应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0315_08

二阶积分微分方程周期边值问题的解的存在性*

洪世煌[1], 胡适耕[2]

(1. 海南大学 理工学院, 海口 570228; 2. 华中理工大学 数学系, 武汉 430074)

(云天铨推荐)

摘要: 通过对比结果, 用单调迭代方法证明了 Banach 空间中二阶积分微分方程的周期边值问题的最大最小解的存在性定理.

关 键 词: 序 Banach 空间; 周期边值问题; 最大最小解
中图分类号: O175.6 文献标识码: A

引 言

设 $(E, \|\cdot\|)$ 为实 Banach 空间, P 为E 中正则锥, E 中的序" $\leqslant$" 由锥 P 导入. 本文讨论以下二阶周期边值问题 (PBVP):

$$\left.\begin{aligned} &u'' = f(t, u, Tu) \quad (t \in J \text{ a.e.}),\\ &u(0) = u(a), u'(0) = u'(a), \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

其中, $f \in C(J \times E \times E, E)$, $J = [0, a]$ $(a > 0)$,

$$(Tx)(t) = \int_0^t K(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

$K \in C(D, R_+)$, $D = \left\{(t, s) \in J \times J : t \geqslant s\right\}$. 如果函数 $u \in C^2(J, E)$ 满 PBVP(Ⅰ), 则称 u 为 PBVP(Ⅰ) 的解.

假设 $s_0 = \max\limits_D K(t, s)$. 对 $x, y \in C(J, E)$, 规定 $x \leqslant y$ 当且仅当 $x(t) \leqslant y(t)$ $(\forall t \in J)$.

近年来, 研究微分方程的边值问题单调迭代方法用得相当广泛(见[1~ 4]). 文[1] 在实数集上确立了对比结果, 并用单调迭代方法得到了一阶周期边值问题的解的存在性. 文[2] 则对其作了推广和改进, 获得了更深刻的结果. 本文在序 Banach 空间中亦获得了二阶对比结果, 并用上述方法研究 PBVP(Ⅰ) 的最大最小解的存在性的充分条件, 而且给出了收敛于最大最小解的迭代程序.

1 对 比 结 果

引理 1(对比结果) 设 $p \in C^1(J, E)$ 满足

* 收稿日期: 1997_09_13; 修订日期: 1999_10_25
基金项目: 海南省教育厅自然科学资助项目
作者简介: 洪世煌(1962~) ,副教授, 已发表论文 30 多篇.

$$\left.\begin{aligned} &p'' \leqslant - Mp - NTp, \\ &p(0) \leqslant p(a), \quad p'(0) \leqslant p'(a), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里 $M > 0, N \geqslant 0$ 满足

$$a^2M + a^3s_0N < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

则 $p(t) \leqslant 0, (t \in J)$•

证　对任意 $g \in P^*$ (P^* 表 P 的对偶锥, 其定义及性质见[5]), 令 $u(t) = g(p(t))$, 那么 $u \in C^1(J, R)$, 且 $u'(t) = g(p'(t)), g((Tp)(t)) = (Tu)(t)$, 又由(2) 得

$$\left.\begin{aligned} &u'' \leqslant - Mu - NTu, \\ &u(0) \leqslant u(a), \quad u'(0) \leqslant u'(a), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

注意到 $g \in P^*$ 的任意性, 从而要证 $p(t) \leqslant 0$, 只要证

$$u(t) \leqslant 0 \quad (t \in J) \tag{5}$$

即可• 假如(5) 式不真, 那么有以下两种可能:

(A) 任给 $t \in J$, 有 $u(t) \geqslant 0$, 但 $u(t) \not\equiv 0$;

