应用数学和力学, 第 21 卷 第 2 期(2000 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 02_0154_07

具有单参数空间对称群的向量场及其约化*

黄德斌[1,2], 赵晓华[3]

(1. 中国科学院 力学研究所 LNM, 北京 100080; 2. 上海大学 数学系, 上海 201800;
3. 云南大学 数学系, 昆明 650091)

(李继彬推荐)

摘要: 对于保持某 n_形式的 n 维向量场, 应用 Lie 群的方法得到结论: 当这类向量场有保持 n_形式的空间单参数对称群时, 可具体地构造出一个与该向量场无关的变换, 它不仅使向量场约化掉一维, 并且使得约化向量场保持相应的 $(n-1)$_形式• 特别, 当 $n=3$ 时, 简单地得到了 Mezie 和 Wiggins 最近得到的重要结果•

关 键 词: 向量场; 对称群; Lie 群; 约化; 保持 n_形式
中图分类号: O152.5; O175.12 文献标识码: A

引 言

Lie 群方法从上个世纪末发展到今天, 它在微分方程研究中的重要作用越来越受到众多物理学家和数学家的关注和重视, 并在理论和实际应用研究中不断得以发展• Olver 在文[1]中比较系统地介绍了 Lie 方法的基本内容和一些重要的应用• 至今 Lie 方法已经发展到微分方程研究的各方面, 例如方程的可积性, Sen 和 Tabor 在文[2]中就是用 Lie 群的方法构造出了 Lorenz 系统的首次积分• 对于高维系统而言, 利用 Lie 群的作用因而降低系统维数而尤显重要•

众所周知, 具有单参数对称群的一个 n 维常微分方程组能约化成一个 $n-1$ 维的方程组, 并且原方程组的解可以通过约化方程的解积分求得• 进一步要问原来的 n 维系统与约化后的 $n-1$ 维系统之间会有什么联系, 特别地, 如果原来的 n 维系统具有某种便于应用的性质, 经过这种约化后, 该性质是否被保留下来• 这是一个在理论和应用方面都具有重要意义的问题• 要回答此问题, 关键是了解系统具有什么样的对称群时, 约化方程才不会使原系统的某些性质丧失• 过去, 由于 Hamilton 系统在理论和应用方面的重要性, 辛流形上的 Hamilton 系统的约化问题在微分动力系统研究领域曾经是一个十分活跃的研究课题• 其现代方法, 即 Lie 群方法首次在 Smale 的文章[3]中出现, 后经过 Meyer[4] 等人的努力, 直到 1973 年 Marsden 和 Weinstein 在文[5]中才完美地给出了辛流形的约化程序, 形成今天动力系统界所熟知的事实: 一个 n 维 Hamilton 系统当其具有一个单参数 Hamilton 对称群时, 可被约化成一个 $n-2$ 维的

---

* 收稿日期: 1997_01_20; 修订日期: 1999_04_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572057, 19972058); 云南省科委应用基础研究基金资助项目
作者简介: 黄德斌(1972~), 男, 博士.

Hamilton系统(参见[1, 6])• 最近Mezie和Wiggins在[7]中得出结论:一个三维保体积向量场,当其具有一个空间保体积单参数对称群时,可被约化成为一个单自由度的Hamilton系统,从而使得这类三维系统的动力学研究大为简化•

上述工作有一个共同点,即都集中于保持2_形式的Hamilton系统的研究• 然而保持n_形式的n维系统(此处指散度为零),在物理学、大气动力学、生物学等领域也是广泛存在的,对它的约化问题进行研究也有重要意义• 因此本文在第二节中应用Lie群的方法证得如下重要结论:保持n_形式的n维微分系统,若具有保持该n_形式的空间单参数对称群,则该系统可被约化成为一个保持相应$(n-1)$_形式的$n-1$维系统• 特别地$n=3$时,可推得文[7]中的主要结果,而且我们运用本文的结论简化了过去某些结果的证明• 另外我们知道经典Hamilton系统的散度为零,因此从某种意义上讲,本文的结果是对Hamilton系统辛约化(详见[5])的实质性的一个几何推广•

