应用数学和力学, 第 21 卷 第 2 期(2000 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2000) 02_0161_03

X_M_PN 空间中的若干定理*

朱传喜

(南昌大学(南区) 数学教研室, 南昌 330029)

(协平推荐)

摘要: 提出了 X_M_PN 空间的新概念, 在 X_M_PN 空间中证明了锐角原理, 同时得到了若干新的结果•

关键词: 弱概率内积空间; 拓扑度; 锐角原理; 代数; X_M_PN 空间
中图分类号: O177.91; O211.1 文献标识码: A

设 $\mathbf{R}$ 表示一切实数之集合, $\mathbf{R}^+$ 表示一切非负实数的集合• 映象 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 称为分布函数, 如果它是非减的、左连续的, 又满足:

$$\inf_{t\in\mathbf{R}} F(t) = 0, \quad \sup_{t\in\mathbf{R}} F(t) = 1,$$

用 D^+ 表示一切分布函数之集合•

令 $D_0^+ = \left\{F \in D^+ \mid F(0) = 0\right\}$•

记 $\Delta'_\omega = \left\{T \text{ 为弱 } \Delta \text{ 模} \mid T(a, b), \ \forall (a, b) \in [0, 1]\right\}$, 对 $T \in \Delta'_\omega$, 令 $S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$• 又记 $T_0 = \min\left\{a, b\right\}$; $T_1 = \max\left\{a, b\right\}$•

定义 1 设 E 是有单位元的可换环并且为实数域 $\mathbf{R}$ 上的代数, (E, F, T) 是一个概率度量空间, 其中 $F: E \times E \to D_0^+$, 又满足下列条件:

(X_1) (E, F, T) 是一个弱概率内积空间[1, 2];

(X_2) 令 $F_{x\cdot y}(t) = F_{(x, y)}(t)$, $\forall x, y \in E$, 其中“•”为 E 中的乘法符号, (E, F, T) 是一个 Menger 概率线性赋范空间(简称 M_PN 空间)• 那么我们称 (E, F, T) 为 X_M_PN 空间•

例 1 设 $\mathbf{R}$ 表示实数域, 在概率度量空间 (R, F, T) 中, 取 $T = T_0$, 对于 $\mathbf{R}$ 中通常的加法和乘法运算, R 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的代数• 如果我们令 $F_{x\cdot y}(t) = F_{(x, y)}(t) = H(t - |xy|)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 那么 (R, F, T) 是一个 X_M_PN 空间•

解 在 $\mathbf{R}$ 中令 $(x, y) = |xy|$, 于是

$F_{(x, y)}(t) = H(t - (x, y))$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 根据参考文献[2]、[1] 可知 (R, F, T) 是一个弱概率内积空间, 即满足定义 1 中的条件 (X_1)•

因为 $F_{x\cdot y}(t) = H(t - |xy|)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 根据参考文献[3] 中例 1 可知 (R, F, T) 是一个 M_PN 空间, 于是 (R, F, T) 满足定义 1 中条件 (X_2)•

---

* 收稿日期: 1997_03_24; 修订日期: 1999_03_20
作者简介: 朱传喜(1956~), 男, 教授, 硕士, 室副主任, 在《数学学报》、《数学进展》等刊物上发表论文 30 篇.

综上所述, 概率度量空间 (R, F, T) 为 X_M_PN 空间•

定义 2 在 X_M_PN 空间 (E, F, T) 中, 如果 $T = T_1$, 那么我们称 (E, F, T) 为 H 型 X_M_PN 空间; 如果 $T = T_0$, 那么我们称 (E, F, T) 为 B_0 型 X_M_PN 空间•

引理 1(参见文献[2]、[1]) 设 (E, F, T) 为弱概率内积空间, 则可赋予 E 上一族充分的半内积: $\{(x, y)_r \mid r \in (0, 1)\}$, 即对 $\forall r \in (0, 1)$, 有:

$(x, x)_r \geqslant 0$;

$(x, x)_r = 0, \quad \forall r \in (0, 1) \Leftrightarrow x = \theta$;

$(x, y)_r = (y, x)_r$;

$(\lambda x, y)_r = \lambda(x, y)_r, \quad \forall \lambda \in R$;

$(x + y, z)_r = (x, z)_r + (y, z)_r$•

又若 $F_{(x,y)} \in D_0^+$, 则 $(x, y)_r \geqslant 0$, $r \in (0, 1)$; 且 $r_1 \leqslant r_2 \Rightarrow (x, y)_{r_1} \leqslant (x, y)_{r_2}$•

引理 2(参见文献[2]、[1]) 设 (E, F, T) 为 H 型弱概率内积空间, 则可由概率内积导出一个内积 (x, y), 使 $(E, (\cdot, \cdot))$ 成为内积空间• 反之, 若 $(E, (\cdot, \cdot))$ 为内积空间, 则可由内积导出一个概率内积 F, 使 (E, F, T) 成为 H 型弱概率内积空间•

由定义 1 和定义 2 可知, : H 型 X_M_PN 空间必是 H 型弱概率内积空间; B_0 型 X_M_PN 空间必是 B_0 型弱概率内积空间•

为便利起见, 在 B_0 型 X_M_PN 空间中, 取定 $r = r_0$, r_0 为 $(0, 1)$ 区间内的一个常数, 并记 $(x, y)_{r_0} = (x, y)$, $\forall x, y \in E$• 则 H 型和 B_0 型的 X_M_PN 空间导出的内积都用 $(\cdot, \cdot)$ 表示•

