应用数学和力学,第 21 卷 第 3 期(2000 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0323_08

一阶混合型积分微分方程的周期边值问题*

张 福 保

(徐州师范大学 数学系, 江苏徐州 221009)

(张石生推荐)

摘要: 在有一般化的上下解的条件下, 研究了一阶混合型积分微分方程的周期边值问题的可解性和最小最大解的存在性· 讨论基于迭合度方法, 单调迭代方法和新的比较定理·

关 键 词: 一般化的上下解; 迭合度; 单调迭代; 混合型积分微分方程
中图分类号: O175; O177 文献标识码: A

引 言

考虑下面一阶混合型积分微分方程的周期边值问题(简记为 PBVP)

$$u' = f(t, u, T_1u, T_2u) \qquad (\text{a.e. } t \in I), \tag{1}$$

$$u(0) = u(2\pi)· \tag{2}$$

这里, $I = [0, 2\pi]$, f 满足 Caratheodory 条件, T_1 是 Volterra 积分算子, T_2 是 Fredholm 积分算子, 定义为

$$(T_1u)(t) = \int_0^t K_1(t, s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$(T_2u)(t) = \int_0^{2\pi} K_2(t, s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$K_1 \in L^\infty(J), K_2 \in L^\infty(I \times I),$$

而

$$J = \{(t, s) \mid 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2\pi\}·$$

在 f 及 T_1, T_2 连续且 f 不含 T_2u 的特殊情形, PBVP (1) ~ (2) 的讨论见[1~5], 应用一般化的上下解方法[6], 迭合度方法和单调迭代技术, 我们分别在第二节和第三节中研究了 PBVP(1) ~ (2) 至少有一个解和有最小最大解的问题· 我们的讨论依赖于第一节中给出的新的比较定理, 并且[1~5] 中获得比较定理的方法对我们这里的一般情形是不适用的·

1 比 较 定 理

下面两个比较定理是我们讨论的基础·

引理 1 设 $M > 0$, $N_1, N_2 \geqslant 0$ 是常数, $K_1 \in L^\infty(J)$, $K_2 \in L^\infty(I \times I)$ 是正函数, $u \in W^{1,1}(I)$ (Sobolev 空间), 如果

$$u'(t) \leqslant Mu(t) - N_1T_1u(t) - N_2T_2u(t) \qquad (\text{a.e. } t \in I), \tag{3}$$

* 收稿日期: 1998_04_22; 修订日期: 1999_
作者简介: 张福保(1961~), 男, 博士, 副教授, 系副主任, 已发表论文 10 余篇.

$$u(0) \leqslant u(2\pi), \tag{4}$$

且

$$\frac{2\pi(N_1k_1 + N_2k_2)}{M} < \sqrt{1 + \frac{(e^{2\pi M} - 1)^2}{16\pi^2M^2}} - \frac{e^{2\pi M} - 1}{4\pi M}, \tag{5}$$

则 $u(t) \leqslant 0$, $\forall t \in I$, 这里, $k_1 = \|K_1\|_\infty$, $k_2 = \|K_2\|^\infty$ 是 K_1, K_2 的本性有界模•

引理 2 设 $u \in W^{1,1}(I)$, M, N_1, N_2 及 T_1, T_2 满足引理 1 的条件((3), (4) 除外)• 如果

$$u'(t) \geqslant Mu(t) + N_1T_1u(t) + N_2T_2u(t) \qquad (\text{a. e. } t \in I),$$

$$u(0) \geqslant u(2\pi),$$

则引理 1 的结论成立•

注 1 如果 $N_2 = 0$, 或 $K_2 \equiv 0$, 则引理 1 退化为[3, 引理 2.1], 引理 2 退化到[5, 引理 2.2]• 但我们注意到, [3], [5] 中所用的方法对我们的一般情形是不适用的, 同时, 我们还注意到, $u(2\pi) < 0$ 意味着 $p(2\pi) = u(2\pi)e^{-2M\pi} > u(2\pi)$, 因此, [5, 引理 2.2] 的证明似乎通不过, 为证明我们的引理 1 和引理 2, 需证下面的引理 3, 它的获得受了 Erbe 和郭大钧教授的文[7] 的启发•

