^3(x, y) &= \psi_{j, k}(x) \psi_{j, m}(y), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

构成空间  $W_j^2$  的规范正交基.

函数系  $\{\phi_{j; k, m}^\varepsilon \mid \varepsilon = 1, 2, 3; j, k, m \in Z\}$  是  $L^2(R^2)$  的一个规范正交基.

设给定一个可分离多分辨分析, 分析函数  $f(x, y)$ , 则有阵列  $\{C_{J_1, k_1, k_2}\} (k_1, k_2) \in Z^2$ , 使

$$f(x, y) = AJf(x, y) = \sum_{k_1, k_2} C_{J_1, k_1, k_2} \Phi_{J_1, k_1, k_2}(x, y), \quad (3)$$

将上式两端分别与  $\Phi_{J_1+1, m_1, m_2}$ ,  $\psi_{J_1+1, m_1, m_2}^\varepsilon (\varepsilon = 1, 2, 3)$  做内积, 有

$$f(x, y) = AJf(x, y) = AJ_+ f + DJ_+^1 f + DJ_+^2 f + DJ_+^3 f, \quad (4)$$

其中

$$AJ_+ f = \sum_{m_1, m_2 \in Z} C_{J_1+1, m_1, m_2} \Phi_{J_1+1, m_1, m_2}, \quad (5)$$

$$DJ_+^\varepsilon f = \sum_{m_1, m_2 \in Z} D_{J_1+1, m_1, m_2}^\varepsilon \psi_{J_1+1, m_1, m_2}^\varepsilon \quad (\varepsilon = 1, 2, 3), \quad (6)$$

重复这个过程,  $J_2 \dots J_1$  步之后, 有

$$f(x, y) = AJ_2 f(x, y) + \sum_{j=J_2}^{J_1+1} \sum_{\varepsilon=1,2,3} D_j^\varepsilon f(x, y), \quad (7)$$

此即二维 Mallat 算法.

## 2 插值函数的构造

考察图 1 所示的域  $\Omega$  上的问题, 假定大的梯度局限于域  $\Omega_W$  上, 在域  $\Omega_W$  上将位移场分解为两部分:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^F + \mathbf{u}^W,$$

其中  $\mathbf{u}^W = 0$  (在  $\Gamma_u \cup \Gamma_{WF}$  上),

$$\mathbf{u}^F = \mathbf{u}^* \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}),$$

$\Gamma$  是域  $\Omega$  的边界, 由已知位移边界  $\Gamma_u$  和应力边界  $\Gamma_t$  组成  $\Gamma_{WF}$  是位于  $\Omega$  内的  $\Omega_W$  的边界.

$\mathbf{u}^F$  为有限元的常规多项式插值部分, 它是协调部分

$$\mathbf{u}^F = \underline{N}^F \delta^e, \quad (8)$$

$\underline{N}^F$  为有限元插值函数,  $\delta^e$  为结点位移列阵.

$\mathbf{u}^W$  为小波项插值部分, 它是插值函数中的非协调附加项,

$$\mathbf{u}^W = \underline{N}^W \mathbf{a}, \quad (9)$$

$\underline{N}^W$  为小波项插值函数,  $\mathbf{a}$  为内部自由度.

引入了小波项位移插值函数后, 相应的单元的应变场可表述为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^F + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^W \quad (10a)$$

或  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^F + \epsilon_{ij}^W$  (10b)

1) 一维插值函数的构造

对于某些大梯度的问题,总是其某一分量变得非常大,例如局部化问题<sup>[2]</sup>,我们利用这一特点来构造一个一维的小波项插值函数,这可使问题的复杂性降低.

$$\epsilon_{ij}^W = u_{(i,j)}^W = N_{imn,j}(x_1, x_2) a_{mn} = T_{ij}(x_2) \Psi_{mn}(x_1) a_{mn}, \quad (11)$$

则该应变在  $x_1$  方向具有高的分辨率(见图

1)•  $T_{ij}(x_2)$  表征了局部化应变模式的分量,结合

分叉分析<sup>[1]</sup>,可有  $T_{ij} = \text{sym}(m_i n_j)$ ,其中  $n$  和  $m$  表由分叉分析所得到的局部化带的方向和局部化应变场的单位矢量. 这样有

$$B^W = T \Psi, \quad (12)$$

$$N_{imn}^W = m_i \int_{\Omega_w} \Psi_{mn}(t) dt, \quad (13)$$

这样来选取  $\Psi_{mn}(t)$

$$\Psi_{mn}(t) = \phi_{mn}(t) + \lambda_{mn}, \quad (14)$$

其中  $\phi_{mn}(t)$  是具有紧支集的正交小波函数,  $\lambda_{mn}$  是一待定参数,其值可由分片试验来调整.