1　概念和预备定理

为了后面叙述和引用方便,本节首先介绍一些相关的定义、记号和将要引用的基本结论•本文中所用的符号与Olver[1]中的一样•

定义1.1　设M为n维流形,其局部坐标为$(x^1, \cdots, x^n)$• 考虑M上的n_形式$\Omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$• 则$M$上的任何向量场$\boldsymbol{Y}$的散度可通过下式定义:$\mathrm{L}_Y\Omega = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{Y})\,\Omega$,其中L为Lie导数,见[1, 2]•

注1　下面我们所讨论的n_形式均指定为上述Ω•

有了上面的定义,我们可得到向量场$\boldsymbol{Y}$产生的流保持n_形式Ω的等价条件• 下面以定义的形式给出•

定义1.2　设n维流形M上定义了一个向量场$\boldsymbol{F}$:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f_i(x^1, \cdots, x^n, t), \qquad (x^1, \cdots, x^n) \in M,\ t \in \mathbf{R},\ \ i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

若向量场$\boldsymbol{F}$的散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^1, \cdots, x^n, t)}{\partial x^i} = 0,$$

则称该向量场保持n_形式Ω•

定义1.3　设G是作用在$M \times \mathbf{R}$上的单参数Lie群• 若G满足条件:(i) G是向量场(1)的单参数对称群;(ii) G的无穷小生成元$\boldsymbol{V}$有形式:

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则称G是向量场(1)的空间对称群•

如果G的无穷小生成元$\boldsymbol{V}$还满足条件:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i(x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^i} = 0,$$

则称G是向量场(1)的保持n_形式的空间对称群•

一般说来,给定一个形如(1)的向量场,怎样求出它的空间对称群并不是一件容易的事,但是可根据(1)的实际背景,通过几何的,或物理等方法猜出其空间对称群,这也正是Lie群方法

的优势所在• 为了从理论上加以完善, 下面我们给出一个判定定理•

定理 1.4 以 $V=\sum_{i=1}^{n}\xi^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$(下面简记为 $V=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$) 生成的Lie群是(1)的空间对称群的充要条件是$[F,V]=0$• 其中 $F=(f_1,\cdots,f_n)$, $[F,V]$ 表示Lie括号, 其坐标定义为:

$$[F,V]_i=\sum_{j=1}^{n}\left(f_j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}-\xi^j\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right),\qquad i=1,\cdots,n•$$

证明 利用文献[1]中的定理 2.36 和 2.71 容易证明该定理的结论•

定理 1.5 设(1)式具有一个单参数对称群 G, 它的无穷小生成元为 V• 那么, 在满足条件 $V|_{(x,t)}\neq 0$ 的点(x,t) 附近, 存在一个局部变换:

$$x^i=\eta_i(y^1,\cdots,y^n,s),\quad t=\phi(y^1,\cdots,y^n,s),\qquad i=1,\cdots,n• \tag{2}$$

使得(1)变成:

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}=g_i(y^1,\cdots,y^{n-1},s),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{3}$$

并且 $y^1,\cdots,y^{n-1},s$ 构成 V 的函数独立不变量的完全系, 即:

$$V(y^i)=0,\quad i=1,\cdots,n-1;\ V(s)=0,\ V(y^n)=1• \tag{4}$$

证明 主要是利用直化定理将向量场 V 变直, 详见[1] 中定理 2.66•

注 2 因为(3)的右端与 y^n 无关, 故 y^n 可通过积分求出• 所以通常称(3)的前 $n-1$个方程为(1)在 G 下的约化方程•

特别地当 G 是空间对称群时, 我们有下面的推论•

推论 1.6 如果上述定理中的对称群 G 是空间对称群, 则可在变换(2)中取 $s=t$, 而 $\eta_i(i=1,\cdots,n)$ 与 s 无关, 即 $y^i(i=1,\cdots,n)$ 与 t 无关•

