应用数学和力学, 第 21 卷 第 2 期(2000 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 02_0164_07

# 弹塑性损伤结构耦合分析的虚功原理和线性互补解法*

马景槐

(新疆石油学院, 乌鲁木齐 830000)

(张汝清推荐)

摘要: 从弹塑性损伤力学的瞬态边值问题的虚位移原理出发, 利用有限元技术, 导出了弹塑性损伤结构分析的线性互补方程, 并给出了有限元算法• 这一方法适用于解决硬化、软化及非关联流动等非线性材料的损伤结构分析•

关 键 词: 弹塑性损伤力学; 虚功原理; 有限元; 线性互补方程
中图分类号: O346.5; T115 文献标识码: A

## 引 言

近十几年来, 连续介质损伤力学在许多工程领域得到了越来越多的应用, 目前损伤力学研究的热点主要在材料的损伤本构关系方面• 有关损伤结构分析原理方面的研究还较欠缺• 现在普遍采用的损伤分析有限元方法是基于一般的弹塑性变分原理[1], 以时间增量步长逐级耦合来考虑损伤本构关系的迭代解法• 此方法较粗糙, 为严谨, 有时计算误差较大• 由于采用迭代解法, 即使在一个较小的载荷增量内, 也要反复使用“试探—求解—调整”过程• 需要多次求解代数方程组, 计算时间较长, 当加载路径较复杂时, 此方法的收敛性较差, 有时甚至不收敛•

损伤的本构行为涉及到材料的软化、硬化、非关联流动、非比例加载等高度非线性问题• 结构的损伤分析是结构应力、应变场和损伤场同时耦合的结果• 应采用耦合的分析方法• 文[2]提出了采用参变量变分原理的损伤耦合分析方法• 本文从弹塑性损伤的瞬态边值问题的虚位移原理出发, 利用有限元技术, 导出了适用于硬化、软化材料的弹塑性损伤结构分析的线性互补解法•

## 1 损伤演化方程

对于弹塑性各向同性损伤材料, 设 $\psi$ 为系统的 Holmholtz 自由能, $\Phi^*$ 为系统的耗散余势, $\omega$ 为 Kachnov 各向同性损伤变量, $\sigma = \sigma/(1-\omega)$ 为损伤有效应力, $Y = \rho\partial\psi/\partial\omega$ 为损伤应变能释放率, $\rho$ 为材料的密度•

由损伤力学理论可得损伤演化方程为

* 收稿日期: 1997_12_24; 修订日期: 1999_05_15
作者简介: 马景槐(1952~ ), 男, 江苏镇江人, 副教授, 硕士.

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial Y}, \tag{1}$$

式中
$$Y = -\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-\omega)} R_v, \tag{2}$$

其中 $R_v$ 为三轴应力参数,

$$R_v = \frac{2}{3}(1+\mu) + 3(1-2\mu)\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)^2 . \tag{3}$$

Lemaitre 取 $\Phi^*$ 为

$$\Phi^* = -\frac{B}{b+1}\left(\frac{Y}{B}\right)^{b+1} \dot{\varepsilon}_{eq}^p, \tag{4}$$

式中: $B$、$b$ 为只与材料和温度有关的系数, $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ 为等效塑性应变率.

应用单向拉伸的 Rambeq_Osgood 硬化规律, 并推广到三向应力状态, 有

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-\omega} = K'(\varepsilon_{eq}^p)^{1/M}, \tag{5}$$

式中: $K'$、$M$ 为材料常数.