令 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $\forall x \in E$, 则 $\|\cdot\|$ 是 H 型和 B_0 型 X_M_PN 空间中的范数•

根据参考文献[4]可知: 概率度量空间中拓扑度定理在 X_M_PN 空间中成立•

定理 1 设 (E, F, T) 为 H 型或 B_0 型 X_M_PN 空间, D 是 E 中有边界的开集, $\theta \in D$, 又设 $A: D \to E$ 紧连续, 并且当 $\boldsymbol{x} \in \partial D$ 时, 恒有: $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, 那么非线性算子方程 $A\boldsymbol{x} = \theta$ 在 D 中必有解(即 A 在 D 中必有零点)•

证明 可设 $A\boldsymbol{x} \neq \theta$, $\forall \boldsymbol{x} \in \partial D$(否则, $A\boldsymbol{x} = \theta$, $\forall \boldsymbol{x} \in \partial D$, 即 $A\boldsymbol{x} = \theta$ 在 D 中有解, 定理获得证明)

令 $\qquad h_\lambda(\boldsymbol{x}) = (1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda A\boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in D, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$

因此, 由引理 1 和引理 2 可知:

$$\begin{aligned} \|h_\lambda(\boldsymbol{x})\|^2 = (h_\lambda(\boldsymbol{x}), h_\lambda(\boldsymbol{x})) = {} & (1 - \lambda)^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 + \\ & 2\lambda(1 - \lambda)(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \lambda^2 \|A\boldsymbol{x}\|^2 \text{•} \end{aligned}$$

根据已知条件 $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, $\theta \in D(\|\boldsymbol{x}\| \neq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \partial D)$ 可知: 当 $\boldsymbol{x} \in \partial D$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时, 有:

$$\|h_\lambda(\boldsymbol{x})\|^2 > 0, \text{即: } \|h_\lambda(\boldsymbol{x})\| > 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \partial D,$$

从而 $\theta \notin h_\lambda(\partial D)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$• 于是, 根据[4]中拓扑度的同伦不变性与正规性可得:

$$\deg(A, D, \theta) = \deg(h_1, D, \theta) = \deg(h_0, D, \theta) = \deg(I, D, \theta) = 1 \text{•}$$

又根据[4]中拓扑度的可解性可知: 存在 $x_0 \in D$ 使得 $Ax_0 = \theta$, 即 $A\boldsymbol{x} = \theta$ 在 D 中必有解 x_0•

因此, 非线性算子方程 $A\boldsymbol{x} = \theta$ 在 D 中必有解•

注 在定理 1 中当 $E = R^n$, 条件 $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0(\forall \boldsymbol{x} \in \partial D)$ 表示广义向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $A\boldsymbol{x}$ 的夹角 α 是锐角 $(0 \leqslant \alpha \leqslant 90°)$• 因此, 我们称定理 1 为锐角原理•

定理 2 设 (E, F, T) 是一个 H 型或 B_0 型 X_M_PN 空间, D 是 E 中有边界的开集, $\theta \in D$,

又设 $A: D \to E$ 紧连续, 并且当 $\boldsymbol{x} \in \partial D$ 时, 恒有: $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2$, 则 A 在 D 中必具有不动点, 即存在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$, 使得 $Ax_0 = x_0$.

证明　令 $B = I - A$, 则当 $\boldsymbol{x} \in \partial D$ 时,

$$(B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 - (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0.$$

因此, 根据定理 1 可知: 存在 $x_0 \in D$, 使得:

$$Bx_0 = \theta, \text{即 } x_0 - Ax_0 = \theta, \text{即 } Ax_0 = x_0.$$

定理 3　设 (E, F, T) 是一个 H 型或 B_0 型 X_M_PN 空间, D 是 E 中有边界的开集, $\theta \in D$, 又设 $A: D \to E$ 紧连续, 并且当 $\boldsymbol{x} \in \partial D$ 时, 恒有: $\|A\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$, 则 A 在 D 中必具有不动点, 即存在 $x_0 \in D$, 使得 $Ax_0 = x_0$.

证明　根据[2]、[1]可知: 在 H 型或 B_0 型 X_M_PN 空间中, Schwarz 不等式成立. 因而, $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leqslant \|A\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2$, $\forall \boldsymbol{x} \in \partial D$. 所以, 定理 3 满足定理 2 的条件, 由定理 2 可得定理 3 的结论.

[参 考 文 献]

[1] 戴安顺. 弱概率内积空间[J]. 南京大学学报, 1986, **22**(2): 211~217.

[2] 游兆永, 朱林户. 概率内积空间[J]. 科学通报, 1983, **28**(8): 456~459.

[3] 朱传喜. 概率度量空间中若干新的不动点定理[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(2): 166~171.

[4] 张石生, 陈玉清. 概率度量空间中的拓扑度理论与不动点定理[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(6): 477~486.

Some Theorems in the X_M_PN Space

Zhu Chuanxi

(Mathematics Division, Nanchang University, Nanchang 330029, P R China)

Abstract: A new concept of the X_M_PN space is introduced, and the acute angle principle in the X_M_PN space is proved. Meanwhile, some new results are obtained.

Key words: weak probabilistic inner product space; topological degree; acute angle principle; algebra; X_M_PN space