引理 3 设一阶线性方程

$$u'(t) - Mu(t) = N_1T_1u(t) + N_2T_2u(t) + \sigma(t) \qquad (\text{a. e. } t \in I) \tag{6}$$

满足边值条件

$$u(0) = u(2\pi) + \delta. \tag{7}$$

这里 $M \neq 0$, $N_1, N_2 \in \mathbf{R}$ 且满足

$$|N_1k_1| + |N_2k_2| < \frac{|M|}{2\pi}, \tag{8}$$

那么, (6) ~ (7) 恰好有一个解, 即

$$u(t) = \sigma_1(t) + \int_0^{2\pi} Q(t,s)\sigma_1(s)\,ds + \int_0^{2\pi} H(t,s)\sigma(s)\,ds, \tag{9}$$

这里,

$$\sigma_1(t) = \frac{\delta e^{Mt}}{1 - e^{2M\pi}};\ H(t,s) = G(t,s) + F(t,s);$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{M(t-s)}}{1 - e^{2\pi M}} & (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2\pi), \\[2ex] \dfrac{e^{M(2\pi + t - s)}}{1 - e^{2\pi M}} & (0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 2\pi); \end{cases}$$

$$F(t,s) = \int_0^{2\pi} Q(t,r)G(r,s)\,dr;$$

$$Q(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_3^{(n)}(t,s);$$

$$K_3^{(n)}(t,s) = N_1\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} K_3(t,r_1)K_3(r_1,r_2)\cdots K_3(r_{n-1},s)\,dr_1\cdots dr_{n-1};$$

$$K_3(t,s) = N_1\int_s^{2\pi} G(t,r)K_1(r,s)\,dr + N_2\int_0^{2\pi} G(t,r)K_3(r,s)\,dr.$$

证 直接计算, 可以证明, (6) ~ (7) 等价于

$$u(t) = \sigma_1(t) + w(t) + \int_0^{2\pi} K_3(t,s)u(s)\,ds,$$

这里,

$$w(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)\sigma(s)\,ds,\ 且\int_0^{2\pi}G(t,s)\,ds=-\frac{1}{M},$$

$$\begin{aligned}|K_3(t,s)|&\leqslant|N_1k_1|\int_s^{2\pi}|G(t,r)|\,dr+\\&\quad|N_2k_2|\int_0^{2\pi}|G(t,r)|\,dr\leqslant\\&\quad(|N_1k_1|+|N_2k_2|)\int_0^{2\pi}|G(t,r)|\,dr=\\&\quad\frac{|N_1k_1|+|N_2k_2|}{|M|}\equiv k_3<\frac{1}{2\pi},\end{aligned}$$

$$K_3^{(n)}(t,s)\leqslant k_3^n(2\pi)^{n-1}=k_3[k_3(2\pi)]^{n-1}.$$

因此，$|Q(t,s)|$ 一致收敛且

$$|Q(t,s)|\leqslant\frac{k_3}{1-2\pi k_3}.$$

设

$$Au(t)=\sigma_1(t)+w(t)+\int_0^{2\pi}K_3(t,s)u(s)\,ds,$$

那么，容易证明

$$\|Au-Av\|\leqslant2\pi k_3\|u-v\|\qquad(\forall u,v\in C(I)),$$

这里，$\|u\|=\max\{u(t):t\in I\}$. 因而，$A:C(I)\to C(I)$ 是一个压缩映象，从而有唯一的不动点 $u\in C(I)$. 进一步.

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n,\tag{10}$$

这里，

$$u_0(t)=w(t),\ u_n(t)=Au_{n-1}(t)\quad(n=1,2,\cdots).\tag{11}$$

并且容易证明，由(10)，(11)给出的不动点 u 就是由(9)给出的解. 证毕.