将(4)式代入(1)式并考虑到(2)式和(5)式, 可得损伤演化方程

$$\frac{d\omega}{dt} = \left\{\frac{K'^2}{2EB}\left[\frac{2}{3}(1+\mu) + 3(1-2\mu)\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)\right](\varepsilon_{eq}^p)^{2/M}\right\}^b \dot{\varepsilon}_{eq}^p . \tag{6}$$

# 2　弹塑性损伤体瞬态边值问题的基本方程

## 2.1　基本方程

设 $u$、$\varepsilon^p$、$\sigma$、$\omega$、$\lambda$ 等为在 $t$ 时刻一组刻画损伤变形体 $\Omega$ 的形态与受力状态参量, 求这组参量的时间变化率, 使其满足下列基本方程:

1) 平衡微分方程

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0; \tag{7}$$

2) 几何方程

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}); \tag{8}$$

3) 本构关系

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) - \frac{\sigma_{ij}^0 \dot{\omega}}{(1-\omega^0)}, \tag{9}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \dot{\lambda} \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial Y}, \tag{11}$$

$$Y = -\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-\omega)^2} R_v; \tag{12}$$

4) 边界条件与初始条件

$$\dot{\sigma}_{ij,j} \cdot n_j = \dot{\bar{p}}_i \qquad (\text{在 } S_p \text{ 上}), \tag{13}$$

$$\dot{u}_i = \dot{\bar{u}}_i \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}), \tag{14}$$

$$\omega|_{t=0} = 0; \tag{15}$$

5) 塑性变形强化参量 $\kappa$ 的演化过程: 由于当产生新的塑性变形时, 内变量会有相应的改变, 故通常还要给出塑性变形内变量演化方程. 对于率无关材料, $\dot{\kappa}$ 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 之间具有一次齐次

的关系, 所以由(10) 式得

$$\dot{\kappa} = h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}, \kappa)\dot{\lambda} \tag{16}$$

例如对于 work harding 材料, 由 $\dot{\kappa} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \sigma_{ij}(\partial f/\partial\sigma_{ij})\dot{\lambda}$ 得

$$h = \sigma_{ij}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{17}$$

在以上诸式中的 $f$ 为加载曲面函数, 其方程一般为

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}, \kappa) = 0. \tag{18}$$

## 2.2　过程加载准则

在流动法则(10)式中, $\dot{\lambda}$ 取非零值当且仅当该介质点处于塑性加载状态. 以下在应变空间中定义适合于硬化、软化、理想塑性材料的介质点时刻变载准则.

为此, 引进加载准则函数

$$l = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}. \tag{19}$$

1) 当 $f < 0$ 或 $f = 0$, 但 $l \leqslant 0$ 时, 为弹性加载或塑性卸载状态, 此时 $\dot{\lambda} = 0$.

2) 当 $f = 0$ 且 $l > 0$ 时, 为塑性损伤加载状态, 此时 $\dot{\lambda} > 0$.

设经过充分小的时段 $\mathrm{d}t$ 后, 各状态参量的变化量分别为 $\mathrm{d}u_i$、$\mathrm{d}\sigma_{ij}$、$\mathrm{d}\kappa$ 等, 则在此过程中, 显然应满足

$$f(\sigma_{ij} + \mathrm{d}\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p} + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}, \kappa + \mathrm{d}\kappa) \leqslant 0. \tag{20}$$

为简化计算, 对 $f$ 作一阶泰勒展开

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\mathrm{d}\kappa \leqslant 0.$$

因为弹塑性损伤问题以 $\mathrm{d}u_i$、$\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\omega$ 作为基本未知量, 所以由(10) 式可得

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \frac{\sigma_{ij}^{0}}{1-\omega^{0}}\mathrm{d}\omega - \pi\mathrm{d}\lambda \leqslant 0, \tag{21}$$

其中

$$\pi = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} - h\frac{\partial f}{\partial \kappa}. \tag{22}$$

由塑性理论要求在变形过程中应满足 $\pi \geqslant 0$ 的条件[3]. 由 $D_{ijkl}$ 的正定性可知 $\pi$ 的第一项非负, 下面讨论

$$\pi' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} + h\frac{\partial f}{\partial \kappa} \tag{23}$$

的正负.