证明 因 G 是空间对称群, 故 t 就是 G 的一个不变量, 所以可取 $s=t$• 另一方面因为

$$V(y)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial y}{\partial x^i},$$

其中 $\xi^i(i=1,\cdots,n)$ 与 t 无关, 故 $V(y)=0$或1的解都应与 t 无关• 从而推论证毕•

2 主要结果及其证明

有了上节的准备, 本节将证明本文的如下主要结果:

定理 2.1 设 n 维向量场(1) 保持 n_形式 Ω, 并且具有一个保持 n_形式 Ω 的单参数空间对称群 G, 则存在变换使得(1) 的约化向量场保持$(n-1)$_形式•

在证明该定理之前, 我们先证明如下引理•

引理 2.2 如果一阶常微分方程组(1)在可微可逆变换 φ:

$$x^i=\varphi_i(y^1,\cdots,y^n),\qquad i=1,\cdots,n \tag{5}$$

下变为新的常微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=g_i(y^1,\cdots,y^n,t),\qquad i=1,\cdots,n• \tag{6}$$

则两个方程的右端必满足如下关系:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=\frac{1}{|J|}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(|J|g_i)}{\partial y^i}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是变换 φ 的 Jacobi 矩阵, $|\boldsymbol{J}|$ 是行列式.

证明　据偏导数及矩阵的运算性质, 经过复杂的推导即可得出引理的结论.

定理 2.1 的证明　设 G 的无穷小生成元为 $\boldsymbol{V}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$. 由定理1.5及推论1.6可知, 存在形如(5)的变换使得(1)变成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=k_i(y^1,\cdots,y^{n-1},t),\qquad i=1,\cdots,n. \tag{8}$$

由定理假设及引理 2.2 中的关系(7)可得:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(|\boldsymbol{J}|k_i)}{\partial y^i}=0, \tag{9}$$

又从定理 1.5 的证明中的(4)式知向量场 $\boldsymbol{V}$ 在 φ 下变为 $(0,\cdots,0,1)$. 再次引用引理 2.2 可得:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}=\frac{1}{|\boldsymbol{J}|}\left(0+\cdots+0+\frac{|\boldsymbol{J}|}{\partial y^n}\right)\Rightarrow\frac{\partial|\boldsymbol{J}|}{\partial y^n}=0.$$

从而 $|\boldsymbol{J}|$ 与 y^n 无关. 代回(9)就得:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial(|\boldsymbol{J}|k_i)}{\partial y^i}=0. \tag{10}$$

现在考虑方程(1)的约化系统, 即(8)的前 $n-1$ 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=k_i(y^1,\cdots,y^{n-1},t),\qquad i=1,\cdots,n-1. \tag{11}$$

作变换 Γ:

$$z^1=\int|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}y^1,\ z^2=y^2,\ \cdots,\ z^{n-1}=y^{n-1}. \tag{12}$$

设在此变换下(11)变为:

$$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}=g_i(z^1,\cdots,z^{n-1},t),\qquad i=1,\cdots,n-1. \tag{13}$$

显然变换 Γ 可逆, 即 Γ^{-1} 存在. 换言之, (13)在变换 Γ^{-1} 下变为(11). 现在计算 Γ^{-1} 的 Jacobi 矩阵 $\mathrm{D}\boldsymbol{Z}/\mathrm{D}\boldsymbol{Y}$ ($\boldsymbol{Z}=(z^1,\cdots,z^{n-1})$, $\boldsymbol{Y}=(y^1,\cdots,y^{n-1})$),