引理 2 的证明　首先，我们证明

$$\sigma_1(t)+\int_0^{2\pi}Q(t,s)\sigma_1(s)\,ds\leqslant0,$$

这里，

$$\sigma_1(t)=\frac{\delta e^{Mt}}{1-e^{2\pi M}},\ \delta=u(0)-u(2\pi)\geqslant0,$$

事实上，

$$\max_{t,s\in I}G(t,s)=\frac{1}{1-e^{2\pi M}}<0,\tag{12}$$

故 $K_3(t,s)\leqslant0$, $K_3^{(n)}(t,s)\leqslant0$, 如果 n 是奇数，且 $K_3^{(n)}(t,s)\geqslant0$, 如果 n 是偶数，因此.

$$Q(t,s)\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}K_3^{(2m-1)}(t,s)\geqslant\frac{-k_3}{1-(2\pi)^2k_3^2},$$

$$\int_0^{2\pi}Q(t,s)\sigma_1(s)\,ds\leqslant\frac{k_3\delta}{[1-(2\pi)^2k_3^2](e^{2\pi M}-1)}\int_0^{2\pi}e^{sM}\,ds=\frac{k_3\delta}{M[1-(2\pi)^2k_3^2]},$$

且由

$$\max_{t\in I}\sigma_1(t)=\frac{\delta}{1-e^{2\pi M}}$$

和(5)知，

$$\sigma_1(t)+\int_0^{2\pi}Q(t,s)\sigma_1(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\delta\left[\frac{k_3}{M[1-(2\pi)^2k_3^2]}-\frac{1}{e^{2\pi M}-1}\right]\leqslant 0.$$

其次,由

$$G(t,s)\leqslant 0,\int_0^{2\pi}G(t,s)\mathrm{d}s=-\frac{1}{M},$$

可证

$$F(t,s)\leqslant\frac{k_3}{M[1-(2\pi)^2k_3^2]},$$

且由(12),可证

$$H(t,s)\leqslant\frac{k_3}{M[1-(2\pi)^2k_3^2]}-\frac{1}{e^{2\pi M}-1}\leqslant 0.$$

设 $\sigma(t)=u'(t)-Mu(t)-N_1T_1u(t)-N_2T_2u(t)$,
那么,$\sigma\in L'(I)$,且 $\sigma(t)\geqslant 0$, 对$(\text{a.e. } t\in I)$.

最后,注意到(5) ⇒(8),则由引理 3 知

$$u(t)=\sigma_1(t)+\int_0^{2\pi}Q(t,s)\sigma_1(s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^{2\pi}H(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,\qquad(\forall t\in I)$$

证毕.

引理 1 的证明 证法类似于引理 2,我们仍使用引理 3,只需注意到,此时

$$\delta=u(0)-u(2\pi)\leqslant 0,\ \sigma_1(t)=\frac{\delta e^{-Mt}}{1-e^{-2M\pi}}\leqslant 0,$$
$$F(t,s)\geqslant-\frac{k_3}{1-(2\pi)^2k_3^2},H(t,s)\geqslant\frac{1}{e^{2\pi M}-1}-\frac{k_3}{M[1-(2\pi)^2k_3^2]}\geqslant 0,$$
$$\sigma(t)=u'(t)+Mu(t)+N_1T_1u(t)+N_2T_2u(t)\leqslant 0.$$ 证毕.

推论 1 设 $M>0$ 是常数, $u\in W^{1,1}(I)$, 如果下列条件之一成立, 则 $u(t)\leqslant 0, (\forall t\in[a,b])$:

i) $u'(t)+Mu(t)\leqslant 0$, a.e. $t\in[a,b]$, $u(a)\leqslant u(b)$;

ii) $u'(t)-Mu(t)\geqslant 0$, a.e. $t\in[a,b]$, $u(a)\geqslant u(b)$.