2) 二维插值函数的构造

对二维情形

$$\epsilon_{ij}^W = B_{j;k,m}^W a_{j;k,m}^\epsilon \quad (i, j, k, m \in Z), \quad (15)$$

其中  $i, j$  表分辨率度,  $k, m$  表平移参数(位置参数),  $\epsilon = 1, 2, 3$ .

记  $B_j^W = (B_{j;k,m}^{W(1)}, B_{j;k,m}^{W(2)}, B_{j;k,m}^{W(3)})$ ,  $a_i = (a_{i;k,m}^1, a_{i;k,m}^2, a_{i;k,m}^3)$ ,

则

$$\epsilon_{ij}^W = B_{ij}^W a_i. \quad (16)$$

我们这样来构造  $B_j^W$ :

$$B_{j;k,m}^{W(\epsilon)} = \phi_{j;k,m}^\epsilon + \lambda_{j;k,m}^\epsilon \quad (\epsilon = 1, 2, 3), \quad (17)$$

其中  $\phi_{j;k,m}^\epsilon$  由(3)式所定义,  $\lambda_{j;k,m}^\epsilon$  ( $\epsilon = 1, 2, 3$ ) 是待定参数.

3 非协调分析与分片试验

对基于最小势能原理的 Ritz 法而言,确保有界势能泛函以及位移等量收敛于精确解的条件是泛函的二次型部分是椭圆的,即系统变形能

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{G}(\mathbf{u}), \mathcal{G}(\mathbf{u}) \rangle \geq \gamma \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\gamma \text{ 为正常数}), \quad (18)$$

另一方面,依照数学上的 Lax\_Milgram 引理,如果上面的泛函椭圆条件成立,则相应的广义变分解唯一存在. 因此,研究变分近似解稳定性的关键是要求泛函的椭圆性. 由热力学定理推知,对于一个处于等温和绝热过程的弹性变形体,其自然稳定状态的客观存在意味着其变形能函数  $A(\mathbf{u})$  必为正定,即

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \geq 0, \quad (19)$$

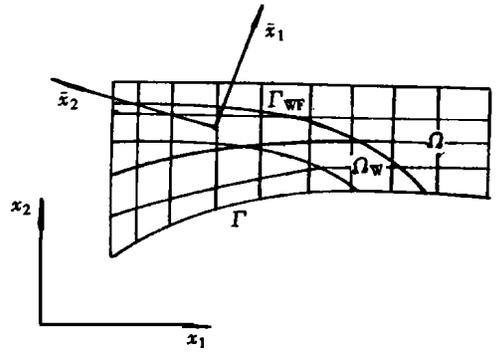


图 1

等号仅对  $\underline{\varepsilon} = 0$  成立。由此极易得到下述能量不等式

$$\int_V A(\mathbf{u}) dV \geq c \|\underline{\varepsilon}\|^2, \quad (20)$$

其中  $c$  为正常数,  $\|\underline{\varepsilon}\| = \|\underline{D}\mathbf{u}\| = \left(\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\varepsilon} dV\right)^{1/2}$ .

对一满足了几何边界条件的无刚体位移弹性体系而言,  $\|\underline{\varepsilon}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$ , 可见  $\|\underline{\varepsilon}\|$  也是  $\mathbf{u}$  的模, 这样存在正常数  $\alpha$ , 使得

$$\forall \mathbf{u} \in u(V), \quad \|\underline{\varepsilon}\| \geq \alpha \|\mathbf{u}\|, \quad (21)$$

不等式(20)可进一步表示为: 存在正常数  $\beta = c\alpha^2$ , 使得

$$\forall \mathbf{u} \in u(V), \quad \int_V A(\mathbf{u}) dV \geq \beta \|\mathbf{u}\|^2, \quad (22)$$

这就是变形能的椭圆条件<sup>[6]</sup>.