(B) 存在 $t', t'' \in J$, 使得 $u(t') > 0, u(t'') < 0$•

设 $-b = \inf\{u(t): t \in J\}$• 如果(A) 可能, 那么 $b = 0$• 由(4) 得 $u''(t) \leqslant 0 (t \in J)$, 即 $u'(t)$ 在 J 上单调不增, 这推出 $u'(t) \leqslant u'(0) \leqslant u'(a) (t \in J)$, 于是必有 $u'(t) \equiv C$(常数)• 由此推出 $u(t) = ct + u(0)$, 注意到 $u(a) - u(0) = ca \geqslant 0$, 从而由(A) 得 $c > 0$• 另一方面, 由(4) 可得

$$0 = u''(t) \leqslant - Mu - NTu < 0,$$

这一矛盾说明(A) 不可能成立•

如果(B) 为真, 那么 $b > 0$• 显然存在 $t_* \in J$, 使得 $u(t_*) = - b$, 依(4) 有

$$u''(t) \leqslant Mb + Nas_0b \quad (t \in J) \tag{6}$$

现在考虑以下两种情况: (1) 如果 $t_* = 0$, 将函数 $u(t)$ 连续地延拓到 $[-a, a]$ 上, 那么可令 $u'(0) = 0$; (2) 如果 $t_* \in (0, a)$, 那么直接有 $u'(t_*) = 0$• 总之, 可由(6) 及中值定理推出

$$\left.\begin{aligned} &u'(0) \leqslant u'(a) \leqslant (a - t_*)(Mb + Nas_0b) \leqslant abM + Na^2s_0b, \\ &u'(t) = u'(0) + \int_0^t u''(s)\,\mathrm{d}s \leqslant u'(0) + \int_0^t (Mb + Nas_0b)\,\mathrm{d}s \leqslant \\ &\qquad abM + Na^2s_0b + a(Mb + Nas_0b) = 2bM_0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中

$$M_0 = aM + a^2s_0N, \tag{8}$$

由(B) 知存在 $t_0 \in J$, 使得 $u(t_0) = 0$• 又分两种情况:

(a) $t_0 \in (t_*, a]$• 在 $[t_*, t_0]$ 上用中值定理得存在 $t_1 \in (t_*, t_0)$ 使得

$$b = u(t_0) - u(t_*) = u'(t_1)(t_0 - t_*) \leqslant 2abM_0,$$

从而 $\frac{1}{2} \leqslant aM_0$, 与(3) 式矛盾•

(b) $t_0 \in [0, t_*)$• 这时必定在 $[t_*, a]$ 上恒有 $u(t) < 0$, 特别 $u(0) \leqslant u(a) < 0$• 但是一定存在 $t' \in (0, t_*)$, 使得 $u(t') > 0$(否则引理已经获证)• 下面设 $-\lambda = \inf\{u(t): 0 \leqslant t \leqslant t'\}$, 那么 $\lambda > 0$(由于 $u(0) < 0$)• 显然由(4) 得

$$u''(t) \leqslant M\lambda + Nas_0\lambda \quad (0 \leqslant t \leqslant t'),$$

类似于(7) 可推出(注意 $\lambda \leqslant b$!)

$$u'(t) \leqslant 2\lambda M_0,$$

又存在 $t'_* \in [0, t')$, 使得 $u(t'_*) = -\lambda$, 再一次用中值定理于 $[t'_*, t']$ 上得存在 $t_2 \in (t'_*, t')$, 使得

$$u(t') + \lambda = u(t') - u(t'_*) = u'(t_2)(t' - t'_*) \leqslant 2a\lambda M_0,$$

所以 $0 < u(t') \leqslant -\lambda + 2a\lambda M_0$, 这推出 $2aM_0 > 1$, 与(3) 式矛盾.

综上所述, 得(5) 式成立, 所以 $p(t) \leqslant 0\ (t \in J)$.