对于理想塑性材料, $\pi' = 0$, 而对于强化、软化材料可分成两种情况来讨论.

a) 若介质点处于弹性或塑性卸载状态, 则在 $t$ 时刻之后的一个充分小的时段内, $\varepsilon_{ij}^{p}$ 和 $\kappa$ 皆保持不变, 而 $\pi'$ 中的偏导数应理解为对应于 $t$ 时刻的右偏导, 所以有 $\pi' = 0$.

b) 若介质点处于塑性加载状态, 由塑性变形一致性条件, 有

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\dot{\kappa} = 0. \tag{24}$$

对于硬化材料, 由应力空间加载准则[3] 可知, 上式中的第一项非负, 将(10)、(17) 两式代入上式得 $\pi' \leqslant 0$.

对于软化材料, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} < 0$, $\pi' \geqslant 0$, 在加载时, 应变空间屈服面总是扩张的, 这时应对软化

速率有一定的限制, $\dot{\pi} \leqslant \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$, 以保证 $\pi \geqslant 0$ 的要求.

根据介质点的时刻变载准则及 $\pi \geqslant 0$ 的条件, 可以得到弹塑性损伤体的介质点在一个充分小的时段内的过程变载准则:

$$f = f_0 + \frac{\sigma_{ij}^0}{1-\omega^0} \mathrm{d}\omega + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \pi \mathrm{d}\lambda \leqslant 0, \tag{25a}$$

$$f \cdot \mathrm{d}\lambda = 0, \quad \mathrm{d}\lambda \geqslant 0 \qquad (\text{在 } \Omega \text{ 中}). \tag{25b}$$

## 2.3 损伤演化方程的处理

记 $\quad \dot{\omega} = L(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}),$ $\hfill (26)$

将 $L(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}})$ 作一阶泰勒展开, 有

$$L(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}) = L^0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}) + \frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}. \tag{27}$$

将(9)、(10)式代入上式, 得

$$L(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}) = L^0 + \frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\sigma_{ij}^0}{1-\omega^0} \mathrm{d}\omega + \left[\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - D_{ijkl} \frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right] \mathrm{d}\lambda.$$

将上式代入(26)式中, 有

$$D_{ijkl} \frac{\partial L}{\partial \sigma_{kl}} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \left[\frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\sigma_{ij}^0}{1-\omega_0} \mathrm{d}t + 1\right] \mathrm{d}\omega + \left[\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - D_{ijkl} \frac{\partial L}{\sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right] \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\lambda + L^0 \mathrm{d}t = 0. \tag{28}$$

# 3 虚 功 原 理

设 $\delta u_i$ 为满足 $S_u$ 上齐次边界条件的任意虚位移, 将 $\delta u_i$ 乘以(7) 式, 并在区域内积分, 有

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij,j} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \dot{b}_i \delta u_i \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{29}$$

利用分部积分法, 并注意到(13)式, 及在 $S_u$ 上, $\delta u_i = 0$, 上式成为

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{ij} \delta u_{i,j} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \dot{b}_i \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{S_p} \dot{\bar{p}}_i \delta u_i \mathrm{d}s. \tag{30}$$

将(9)、(10)式代入上式, 可得虚功方程

$$\int_\Omega \left(D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \varepsilon_{kl} - D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^0} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{kl}\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \dot{b}_i \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{S_p} \dot{\bar{p}}_i \delta u_i \mathrm{d}s. \tag{31}$$

从虚功方程的推导可知, (31)式隐含区域 $\Omega$ 上的平衡微分方程(7)、$S_p$ 上的边界条件(13), 此外(31) 式还进一步利用了本构关系(9)、(10). 若将其进行有限元离散后, 几何关系(8)式和位移边界条件(14) 式被强制性满足, 则还剩下(11)、(15)式及(25) 式. 由于损伤演化方程(11) 式的展开式为(28) 式, 因此弹塑性损伤力学问题的完整变分提法应该是在(28)、(15)及(25) 式的约束下求解虚功方程(31) 式.