证 由于相似性,我们仅证情形 i),设 $u'(t)-Mu(t)=\sigma(t)$, $u(a)-u(b)=\delta$, 则类似于引理 3 的证明,我们有

$$u(t)=\frac{\delta e^{M(t-a)}}{1-e^{M(b-a)}}+\frac{\int_a^b e^{M(t-s+b-a)}\sigma(s)\mathrm{d}s}{1-e^{M(b-a)}}+\int_a^t e^{M(t-s)}\sigma(s)\mathrm{d}s=$$
$$-\frac{\delta e^{M(t-a)}+\int_a^t e^{M(t-s)}\sigma(s)\mathrm{d}s+\int_t^b e^{M(t-s+b-a)}\sigma(s)\mathrm{d}s}{e^{M(b-a)}-1}$$

由条件 i)知, $\sigma(t)\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$, 从而 $u(t)\leqslant 0$, $\forall t\in[a,b]$. 证毕.

注 2 推论 1 的结论已在[4, 引理 2.1]中给出, 但我们发现其证明是不成立的. 因为存在这样的连续函数, 它在任何区间上都不是单调的[8].

引理 4[6] 给定 $M > 0$, 则存在 $r > 0$, 使对任何 $u \in W^{1,1}(I)$, $u(0) = u(2\pi)$, 有

$$\|u' + Mu\|_1 \geqslant r\|u\|_{W^{1,1}(I)}.$$

2 至少一个解的存在性

定理 1 设 $\alpha, \beta \in W^{1,1}(I)$ 是(1) ~ (2) 的一般化的下解和上解, 即

$$\alpha'(t) \geqslant f(t, \alpha(t), T_1\alpha(t), T_2\alpha(t)) \qquad (\text{a.e. } t \in I),$$

$$\alpha(0) \geqslant \alpha(2\pi);$$

$$\beta'(t) \leqslant f(t, \beta(t), T_1\beta(t), T_2\beta(t)) \qquad (\text{a.e. } t \in I),$$

$$\beta(0) \leqslant \beta(2\pi),$$

且 $\alpha(t) \geqslant \beta(t)$, $\forall t \in I$, 那么(1) ~ (2) 至少有一个解 $u \in W^{1,1}(I)$, 满足 $\beta(t) \leqslant u(t) \leqslant \alpha(t)$ $(\forall t \in I)$.

证 定义 $\gamma: I \times R \to R$, $\gamma(t, u) = \max\{\beta(t), \min\{u, \alpha(t)\}\}$, 考虑修改后的方程

$$u'(t) = f(t, \gamma(t, u(t)), T_1\gamma, T_2\gamma) - M[u(t) - \gamma(t, u(t))], \tag{13}$$

$$u(0) = u(2\pi), \tag{14}$$

这里 $M > 0$, 那么我们可以断言, (13) ~ (14) 的每个解 $u(t)$ 满足 $\beta(t) \leqslant u(t) \leqslant \alpha(t)$ $(\forall t \in I)$.

事实上, 如果 $\forall t \in I$, $\beta(t) \geqslant u(t)$, 则 $\gamma(t, u(t)) = \beta(t)$ $(\forall t \in I)$, 因此.

$$(\beta - u)' + M(\beta - u) \leqslant 0,$$

$$\beta(0) - u(0) \leqslant \beta(2\pi) - u(2\pi).$$

推论 1 的 i) 表明 $\beta(t) - u(t) \leqslant 0$, 矛盾, 因此, 存在 $t_1 \in I$, 使 $\beta(t_1) \leqslant u(t_1)$.