引理 2　函数 $u \in C^2(J, E)$ 是 PBVP(Ⅰ) 的解的充要条件是

$$x = (x_1, x_2) = (u, u'), \tag{9}$$

是算子方程 $Ax = x$ 的解. 这里 $A = (A_1, A_2)$ 定义为

$$(A_1x)(t) = \frac{e^{-Lt}}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lx_1(s) + x_2(s)]ds + e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Lx_1(s) + x_2(s)]ds \tag{10}$$

$$(A_2x)(t) = e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Lx_2(s) + f(s, x_1, Tx_1)]ds + \frac{e^{-Lt}}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lx_2(s) + f(s, x_1, Tx_1)]ds, \tag{11}$$

其中 $L > 0$ 为任意给定的常数.

证　若 u 是 PBVP(Ⅰ) 的解, 则(Ⅰ) 表明(10)(11) 定义的算子 A 有意义. 由(10) 得

$$\begin{aligned} e^{Lt}(A_1x)(t) &= \frac{1}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}(Lu(s) + u'(s))ds + \int_0^t e^{Ls}(Lu(s) + u'(s))ds = \\ &\frac{1}{e^{La} - 1}[e^{La}u(a) - u(0)] + e^{Lt}u(t) - u(0) = \\ &e^{Lt}u(t) = e^{Lt}x_1(t) \quad (t \in J). \end{aligned}$$

由(Ⅰ) 及(11) 得

$$\begin{aligned} e^{Lt}(A_2x)(t) &= \int_0^t e^{Ls}[Lu'(s) + f(s, u(s), (Tu)(s))]ds + \\ &\frac{1}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lu'(s) + f(s, u(s), (Tu)(s))]ds = \\ &\int_0^t e^{Ls}[Lu'(s) + u''(s)]ds + \frac{1}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lu'(s) + u''(s)]ds = \\ &e^{Lt}u'(t) + u'(0) + \frac{1}{e^{La} - 1}[e^{La}u'(a) - u'(0)] = \\ &e^{Lt}u'(t) = e^{Lt}x_2(t), \end{aligned}$$

所以 $Ax = x$.

反过来, 设 $x = (x_1, x_2)$ 满足 $Ax = x$, 则 $A_ix = x_i\ (i = 1, 2)$ 由(10) 得

$$e^{Lt}x_1(t) = \frac{1}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lx_1(s) + x_2(s)]ds + \int_0^t e^{Ls}[Lx_1(s) + x_2(s)]ds, \tag{12}$$

两边关于 t 求导得

$$x'_1(t) = x_2(t), \tag{13}$$

由(11) 得

$$e^{Lt}x_2(t) = \frac{1}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lx_2(s) + f(s, x_1(s), (Tx_1)(s))]ds + \int_0^t e^{Ls}[Lx_2(s) + f(s, x_1(s), (Tx_1)(s))]ds, \tag{14}$$

同上求导得

$$x_2'(t) = f(t, x_1(t), (Tx_1)(t)) \quad (t \in J), \tag{15}$$

令 $u(t) = x_1(t)$，则(13)表明 $u'(t) = x_2(t)$，故(9)成立。由(15)得 $u''(t) = f(t, u(t), (Tu)(t))$ $(t \in J)$。由(12) $u(0) = u(a)$，由(14)得 $u'(0) = u'(a)$。于是 u 满足(Ⅰ)，(15)表明 $u'' \in C(J, E)$，故 u 是PBVP(Ⅰ)的解。证毕。

2 主要结果

首先作如下假定

(H$_1$) 存在 $u_0, v_0 \in C^2(J, E)$，$u_0 \leqslant v_0$，使得

$$\left.\begin{aligned} & u_0'' \leqslant f(t, u_0, Tu_0), \\ & u_0(0) \leqslant u_0(a),\ u_0'(0) \leqslant u_0'(a), \\ & v_0'' \geqslant f(t, v_0, Tv_0), \\ & v_0(0) \geqslant v_0(a),\ v_0'(0) \geqslant v_0'(a)。\end{aligned}\right\}$$