对内参型非协调元, 单元试解由两部分组成, 即  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_\lambda$  其中  $\mathbf{u}_q = \underline{N}_q \mathbf{q}$  为常规的位移插值函数, 我们约定  $\mathbf{u}_q$  满足完备性要求, 能反映单元的全部刚体位移和常应变状态,  $\mathbf{u}_\lambda = \underline{N}_\lambda$  由单元内部位移参数  $\lambda$  定义, 它通常是非协调的, 而且不含刚体位移。对应的单元应变  $\underline{\varepsilon} = B_q \mathbf{q} + B_\lambda \lambda$ 。

定理 2 无刚体运动的内参型非协调元体系的解的唯一存在性由下列应变基独立条件保证:

$$B_\lambda = [B_{\lambda_1} B_{\lambda_2} \dots] \text{ 与 } B_q = [B_{q_1} B_{q_2} \dots] \text{ 线性独立} \quad (23)$$

在(23)条件下, 内参型非协调元体系保留了变形能的椭圆性, 相应的离散解唯一存在。

对由(12)式和(17)式所定义的  $\underline{B}^W$ , 很显然  $\underline{B}^W$  和  $\underline{B}^F$  是线性无关的, 这极易用反证法得到证明。若  $\underline{B}^W$  与  $\underline{B}^F$  线性相关。则存在一组不全为零的常数  $c_i^F$  与一组不全为零的常数  $c_j^{W(\varepsilon)}$  ( $i, j \in Z$ ),  $\varepsilon = 1, 2, 3$ , 使得

$$c_i^F B_i^F + c_j^{W(\varepsilon)} B_j^{W(\varepsilon)} = 0 \quad (24)$$

成立, 将上式进行简单变形

$$c_i^F B_i^F + c_j^{W(\varepsilon)} \lambda_{j;k,m}^{(\varepsilon)} = -c_j^{W(\varepsilon)} \psi_{j;k,m}^{(\varepsilon)},$$

很明显, 上式右端线性组合所得到的函数属于函数空间  $L^2(R^2)$ , 而左端是普通的多项式函数, 它不属于  $L^2(R^2)$ 。因此(24)式成立只能有  $c_i^F = 0$ ,  $c_j^{W(\varepsilon)} = 0$ , 由此推得  $\underline{B}^W$  与  $\underline{B}^F$  线性独立, 因此, 基于小波基插值的小波有限元法其解是唯一存在的, 然而, 解的唯一存在并不能保证解能收敛到真实解, 为保证解的收敛性, 非协调部分必须满足分片试验, 这个试验确定单元是否能一致地得到常应变状态, 若能满足分片试验, 则每个单元均能收敛。分片试验的条件是:

$$\int_{\Omega_e} \underline{B}^W dV = 0,$$

由此条件可确定插值函数中的待定参数, 对二维插值问题, 有

$$\int_A (\psi_{j;k,m}^{\varepsilon} + \lambda_{j;k,m}^{\varepsilon}) dA = 0,$$

$$\text{即 } \lambda_{j;k,m}^{\varepsilon} = -\frac{1}{A} \int_A \psi_{j;k,m}^{\varepsilon} dA, \quad (25)$$

其中  $A$  表单元的面积。这样, 由(15), (17)和(27)式所确定的插值函数既保证了解的唯一存在性又保证了解的收敛性。对(10)式所表示的应变场, 我们定义刚度子矩阵

$$\underline{K}_{11} = \int_{\Omega_e} (\underline{B}^F)^T \underline{D} \underline{B}^F dV, \quad \underline{K}_{12} = \underline{K}_{21} = \int_{\Omega_e} (\underline{B}^F)^T \underline{D} \underline{B}^W dV, \quad \underline{K}_{22} = \int_{\Omega_e} (\underline{B}^W)^T \underline{D} \underline{B}^W dV, \quad (26)$$

其中  $\Omega_e$  为单元域,  $\underline{D}$  是材料切向刚度张量。由于引入了小波项插值函数所带入的单元的内部自由度  $\underline{a}$  值可用静力凝聚法来获得:

$$\underline{a} = -\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21}\underline{\xi}, \quad (27)$$

