文章编号: 1000_0887(2000) 02_0171_05

变更 Boussinesq 方程和 Kupershmidt 方程的多孤子解*

张解放[1,2]

(1. 浙江工业大学 工程科学研究中心, 杭州 310032;
2. 浙江师范大学 物理系和非线性物理研究室, 金华 321004)

(张鸿庆推荐)

摘要: 使用王明亮引进的齐次平衡方法, 求出了变更 Boussinesq 方程和 Kupershmidt 方程的多孤子解, 而王明亮给出的变更的 Boussinesq 方程的单孤子解仅是上述结果的一种特殊情况.

关 键 词: 齐次平衡法; 多孤波解; Boussinesq 方程; Kupershmidt 方程
中图分类号: O175 文献标识码: A

最近, 王明亮提出了一种构造变更 Boussinesq 方程单孤子解的齐次平衡方法[1], 在这篇文章, 我们将推广这一方法, 求出变更 Boussinesq 方程和 Kupershmidt 方程的更一般的多孤子解. 而王明亮给出的变更 Boussinesq 方程的单孤子解仅是本文结果的一种特殊情况.

文[1] 给出的第一类变更的 Boussinesq 方程[2] 为

$$H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

$$u_t + H_x + uu_x = 0. \tag{2}$$

为了把方程(1) 和(2) 的非线性项和三阶偏导数项部分平衡, 王明亮假定方程(1) 和(2) 的解形式取为

$$H(x, t) = f(w)_{xx} + a = f''w_x^2 + f'w_{xx} + a, \tag{3}$$

$$u(x, t) = f(w)_x + b = f'w_x + b. \tag{4}$$

把(3) 和(4) 代入方程(1) 和(2), 我们可得到

$$\begin{aligned} H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = {} & \left(f'' + \frac{1}{2}f'^2\right)'' w_x^4 + f^{(3)}(w_x^2 w_t + bw_x^3 + 6w_x^2 w_{xx}) + \\ & 5f'f''w_x^2 w_{xx} + f''(2w_x w_{xt} + w_{xx}w_t + 3bw_x w_{xx} + aw_x^2 + 4w_x w_{xxx} + 3w_{xx}^2) + \\ & f'^2(w_{xx}^2 + w_x w_{xxx}) + f'(w_{xxt} + aw_{xx} + bw_{xxx} + w_{xxxx}) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u_t + H_x + uu_x = {} & \left(f'' + \frac{1}{2}f'^2\right)' w_x^3 + f''(w_x w_t + 3w_x w_{xx} + bw_x^2) + \\ & f'^2 w_x w_{xx} + f'(w_{xt} + bw_{xx} + w_{xxx}) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

令方程(5) 中 w_x^4 项前的系数和方程(6) 中 w_x^3 项前的系数为零, 得到

* 收稿日期: 1998_09_01; 修订日期: 1999_05_14
作者简介: 张解放(1959~), 男, 浙江义乌人, 教授.

$$f'' + \frac{1}{2}f'^2 = 0. \tag{7}$$

从方程(7)可解得

$$f = 2\ln w. \tag{8}$$

使用方程(7),令方程(5)中$f^{(3)}$、f''、f'前的系数和方程(6)中f''、f'前的系数为零,我们可导出一组$w(x,t)$应满足的方程

$$w_x^2(w_t + bw_x + w_{xx}) = 0, \tag{9}$$

$$2w_x(w_t + bw_x + w_{xx})_x + w_{xx}(w_t + bw_x + w_{xx}) = 0, \tag{10}$$

$$w_t + aw_{xx} + bw_x + w_{xx} = 0, \tag{11}$$

$$w_x(w_t + bw_x + w_{xx}) = 0, \tag{12}$$

$$(w_t + bw_x + w_{xx})_x = 0. \tag{13}$$

从方程(9)~(13),假定

$$a = 0, \tag{14}$$

我们能得到满足方程(9)~(13)的$w(x,t)$的一般解为

$$w(x,t) = 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t], \tag{15}$$

其中k_j为任意常数.

把(8)、(14)、(15)代入方程(3)和(4),我们可得到方程(1)和(2)的一般形式的多孤子解

$$H(x,t) = -\frac{2\left\{\sum_{j=1}^{n} k_j \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t]\right\}^2}{\left\{1 + \sum_{j=1}^{n} \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t]\right\}^2} + \frac{2\sum_{j=1}^{n} k_j^2 \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t]}{1 + \sum_{j=1}^{n} \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t]}, \tag{16}$$

$$u(x,t) = \frac{2\sum_{j=1}^{n} k_j \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t]}{1 + \sum_{j=1}^{n} \exp[k_j x - (bk_j + k_j^2)t]} + b, \tag{17}$$

其中b可取任意常数.

取$n = 1$,得到

$$H(x,t) = \frac{1}{2}k_1^2 \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(k_1 x - (bk_1 + k_1^2)t)\right], \tag{18}$$

$$u(x,t) = k_1 \tanh\left[\frac{1}{2}(k_1 x - (bk_1 + k_1^2)t)\right] + b + k_1. \tag{19}$$

解(18)和(19)正是王明亮给出的方程(1)和(2)的单孤子解.