(H$_2$) 当 $u_0 \leqslant u < u < v_0$，$Tu_0 \leqslant v \leqslant v \leqslant Tv_0$ 时

$$f(t, u, v) - f(t, u, v) \geqslant -M(u - u) - N(v - v),$$

其中 $M > 0$，$N \geqslant 0$ 满足(3)及存在常数 $L > 0$，使得

$$b_1 = \frac{La}{1 - e^{-La}} + \frac{Ns_0 a^2 e^{La}}{L(1 - e^{-La})} + \frac{(L + M)a^2}{(1 - e^{-La})^2} < 1,$$

$$b_2 = \frac{(L + M)a}{1 - e^{-La}} + \frac{Ns_0 a e^{La}}{L} + (1 + b_1)L < 1,$$

记 $[u_0, v_0] = \{u \in C(J, E): u_0 \leqslant u \leqslant v_0\}$。

定理 设 P 是正则锥，f 在 $J \times B_r \times B_r$ 上连续，这里 $B_r = \{x \in E: \|x\| \leqslant r\}$ $(r > 0)$。假设(H$_1$)和(H$_2$)满足。那么存在单调序列 $\{u_n\}, \{v_n\} \subset C^2(J, E)$，在 $C^1(J, E)$ 中分别收敛于PBVP(Ⅰ)的最小最大解。

证 1° 对任意 $w \in [u_0, v_0]$，考虑以下线性积分微分方程

$$u'' = -Mu - NTu + z, \quad u(0) = u(a), \quad u'(0) = u'(a), \tag{16}$$

其中 $z(t) = f(t, w(t), (Tw)(t)) + Mw(t) + N(Tw)(t)$。下面证明对每个 $w \in [u_0, v_0]$，PBVP(16)存在唯一解。由引理2，u 是PBVP(16)的解等价于 u 是以下算子方程的解

$$\left.\begin{aligned} u' = A_2 x \triangleq Au = {} & \frac{e^{-Lt}}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lu'(s) - Mu(s) - N(Tu)(s) + z(s)]\,ds + \\ & e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Lu'(s) - Mu(s) - N(Tu)(s) + z(s)]\,ds, \\ u(0) = {} & u(a), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中 $x = (u, u')$，L 如(H$_2$)给定。易证方程(17)等价于算子方程

$$u(t) = (Su)(t),$$

其中算子 S 满足

$$(Su)(t) = \frac{e^{-Lt}}{e^{Lt} - 1}\int_0^a e^{Ls}[(Au)(s) + Lu(s)]\,ds + e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[(Au)(s) + Lu(s)]\,ds, \tag{18}$$

所以

$$(Su)'(t) = (Au)(t) + Lu(t) - L(Su)(t) \cdot \tag{19}$$

在 $C(J,E)$ 中定义范数为 $\|u\| = \max\limits_J |u(t)e^{Lt}|$, $C^1(J,E)$ 中定义范数 $\|u\|_1 = \max\left\{\|u\|, \|u'\|\right\}$, 下证 S 是 $C^1(J,E)$ 中压缩算子. 事实上, 对任给 $u, u \in C^1(J,E)$, 有

$$\|Au - Au\| = \max_J |[(Au)(t) - (Au)(t)]e^{Lt}| \leqslant$$

$$\frac{1}{e^{La}-1}\left|\int_0^a e^{Ls}[Lu'(s) - Mu(s) - N(Tu)(s) - Lu'(s) + Mu(s) + N(Tu)(s)]ds\right| +$$

$$\max_J\left|\int_0^t e^{Ls}[Lu'(s) - Mu(s) - N(Tu)(s) - Lu'(s) + Mu(s) + N(Tu)(s)]ds\right| \leqslant$$

$$\frac{e^{La}}{e^{La}-1}\int_0^a e^{Ls}[L|u'(s) - u'(s)| + M|u(s) - u(s)| + N|(Tu)(s) - (Tu)(s)|]ds \leqslant$$