单元的等效单元刚度为

$$\underline{K} = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21}. \quad (28)$$

## 4 小波有限元列式分析

Hellinger\_Reissner 变分原理是有限元中较广泛使用的变分原理, 它用平衡方程和协调条件来刻划 Euler 势函数如下:

$$L(\underline{u}; \underline{\xi}) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} D_{ijkl} \xi_{ij} (u_{k,l} + u_{l,k}) - \frac{1}{2} D_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} - f_{\alpha} u_{\alpha} \right] dV - \int_{\partial\Omega_{\tau}} \tau_{\alpha\beta} u_{\beta} ds, \quad (29)$$

其中  $\Omega$  为体积域,  $\partial\Omega_{\tau}$  为应力边界,  $f$  和  $t$  分别表示体积力和外加应力。按静力凝聚法, 我们可以建立如下的位移和应变两个场插值方程:

$$u_i = \sum_{a=1}^{N_d} \delta_{ia} N_a(x), \quad \underline{\xi} = \underline{B}\underline{u} = (\underline{B}^F - \underline{B}^F \underline{K}_{22}^{-1} \underline{K}_{21}) \underline{u} \quad (30)$$

将插值场(30)式代入 Hellinger\_Reissner 势函数, 则可得到离散化的 Euler 方程为:

$$\sum_e \left[ \int_{\Omega^e} (\underline{B}^F)^T \underline{D} \underline{B} dV \right] \underline{u} = \sum_e \underline{f}_e, \quad (31a)$$

$$\left[ \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} (\underline{B}^F - \underline{B}) dV \right] \underline{u} = 0, \quad (31b)$$

其中  $\underline{f}_e$  为单元力, 其计算式为

$$(f_1)_{ia} = \int_{\Omega} f_i N_a dV + \int_{\partial\Omega_{\tau}} t_i N_a ds. \quad (32)$$

将(31)式进行变形, 则得到:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

若消去内部自由度  $\underline{a}$ , 则最终的有限元求解方程为:

$$\underline{K}\underline{u} = \underline{f}, \quad (34)$$

其中  $\underline{K} = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21}. \quad (35)$

## 5 结 语

小波有限元的含义是在有限元的插值函数中引入小波项插值函数, 它主要应用于分析具有大的梯度及具突变性质的问题, 若对普通问题小波有限元并无重大的实际意义。小波有限元法由于采用小波函数来构造其插值函数, 因此它继承了小波分析多分辨率的特性, 可以对大的梯度及具突变性质的问题给出较高分辨率的分析, 这是其最大的优点。利用非协调分析及分片试验确定了解的数值稳定性及收敛性, 同时也给出了插值函数的构造方法, 加之具有紧支集的正交小波基函数极易构造的, 而且计算也相对较容易(例如 Daubechies 系列小波), 因此这将是分析大梯度及具突变性质问题的有力工具。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] Ortiz M, Leory Y, Needleman A. A finite element method for localized failure analysis[J]. Comput Mech Appl Meth Engr g, 1987, **61**(2): 189~ 214.
- [2] Belyschko T, Fish J, Bayliss A. The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients[J]. Comput Meth Appl Mech Engr g, 1990, **81**(1): 71~ 89.
- [3] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Pure Appl Math, 1988, **12**(7): 909~ 996.
- [4] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets II: variations on a theme[J]. SIAM J Math, 1993, **24**(4): 499~ 619.
- [5] 刘贵忠, 邸双亮. 小波分析及其应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1992.
- [6] 吴长春, 卞学璜. 非协调数值分析与杂交元方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

## The Finite Element Method Based on Interpolating With Wavelet Basis Function

Luo Shaoming, Zhang Xiangwei

(Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P R China)

**Abstract:** The compactly supported wavelet basis functions are introduced into the construction of interpolating function of traditional finite element method when analyzing the problems with high gradient, and the traditional interpolating method is modified. The numerical stability of the new interpolating pattern is discussed and the convergence of the new method is also discussed by patch test analysis. The additional freedom of the new interpolating pattern is eliminated by static condensation method. Finally, the wavelet finite element formulations based on variational principles are put forward.

**Key words:** wavelet analysis; finite element method; nonconforming analysis