# 4 有限元离散及线性互补解法

将连续体 $\Omega$ 作有限元离散, 共划分为 $n$ 个单元(其中塑性单元 $n_1$ 个, 力边界单元 $n_2$ 个),

设 $\boldsymbol{u}^e$ 为 $t$ 时刻单元 $e$ 的结点位移列阵，引入有限元插值函数 $\boldsymbol{N}(x)$，得

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{N}_u(x)\boldsymbol{u}^e(t),\quad \omega(x,t)=\boldsymbol{N}_\omega(x)\omega^e(t),\quad \varepsilon(x,t)=\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{u}^e(t),\tag{32}$$

式中，$\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{L}(\Delta)\boldsymbol{N}_u(x)$，这里 $\boldsymbol{L}(\Delta)$ 为微分算子矩阵。

将(32)式代入(31)式，得

$$\sum_{e=1}^{n}(\delta\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^e\dot{\boldsymbol{u}}^e-\sum_{e=1}^{n_1}(\delta\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\Phi_1^e\dot{\lambda}^e-\sum_{e=1}^{n}(\delta\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\Phi_2^e\dot{\omega}^e=$$

$$\sum_{e=1}^{n}(\delta\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}_1^e+\sum_{e=1}^{n_2}(\delta\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}_2^e。\tag{33}$$

再令 $\boldsymbol{u}$，$\lambda$，$\omega$ 分别为 $t$ 时刻有限元系统的结点位移列阵，塑性流动因子列阵和结点损伤值列阵。通过单元的组集装配，并注意到 $\delta\boldsymbol{u}$ 的任意性，得

$$\boldsymbol{K}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}-\Phi_1\cdot\dot{\lambda}-\Phi_2\cdot\dot{\omega}=\dot{\boldsymbol{q}},\tag{34}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\Omega,\tag{35}$$

$$\Phi_1=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\sigma}\mathrm{d}\Omega,\tag{36}$$

$$\Phi_2=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}\left[\left(\frac{1}{1-\omega^0}\right)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\sigma^0\boldsymbol{N}_\omega\right]\mathrm{d}\Omega,\tag{37}$$

$$\boldsymbol{q}_2=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{N}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\Omega+\sum_{e=1}^{n_2}\int_{S_p}\boldsymbol{N}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}s。\tag{38}$$

对(34)式在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 上进行积分，并采用欧拉积分，得

$$\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{u}-\Phi_1\delta\lambda-\Phi_2\delta\omega=\delta\boldsymbol{q}。\tag{39}$$

在弹塑性损伤问题中，$\delta\boldsymbol{u}$、$\delta\lambda$、$\delta\omega$ 除了应满足虚功方程(31)式外，还应在域内满足损伤演化方程(28)式，初始条件(16)式和变载准则(25)式。下面将(28)和(29)式进行有限元离散，得

$$\boldsymbol{C}_1\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{U}_1\delta\omega+\boldsymbol{V}_1\delta\lambda+\boldsymbol{l}_D=0,\tag{40}$$

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{C}_2\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{U}_2\delta\omega+\delta\lambda+\boldsymbol{f}_D=0,\tag{41a}$$

$$\boldsymbol{f}\cdot\delta\lambda=0,\quad\delta\lambda\geqslant 0,\tag{41b}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\sigma}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\Omega,\tag{42}$$

$$\boldsymbol{C}_2=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\sigma}\right)\mathrm{d}\Omega,\tag{43}$$

$$\boldsymbol{U}_1=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}-\left[\boldsymbol{N}_\omega^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\sigma}\frac{\sigma^0}{1-\omega^0}\mathrm{d}t+1\right)\right]\mathrm{d}\Omega,\tag{44}$$

$$\boldsymbol{U}_2=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}\left(\boldsymbol{N}_\omega^{\mathrm{T}}\frac{\sigma^0}{1-\omega^0}\right)\mathrm{d}\Omega,\tag{45}$$

$$\boldsymbol{V}_1=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\varepsilon^{\mathrm{p}}}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\sigma}-\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\sigma}\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\sigma}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega,\tag{46}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\sigma}\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\sigma}-H'\right)\mathrm{d}\Omega,\tag{47}$$

$$\boldsymbol{l}_D=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{L}^0\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\,\Omega,\tag{48}$$

$$\boldsymbol{f}_D=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\boldsymbol{f}(\sigma,\ \varepsilon^{\mathrm{p}},\ \kappa)\,\mathrm{d}\,\Omega\cdot\tag{49}$$