假定存在 $t_2 \in (t_1, 2\pi]$ 使 $\beta(t_2) > u(t_2)$, 那么存在 $t_3 \in (t_1, t_2)$, 使得 $\beta(t_3) = u(t_3)$ 且 $\beta(t) > u(t)$, $\forall t \in (t_3, t_2)$, 此时, 在$[t_3, t_2]$ 上应用推论 1 的 i) 又可导致矛盾. 因而 $\beta(t) \leqslant u(t)$ $(\forall t \in [t_1, 2\pi]$. 特别地, $\beta(2\pi) - u(2\pi) \leqslant 0$. 又若存在 $t_4 \in [0, t_1]$, 使得 $\beta(t_4) > u(t_4)$, 则由 $\beta(0) - u(0) \leqslant \beta(2\pi) - u(2\pi)$ 知, 存在$[c, d] \subset [0, t_4]$, 使得 $t_4 \in (c, d)$, $\beta(c) - u(c) = \beta(d) - u(d) = 0$, 且 $\forall t \in (c, d)$, $\beta(t) > u(t)$. 再用推论 1 的 i) 又可导致矛盾, 因此, $\beta(t) \leqslant u(t)$.

类似地, 可证

$$u(t) \leqslant \alpha(t) \qquad (\forall t \in I).$$

因此断言获证.

其次, 借助于迭合度的连续性定理[9], 我们证明(13) _(14) 至少有一个解 $u(t)$, 且由上述断言, $\beta(t) \leqslant u(t) \leqslant \alpha(t)$, 从而 $u(t)$ 也是(1) ~ (2) 的解.

定义 $L: \text{dom}L \to L^1(I)$, $Lu = u'$, $\forall u \in \text{dom}L$,

$$\text{dom}L = \{u \in W^{1,1}(I): u(0) = u(2\pi)\},$$

$$N: W^{1,1}(I) \to L^1(I), (Nu)(t) = f(t, \gamma(t, u(t)), T_1\gamma, T_2\gamma) - M(u - \gamma),$$

$$A: M^{1,1}(I) \to W^{1,1}(I), Au(t) = -Mu(t).$$

那么 PBVP(13) ~ (14) 等价于抽象方程

$$Lu = Nu. \tag{15}$$

考虑方程族

$$Lu - (1 - \lambda)Au - \lambda Nu = 0 \qquad (\lambda \in [0, 1]). \tag{16}$$

欲证(15)有解,只须证(16)先验有界,即存在不依赖于 $\lambda \in [0, 1]$ 的常数 C,使对(16)所有可能的解 u,满足 $\|u\|_{W^{1,1}(I)} \leqslant C$·

事实上,如果对某个 $\lambda \in [0, 1]$,u 是(16)的一个解,则

$$u' + Mu = \lambda f(\cdot, \gamma, T_1\gamma, T_2\gamma) + \lambda M\gamma\cdot$$

因为 $\beta(t) \leqslant \gamma(t, u(t)) \leqslant \alpha(t)(\forall t \in I)$,故存在常数 C_1,使得 $|\gamma(t, u(t))| \leqslant C_1(\forall t \in I)$·

同时,f 满足Caratheodory条件,T_1, T_2 有界线性算子,因此,存在 $\delta \in L^1(I)$,使 $|f(t, \gamma(t, u(t)), T_1\gamma, T_2\gamma)| \leqslant \delta(t)$,对a. e. $t \in I$,因而 $\|u' + Mu\|_1 \leqslant \|\delta\|_1 + 2\pi MC_1$,再由引理5知,存在 $C > 0$,使 $\|u\|_{W^{1,1}(I)} \leqslant C$· 证毕·

类似地,下列结果成立(证略)

定理2 在定理1中,如果 $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$,$\forall t \in I$,则定理1的结论也成立·

3 最小最大解的存在性

在这一节,我们应用单调迭代技术,证明PBVP(1)~(2)的最小最大解的存在性,为方便起见,先列出下面两个假设·

H_1) $f(t, u, v, w) - f(t, u, v, w) \geqslant -M(u - u) - N_1(v - v) - N_2(w - w)$,对a. e. $t \in I$ 以及 $\beta(t) \leqslant u \leqslant u \leqslant \alpha(t)$,$T_1\beta(t) \leqslant v \leqslant v \leqslant T_1\alpha(t)$,$T_2\beta(t) \leqslant w \leqslant w \leqslant T_2\alpha(t)$;