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{D}\boldsymbol{Y}}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{J}| & \dfrac{\partial}{\partial y^2}\displaystyle\int|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}y^1 & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial y^{n-1}}\displaystyle\int|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}y^1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}, \tag{14}$$

所以再利用引理 2.2 及(10)式可得:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g_i}{\partial z^i}=\frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{D}\boldsymbol{Y}}\right|}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\left(\left|\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{D}\boldsymbol{Y}}\right|k_i\right)}{\partial y^i}=\frac{1}{|\boldsymbol{J}|}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial(|\boldsymbol{J}|k_i)}{\partial y^i}=0.$$

综上所述, 对于满足定理 2.1 条件的向量场(1), 存在从 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}$ 的变换使得(1)变为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}=g_i(z^1,\cdots,z^{n-1},t),\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g_i}{\partial z^i}=0,\qquad i=1,\cdots,n-1,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}t}=g_n(z^1,\cdots,z^{n-1},t),\qquad 其中\ z^n=y^n.\end{cases} \tag{15}$$

从而证明了定理的结论.

注3 从定理2.1的证明中,可知使(1)变为(15)的变换与向量场无关,而与对称群G有关,并且整个变换是保持n_形式的变换•

3 推论及应用

在定理2.1中,当$n = 3$时,对于(1)的约化系统(11)我们可直接得到文献[7]中的如下主要结果之一•

定理3.1 假设如下三维微分系统(16)是一个保体积系统:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, x_2, x_3, t), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{16}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv 0•$$

如果它有一个单参数保体积空间对称群G,那么存在局部坐标变换:

$$x_i = \phi_i(z_1, z_2, z_3), \qquad i = 1, 2, 3,$$

使得(16)变成:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H(z_1, z_2, t)}{\partial z_2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H(z_1, z_2, t)}{\partial z_1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}t} = k_3(z_1, z_2, t), \end{cases} \tag{17}$$

其中$H(z_1, z_2, t)$是某个确定的函数•

证明 直接应用定理2.1可知,(16)的约化系统是保持2_形式的二维向量场,故可以表示成Hamilton形式,因此(16)可以变换为(17)的形式•

形如(17)的系统在流体力学中应用得很多,它被称作正则管流(regular duct flows)(可参见Ottino[8])• 正因为(16)能变换成(17)的形式,J.Mezie和S.Wiggins在[7]中对(17)使用角度—作用—作用变换,从而将KAM定理及Melnikov方法推广到这类三维系统上,研究了这类三维流体流动的扰动及可积性•

如果定理3.1中的系统是一个自治系统,则定理证明过程中的函数H就对应一个首次积分,因此可得如下结果•

推论3.2 设系统(16)是一个零散度自治向量场,并且具有一个零散度单参数空间对称群G,则这样的自治系统(16)必存在一个首次积分•

根据郭仲衡等在[9]中的结论:具有一个不依赖于时间的不变量的,由常微分方程组描述的任何三维系统都可以写成广义Hamilton系统的形式(见[1,6]),其Hamilton量就是上述不变量• 立即可得下面的推论•

推论3.3 满足推论3.2的系统(16)可以表示成一个广义Hamilton系统的形式•

在[10]中,张景炎曾经讨论过三维梯度共轭系统的全周期性• 该文中定义的梯度共轭系统就是散度为零并且存在一个首次积分的自治系统• 对这类系统,文[10]给出了如下重要结果:

命题3.4 设三维梯度共轭系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$右端解析,并且具有一个正则解析的首次积分$G(\boldsymbol{x})$,则限制在流形$G(\boldsymbol{x}) = c\,(c > 0)$上所得的二维系统的平衡点全是中心或广义鞍点• 并且如果在$G(\boldsymbol{x}) = c$上只有有限个平衡点,则原系统在每个积分曲面$G(\boldsymbol{x}) = c$上的轨线除去