由(39)式,可解得

$$\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}^{-1}(\Phi_1\delta\lambda+\Phi_2\delta\omega+\delta\boldsymbol{q})\cdot\tag{50}$$

将上式代入(40)式,可得

$$\delta\omega=-\boldsymbol{H}_2^{-1}(\boldsymbol{H}_1\delta\lambda+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}^{-1}\delta\boldsymbol{q}+\boldsymbol{l}_D),\tag{51}$$

式中

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}^{-1}\Phi_1+\boldsymbol{V}_1,\tag{52}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}^{-1}\Phi_2+\boldsymbol{V}_2\cdot\tag{53}$$

再将(50)、(51)两式代入(41)式中,进行整理后,并引入松驰变量 $\boldsymbol{v}$,可得到弹塑性损伤问题有限元分析的线性互补方程

$$\boldsymbol{v}-\Phi\delta\lambda=\boldsymbol{R},\tag{54a}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\lambda=0,\qquad \boldsymbol{v}\geqslant 0,\ \ \delta\lambda\geqslant 0,\tag{54b}$$

式中

$$\Phi=(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{K}^{-1}\Phi_2+\boldsymbol{U}_2)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H}_2^{-1}\cdot[\boldsymbol{H}_1-(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{K}^{-1}\Phi_1+\boldsymbol{V}_2)],\tag{55}$$

$$\boldsymbol{R}=-(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{K}^{-1}\Phi_2+\boldsymbol{U}_2)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H}_2^{-1}\cdot(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{K}^{-1}\delta\boldsymbol{q}+\boldsymbol{l}_D)-\boldsymbol{f}_D\cdot\tag{56}$$

(54)式是一个关于 $\delta\lambda$、$\boldsymbol{v}$ 的非负互补问题,非线性计算仅表现在(54)式中的互补项中·

## 5　解 法 过 程

将损伤变形体进行有限元离散,在得到形状插值函数 $\boldsymbol{N}_u$、$\boldsymbol{N}_\omega$、$\boldsymbol{B}$ 后,按弹性有限元中的方法得到单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 和外载列阵 $\boldsymbol{q}^e$·　根据初始条件 $\omega|_{t=0}=0$ 和损伤演化方程(6)可知,这里只考虑塑形损伤问题,因此,我们可从初始时刻起,沿着加载路径先进行弹性计算,直到有单元进入塑形损伤状态,纪录下对应于该时刻 $t_0$ 有限元系统内有关的状态参量 $\sigma_0$、$\varepsilon_0^{\mathrm{p}}$、$\omega_0$、$\kappa_0$ 等·　然后,再沿着 $t_0$ 后的加载路径,离散时间变量 $t_0=t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ 和相应的载荷 $p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$,将其细分为若干个适当的载荷增量步·　问题是已知 $t$ 时刻有限元系统内的状态参量 $\boldsymbol{u}_t$、$\sigma_t$、$\varepsilon_t^{\mathrm{p}}$、$\omega_t$ 及 $\kappa_t$,以及塑性损伤区分布,如何求对应于载荷增量步 $\delta\boldsymbol{q}$ 的 $\delta\boldsymbol{u}$、$\delta\sigma$、$\delta\varepsilon^e$、$\delta\omega$、$\delta\kappa$ 等·　具体计算过程如下:

1) 塑性损伤区预测: 先将问题视为弹性,计算出对应于 $\delta\boldsymbol{q}$ 的"弹性应力场"$\delta\sigma'$,然后依次对弹性区中的各单元进行检查·　若:

$$\int_{\Omega^e}\boldsymbol{f}(\sigma_t,\ \varepsilon_t^{\mathrm{p}},\ \kappa_t)\geqslant 0,\tag{57}$$