取$n = 2$,得到

$$u(x,t) = 2\frac{k_1 e^{\xi_1} + k_2 e^{\xi_2}}{1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2}} + b, \tag{20}$$

$$H(x,t) = 2\frac{k_1^2 e^{\xi_1} + k_2^2 e^{\xi_2} + (k_1 - k_2)^2 e^{\xi_1 + \xi_2}}{(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2})^2} - 1, \tag{21}$$

其中

$$\xi_1 = k_1 x - (bk_1 + k_1^2)t, \tag{22}$$

$$\xi_2 = k_2 x - (bk_2 + k_2^2)t. \tag{23}$$

解(20)和(21)就是方程(1)和(2)的双孤子解.

取 $n = 3$, 得到

$$u(x, t) = 2\frac{k_1 e^{\xi_1} + k_2 e^{\xi_2} + k_3 e^{\xi_3}}{1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3}} + b, \tag{24}$$

$$H(x, t) = 2\frac{k_1^2 e^{\xi_1} + k_2^2 e^{\xi_2} + k_3^2 e^{\xi_3} + (k_1 - k_2)^2 e^{\xi_1 + \xi_2}}{(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3})^2} + 2\frac{(k_1 - k_3)^2 e^{\xi_1 + \xi_3} + (k_2 - k_3)^2 e^{\xi_2 + \xi_3}}{(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3})^2} - 1, \tag{25}$$

其中

$$\xi_3 = k_3 x - (bk_3 + k_3^2)t. \tag{26}$$

我们能把上面的思想推广研究 Kupershmidt 方程[3]

$$u_t + uu_x + H_x + \delta u_{xx} = 0, \tag{27}$$

$$H_t + (Hu)_x - \delta H_{xx} = 0. \tag{28}$$

为了把方程(27)和(28)的非线性项和二阶偏导数项部分平衡, 我们假设方程(27)和(28)的解形式取为

$$H = Af(w)_{xx} + c = Af''w_x^2 + Af'w_{xx} + c, \tag{29}$$

$$u = Bf(w)_x + d = Bf'w_x + d, \tag{30}$$

其中函数 $f(w)$, $w(x, t)$ 和常数 A, B, c, d 待定.

把(29)和(30)代入方程(27)和(28), 我们得到

$$[B^2 f'f'' + (A + B\delta)f^{(3)}]w_x^3 + (Bw_x w_t + dBw_x^2 + 3Aw_x w_{xx} + 3B\delta w_x w_{xx})f'' + (Bw_{xt} + dBw_{xx} + Aw_{xxx} + B\delta w_{xxx})f' + B^2 f'^2 w_x w_{xx} = 0, \tag{31}$$

$$(ABf'f^{(3)} - A\delta f^{(4)} + ABf''^2)w_x^4 + (Aw_x^2 w_t + Adw_x^3 - 4A\delta w_x^2 w_{xx})f^{(3)} + 5ABw_x^2 w_{xx} f'f'' + (2Aw_x w_{xt} + Aw_t w_{xx} + 3Adw_x w_{xx} + Bcw_x^2 - 3A\delta w_{xx}^2 - 4A\delta w_x w_{xxx})f'' + (Aw_{xxt} + Adw_{xxx} + Bcw_{xx} - A\delta w_{xxxx})f' + (ABw_x w_{xxx} + ABw_{xx}^2)f'^2 = 0. \tag{32}$$

令方程(31)中 w_x^3 项前的系数和(32)中 w_x^4 项前的系数为零, 我们得到

$$B^2 f'f'' + (A + B\delta)f^{(3)} = 0, \tag{33}$$

$$B(f'f^{(3)} + f''^2) - \delta f^{(4)} = 0. \tag{34}$$

假定

$$A = -2B\delta, \tag{35}$$

方程(33)和(34)有解

$$f = -\frac{2\delta}{B}\ln w, \tag{36}$$

从(36)可导出

$$Bf'f'' - \delta f^{(3)} = 0, \tag{37}$$

$$Bf'^{(2)} - 2\delta f'' = 0. \tag{38}$$

使用(33)~(38), 令方程(31)中的 f''、f' 前的系数和方程(32)中 $f^{(3)}$、f''、f' 前的系数为零, 我们可得一组 $w(x, t)$ 应满足的方程

$$Bw_x(w_t + dw_x - \delta w_{xx}) = 0, \tag{39}$$

$$B(w_t + dw_x - \delta w_{xx})_x = 0, \tag{40}$$

$$Aw_x^2(w_t + dw_x - \delta w_{xx}) = 0, \tag{41}$$

$$2Aw_x\left(w_t + dw_x + \frac{Bc}{2A} - \delta w_{xx}\right)_x + Aw_{xx}(w_t + dw_x - \delta w_{xx}) = 0, \tag{42}$$

$$A\left(w_t + dw_x + \delta w_{xx} + \frac{Bc}{A}w\right)_{xx} = 0 \cdot \tag{43}$$