H_2) $f(t, u, v, w) - f(t, u, v, w) \leqslant M(u - u) + N_1(v - v) + N_2(w - w)$,对a. e. $t \in I$ 以及 $\alpha(t) \leqslant u \leqslant u \leqslant \beta(t)$,$T_1\alpha(t) \leqslant v \leqslant v \leqslant T_1\beta(t)$,$T_2\alpha(t) \leqslant w \leqslant w \leqslant T_2\beta(t)$·

这里,$M > 0$,$N_1, N_2 \geqslant 0$ 是常数·

定理3 设 H_1)和定理1的条件满足,则条件(5)意味着,存在序列 $\{\alpha_n(t)\}$,$\{\beta_n(t)\} \subset W^{1,1}(I)$,使得

$$\beta(t) = \beta_0(t) \leqslant \beta_1(t) \leqslant \dots \leqslant \beta_n(t) \leqslant \dots \leqslant$$
$$\alpha_n(t) \leqslant \dots \leqslant \alpha_1(t) \leqslant \alpha_0(t) = \alpha(t), \tag{18}$$

$\beta_n(t) \to u_*(t)$,$\alpha_n(t) \to u^*(t)$ 一致收敛,且 u^*,u_* 分别是(1),(2)的最大解和最小解·

证 给定 $\beta \in W^{1,1}(I)$,$\beta \leqslant \eta \leqslant \alpha$,考虑线性PBVP

$$u'(t) + Mu(t) = -N_1T_1u(t) - N_2T_2u(t) + \sigma(t) \qquad (\text{a. e. } t \in I), \tag{19}$$

$$u(0) = u(2\pi), \tag{20}$$

这里,

$$\sigma(t) = f(t, \eta(t), T_1\eta(t), T_2\eta(t)) + M\eta(t) + N_1T_1\eta(t) + N_2T_2\eta(t)\cdot$$

根据引理3,(19)~(20)恰好有一个解 u 由(9)给出·

定义 $A: [\beta, \alpha] \to W^{1,1}(I)$,$A\eta = u$,则 η 是(1)~(2)的解当且仅当 η 是 A 的不动点,定义 $\beta_1 = A\beta$,则

$$\begin{aligned}\beta' - \beta_1' \leqslant & f(t, \beta, T_1\beta, T_2\beta) - f(t, \beta, T_1\beta, T_2\beta) - M(\beta - \beta_1) - \\ & N_1T_1(\beta - \beta_1) - N_2T_2(\beta - \beta_1) = \\ & -M(\beta - \beta_1) - N_1T_1(\beta - \beta_1) - N_2T_2(\beta - \beta_1),\end{aligned}$$

且 $\beta(0) - \beta_1(0) \leqslant \beta(2\pi) - \beta_1(2\pi)$·

据引理1,

$$\beta(t) \leqslant \beta_1(t) = A\beta(t) \qquad (\forall t \in I)\cdot$$

类似地,

$$A\alpha(t) \leqslant \alpha(t) \qquad (\forall t \in I).$$

因此,我们有

$$\beta \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant A\beta,\ A\alpha \leqslant \alpha.$$

下证 A 在$[\beta, \alpha]$ 上是增的.

设 $\beta \leqslant \eta_2 \leqslant \eta_1 \leqslant \alpha$, $u_i = A\eta_i\ (i = 1, 2)$, 即

$$u_i'(t) + Mu_i(t) = -N_1T_1u_i(t) - N_2T_2u_i(t) + \sigma_i(t),$$
$$u_i(0) = u_i(2\pi),$$

这里,

$$\sigma_i(t) = f(t, \eta_i(t), T_1\eta_i(t), T_2\eta_i(t)) + M\eta_i(t) + N_1T_1\eta_i(t) + N_2T_2\eta_i(t).$$

据H$_1$),我们有 $\sigma_2(t) \leqslant \sigma_1(t)$(对 a. e. $t \in I$).