则将该单元视为塑性损伤单元·

2) 若无塑性损伤单元,则表明 $\delta\boldsymbol{q}$ 系统呈弹性响应,此时仅需将 $\sigma_t$ 叠加上 $\delta\sigma'$,而 $\varepsilon_t^{\mathrm{p}}$ 和 $\kappa_t$ 保持不变,然后转向下一个载荷载量步,否则计算损伤耦合刚度矩阵 $\boldsymbol{K}=(1-\omega^0)\boldsymbol{K}$,并依次对各塑性单元计算出相应的 $\Phi_1^e$、$\Phi_2^e$、$\boldsymbol{C}_1^e$、$\boldsymbol{C}_2^e$、$\boldsymbol{U}_1^e$、$\boldsymbol{U}_2^e$、$\boldsymbol{V}_1^e$、$\boldsymbol{V}_2^e$、$\boldsymbol{l}_D^e$、$\boldsymbol{f}_D^e$·　根据(37)~(49)式组装成结构整体矩阵 $\Phi_1$、$\Phi_2$、$\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{C}_2$、$\boldsymbol{U}_1$、$\boldsymbol{U}_2$、$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$、$\boldsymbol{l}_D$、$\boldsymbol{f}_D$·

3) 依次计算 $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\Phi$, $\boldsymbol{R}$·

4) 解线性互补方程(54)式,得 $\delta\lambda$,再由(51)和(50)式,可求得结点损伤增量 $\delta\omega$ 和结点位

移增量 $\delta \boldsymbol{u}$•

5) 按以下诸式计算各增量

$$\delta \varepsilon^{p} = \delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma},\ \delta \sigma = \boldsymbol{D}(\delta \varepsilon - \delta \varepsilon^{p}),\ \delta \kappa = \boldsymbol{h} \delta \lambda \tag{58}$$

6) 累加计算: 从而得到 $t + \delta t$ 时刻有限元系统的各状态增量为

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_{t+\delta t} = \boldsymbol{u}_t + \delta \boldsymbol{u},\ \varepsilon_{t+\delta t} = \varepsilon_t + \delta \varepsilon,\ \varepsilon^{p}_{t+\delta t} = \varepsilon^{p}_t + \delta \varepsilon^{p}, \\ \sigma_{t+\delta t} = \sigma_t + \delta \sigma,\ \omega_{t+\delta t} = \omega_t + \delta \omega,\ \kappa_{t+\delta t} = \kappa_t + \delta \kappa \end{array}\right\} \tag{59}$$

7) 修正塑性损伤区, 将塑性损伤区中 $\delta \lambda = 0$ 的那些单元去掉•

8) 计算下一个时间增量步 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 和对应的外载增量 $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$•

9) 重复 1) ~ 8) 直至加载过程结束, 这样可得到完整的结构应力应变损伤场的全耦合结果•

# 6 结　　语

本文根据弹塑性损伤力学的瞬态边值问题, 提出了损伤结构分析的虚功原理• 利用有限元分析技术, 导出了适用于硬化、软化等材料损伤结构全耦合分析的线性互补解法• 对于软化材料, 要求对材料的软化速率有一定的限制, 以保证 $\pi \geqslant 0$ 的条件•

运用本文提出的损伤结构全耦合分析的线性互补解法, 具有求解规模小、计算速度快等优点, 可弥补迭代解法的某些不足之处, 具有较大的工程实际意义•

## [参 考 文 献]


[1] 楼志文. 损伤力学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

[2] 曾攀. 材料的概率疲劳损伤特性与结构分析原理[M]. 北京: 科学技术文献出版社, 1993.

[3] 曲圣年, 殷有泉. 塑性力学的 Drucker 公设和 ½³ ÐËº ¿ 公设[J]. 力学学报, 1981, **13**(5): 465~473.


# The Virtual Work Principle and Linear Complementary Method for Coupling Analysis of Elasto_Plastic Damage Structure


Ma Jinghuai

(Xinjiang Petroleum Institute, Ulumuqi 830000, P R China)



**Abstract:** The virtual displacement principle of elasto_plastic damage mechanics is presented. A linear complementary method for elasto_plastic damage problem is proposed by using FEM technique. This method is applicable to solving the damage structure analysis of hardened and softened nonlinear material.



**Key words:** elasto_plastic damage mechanics; virtual work principle; FEM technique; linear complementary method