中心及有限条鞍点的连线之外都是闭轨线• 称具有上述性质的三维梯度共轭系统有全周期性•

从上面的命题可知满足定理 3.2 的三维系统一定是梯度共轭系统, 并且从定理的证明知道该系统经过某个变换后限制在其积分曲面上为一个二维 Hamilton 系统, 从而由 Hamilton 系统的性质立即可推知其全周期性•

作为本文的结束, 为说明本文主要定理的应用, 考虑下面的 Euler 流对应的向量场 $\boldsymbol{V}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ax_1 + ax_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = ax_1 + ax_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = bx_1^2 - bx_2^2 - 2ax_3 \bullet \end{cases} \tag{18}$$

由流体力学背景可知, 向量场 $\boldsymbol{W} = (-2bx_2, -2bx_1, 0)$ 生成的 Lie 对称群一定是(18) 的对称群• 事实上不难验证: $[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}] = 0$•

经过运算可知在变换(沿 $b \neq 0$, $x_2 \neq 0$)

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{2b}\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

下, 系统(18) 可变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 2ay_1 = \dfrac{\partial H}{\partial y_2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = by_1 - 2ay_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y_1}, \quad H(y_1, y_2) = 2ay_1^2y_2^2 - \dfrac{b}{2}y_1^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{a}{2b} \bullet \end{cases} \tag{19}$$

代回原系统坐标可知(18) 有一个首次积分:

$$G(x) = 2a(x_1^2 - x_2^2)x_3 - \frac{b}{2}(x_1^2 - x_2^2)^2 \bullet$$

本文主要对具有单参数空间对称群的系统进行了研究, 对于多参数群的情况, 也可进行类似的研究, 但是一般而言, 多参数对称群的问题比单参数群的问题要复杂得多, 我们将另文讨论• 即使在单参数群里比较直接的约化问题在多参数群情况下也是一件非常困难的事, 关于这方面的研究成果, 可参见 Olver[1]•

致谢　作者对李继彬教授提出的有益建议表示衷心感谢•

[参 考 文 献]

[1] Olver P J. Applications of Lie Group to Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[2] Sen T, Tabor M. Lie symmetries of the Lorenz model[J]. Physica D, 1990, **44**(3): 313～339.

[3] Smale S. Topology and mechanics[J]. Inv Math, 1970, **10**(2): 305～331.

[4] Meyer K R. Symmetries and integrals in mechanics[A]. In: M M Peixoto Ed. Dynamical Systems[C]. New York: Academic Press, 1973, 259～272.

[5] Marsden J E, Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry[J]. Rep Math Phys, 1974, **5**(1): 121～130.

[6] 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[7] Mezie J, Wiggins S. On the integrability and perturbation of three_dimensional fluid flows with symmetry[J]. J Nonlinear Science, 1994, **4**(1): 157~ 194.

[8] Ottino J M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transprot [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[9] 郭仲衡, 陈玉明. 具有不依赖于时间的不变量的三维常微分方程组的 Hamilton 结构[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(4): 283~ 288.

[10] 张景炎. 三维梯度共轭系统的全周期性[J]. 中国科学 A 辑, 1983, **13**(5): 426~ 437.

[11] Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to Mechanics and Symmetry [M]. New York: Springer_Verlag, 1994.

The Vector Fields Admitting One_Parameter Spatial Symmetry Group and Their Reduction

Huang Debin[1,2] Zhao Xiaohua[3]

(1. LNM, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, P R China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China;

3. Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, P R China)

Abstract: For a n_dimensional vector fields preserving some n_ form, the following conclusion is reached by the method of Lie group. That is, if it admits a one_parameter, n_ form preserving symmetry group, a transformation independent of the vector field is constructed explicitly, which can reduce not only dimesion of the vector field by one, but also make the reduced vector field preserve the corresponding ($n-1$)_form. In particular, while $n=3$, an important result can be directly got which is given by Mezie and Wiggins in 1994.

Key words: vector field; symmtry group; Lie group; reduction; preserving n_form