从方程(39)~(43),假定

$$c = 0, \tag{44}$$

我们能得到满足方程(39)~(43)的 $w(x, t)$ 的一般解为

$$w(x, t) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\exp[k_jx - (dk_j - \delta k_j^2)t], \tag{45}$$

其中 k_j 是任意常数•

根据方程(35)~(36),从方程(29)和(30),我们得到方程(27)和(28)的一般多孤子解:

$$u(x, t) = -2\delta\frac{\sum_{j=1}^{n}k_j\exp[k_jx - (dk_j - \delta k_j^2)t]}{1 + \sum_{j=1}^{n}\exp[k_jx - (dk_j - \delta k_j^2)t]} + d, \tag{46}$$

$$H(x, t) = 4\delta^2\frac{\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j\exp[k_jx - (dk_j + \delta k_j^2)t]\right\}^2}{\left\{1 + \sum_{j=1}^{n}\exp[k_jx - (dk_j + \delta k_j^2)t]\right\}^2} - 4\delta^2\frac{\sum_{j=1}^{n}k_j^2\exp[k_jx - (dk_j + \delta k_j^2)t]}{1 + \sum_{j=1}^{n}\exp[k_jx - (dk_j + \delta k_j^2)t]}, \tag{47}$$

其中 d 可取任意常数•

取 $n = 1$, 得到

$$u(x, t) = -\delta k_1\tanh\left[\frac{1}{2}(k_1x - (dk_1 - \delta k_1^2)t)\right] + d - \delta k_1, \tag{48}$$

$$H(x, t) = \delta^2k_1^2\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}(k_1x - (dk_1 - \delta k_1^2)t)\right] \cdot \tag{49}$$

取 $n = 2$, 得到

$$u(x, t) = -2\delta\frac{k_1e^{\xi_1} + k_2e^{\xi_2}}{1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2}} + a, \tag{50}$$

$$H(x, t) = 4\delta^2\frac{k_1^2e^{\xi_1} + k_2^2e^{\xi_2} + (k_1 - k_2)^2e^{\xi_1 + \xi_2}}{(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2})^2} - 1, \tag{51}$$

其中

$$\xi_1 = k_1x - (dk_1 + k_1^2)t, \tag{52}$$

$$\xi_2 = k_2x - (dk_2 + k_2^2)t \cdot \tag{53}$$

取 $n = 3$, 得到

$$u(x, t) = -2\delta\frac{k_1e^{\xi_1} + k_2e^{\xi_2} + k_3e^{\xi_3}}{1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3}} + a, \tag{54}$$

$$H(x,t)=4\delta^2\frac{k_1^2e^{\xi_1}+k_2^2e^{\xi_2}+2k_3^2e^{\xi_3}+(k_1-k_2)^2e^{\xi_1+\xi_2}}{(1+e^{\xi_1}+e^{\xi_2}+e^{\xi_3})^2}+4\delta^2\frac{(k_1-k_3)^2e^{\xi_1+\xi_3}+(k_2-k_3)^2e^{\xi_2+\xi_3}}{(1+e^{\xi_1}+e^{\xi_2}+e^{\xi_3})^2}-1, \tag{55}$$

其中

$$\xi_3=k_3x-(dk_3+k_3^2)t. \tag{56}$$

总之, 通过使用齐次平衡方法, 我们能求出第一变更 Boussinesq 方程和 Kupershmidt 方程的一般形式的多孤子解. 值得指出的是, 第二类变更的 Boussinesq 方程[4] 的多孤子解不能用这种方法得到. 推广本文给出的方法到高阶非线性演化方程值得进一步研究.

[参 考 文 献]

[1] Wang Mingliang. Solitary wave solutions for the variant Boussinesq equations[J]. Phys Lett A, 1995, **199**(2): 169~172.

[2] Sach R L. On the integrable variant of the Boussinesq system, Painleve property, rational solutions, a related many body system, and equivalence with the AKNS hierarchy[J]. Physica D, 1988, **30**(1): 1~27.

[3] Ruan Hangyu, Lou Sengue. Similarity analysis and Painleve property of the Kupershmidt equation[J]. Commun Theor Phys, 1993, **20**(1): 73~80.

[4] Whitham G B. Linear and Nonlinear and Waves[M]. New York: Wiley_Interscience, 1973.

Multi_Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations and Kupershmidt Equations

Zhang Jiefang[1,2]

(1. Research Centre of Engineering Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, P R China;

2. Department of Physics and Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, P R China)

Abstract: Using the homogeneous balance method introduced by Wang Mingliang, the multi_solitary wave solutions are obtained for the variant Boussinesq equation and Kupershmidt equation. The Wang's result is a special case of above results for the variant Boussinesq equation.

Key words: multi_solitary wave solutions; balance method; Boussinesq equation; Kupershmidt equation