因此, $(u_2 - u_1)' + M(u_2 - u_1) \leqslant -N_1T_1(u_2 - u_1) - N_2T_2(u_2 - u_1)$, a. e. $t \in I$.

于是由引理 1 知, $u_2(f) = u_1(t)\ (\forall t \in I)$. 从而 $A\eta_2 \leqslant A\eta_1$, 即 A 在$[\beta, \alpha]$ 上是增的.

进一步,类似于定理 1 的证明知, $A([\beta, \alpha])$ 在 $W^{1,1}(I)$ 中是有界的. 因此,由嵌入定理知,

$$A:[\beta, \alpha] \to [\beta, \alpha] \subset C(I)$$

是全连续的,现在,定义

$$\beta_0 = \beta,\ \alpha_0 = \alpha,\ \beta_n = A\beta_{n-1},\ \alpha_n = A\alpha_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

那么,(17) 显然成立.

最后,由 Amann 三解定理知定理 3 获证.

如果我们应用引理 2, 则类似地可证明下列结果(证略)

定理 4 设H$_2$) 和(5) 成立, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是(1), (2) 的一般化的下解和上解, 且 $\alpha(t) \leqslant \beta(t)\ (\forall t \in I)$. 那么存在序列$\{\alpha_n(t)\}, \{\beta_n(t)\} \subset W^{1,1}(I)$, 使得

$$\alpha_n(t) \to u_*(t),\ \beta_n(t) \to u^*(I),$$

一致收敛, 且 $u_*(t)$, $u^*(t)$ 是(1) ~ (2) 在$[\alpha, \beta]$ 中的最小解和最大解.

[参 考 文 献]

[1] Ladde G S, Lakshmikantham V, Vatsala. Monotone Iterative Techniques of Nonlinear Differential Equations[M]. Boston: Pitman Publishing Inc, 1985.

[2] Kaul S K, Vatsla A S. Monotone method for integrodifferential equations with periodic boundary conditions[J]. Appl Anal, 1986, **21**(4): 297~ 305.

[3] Hu Shouchuan, Lakshmikantham V. Periodic boundary value problems for integrodifferential equations of Volterra type[J]. Nonlinear Anal, 1986, **10**(11): 1203~ 1208.

[4] Cabada A. The monotone method for first_order problems with linear and nonlinear boundary conditins[J]. Appl Math Comp, 1994, **151**(1): 163~ 186.

[5] Cheng Yubo, Zhuang Wan. On monotone iterative method for periodic boundary value problems of nonlinear integrodifferential equations[J]. Nonlinear Anal, 1994, **22**(3): 295~ 303.

[6] Nkashama M N. A generalization upper and lower solutions methods and multiplicity results for nonlinear first_order ODEs[J]. J Math Anal Appl, 1998, **140**(2): 381~ 395.

[7] Erbe L H, Guo Dajun. Periodic boundary value problems for second order integrodifferential equa-

tions of mixed type[J]. Anal Appl, 1992, **46**(4): 249~ 258.

[8] 盖尔鲍姆, 奥姆斯特德. 分析中的反例[M](高枚译). 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations [M]. Lecture Notes in Math, Vol. 568, Berlin, New York: Springer_Verlag, 1977.

Periodic Boundary Value Problems for First Order Integrodifferential Equations of Mixed Type

Zhang Fubao

(Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou, Jiangsu 221009, P R China)

Abstract: The existence of at least one solution and the existence of extreme solutions of periodic boundary value problems for first order integrodifferential equations of mixed type are studied, in the presence of generalized upper and lower solutions. The discussion is based on new comparative theorems and coincidence degree and monotone iterative methods.

Key words: generalized upper and lower solutions; coincidence degree; monotone iteration; integrodifferential equation of mixed type