$$\frac{(L+M)ae^{La}}{e^{La}-1}\|u - u\|_1 + \frac{Ne^{La}}{e^{La}-1}\left[\int_0^a e^{Ls}\left|\int_0^s k(s,\xi)[u(\xi) - u(\xi)]d\xi\right| ds\right] \leqslant$$

$$\frac{(L+M)a}{1-e^{-La}}\|u - u\|_1 + \frac{Ns_0}{1-e^{-La}}\int_0^a e^{Ls}\left|\int_0^s e^{-L\xi}d\xi\right| ds \cdot \|u - u\|_1 \leqslant$$

$$\left[\frac{(L+M)a}{1-e^{-La}} + \frac{Ns_0ae^{La}}{L}\right]\|u - u\|_1 \cdot$$

设 $b_3 = \dfrac{(L+M)a}{1-e^{-La}} + \dfrac{Ns_0ae^{La}}{L}$, 则

$$\|su - su\| = \max_J |[(su)(t) - (su)(t)]e^{Lt}| \leqslant$$

$$\frac{1}{e^{La}-1}\left|\int_0^a e^{Ls}[(Au)(s) + Lu(s) - (Au)(s) - Lu(s)]ds\right| +$$

$$\max_J\left|\int_0^t e^{Ls}[(Au)(s) + Lu(s) - (Au)(s) - Lu(s)]ds\right| \leqslant$$

$$\frac{e^{La}}{e^{La}-1}\int_0^a [|(Au)(s) - (Au)(s))e^{Ls}| + L|(u(s) - u(s))e^{Ls}|]ds \leqslant$$

$$\frac{1}{1-e^{-La}}\int_0^a [\|Au - Au\| + L\|u - u\|]ds \leqslant$$

$$\frac{ab_3}{1-e^{-La}}\|u - u\|_1 + \frac{La}{1-e^{-La}}\|u - u\|_1 =$$

$$b_1\|u - u\|_1 \cdot$$

由(19)又得

$$\|(Su)' - (Su)'\| \leqslant \|Au - Au\| + L\|u - u\| + L\|Su - Su\| \leqslant$$

$$(b_3 + L + Lb_1)\|u - u\|_1 =$$

$$b_2\|u - u\|_1 \cdot$$

由假设(H_2), $b_1, b_2 < 1$, 从而 $\|Su - Su\|_1 \leqslant \|u - u\|_1$, 即 S 是压缩算子, 由 Banach 不动点定理知 S 有唯一的不动点, 所以 PBVP(16) 对每个 $w \in [u_0, v_0]$ 有唯一解.

2° 对任给 $w \in [u_0, v_0]$, 令 $Bw = u$, 这里 u 是 PBVP(16) 相对于 w 的唯一解. 下证

(a) $u_0 \leqslant Bu_0$, $Bv_0 \leqslant v_0$;

(b) B 在$[u_0, v_0]$ 上单调不减, 即对任意 $w, w \in [u_0, v_0]$ $w \leqslant w$, 推出 $Bw \leqslant Bw$.

先证(a), 令 $u_1 = Bu_0$, $p = u_0 - u_1$, 那么 $p(0) - p(a) = u_0(0) - u_0(a)$, $p'(0) - p'(a) = u_0'(0) - u_0'(a)$. 又

$$p''(t)=u_0''(t)-u_1''(t)\leqslant f(t,u_0,Tu_0)+Mu_1+NTu_1-f(t,u_0,Tu_0)-Mu_0(t)-N(Tu_0)(t)=-Mp(t)-N(Tp)(t),$$

利用引理1及假设(H_2)得 $p(t)\leqslant 0(t\in J)$, 即 $u_0\leqslant Bu_0$, 同理可证 $Bv_0\leqslant v_0$•

次证(b), 设 $w,\bar{w}\in[u_0,v_0]$, $w\leqslant\bar{w}$, 令 $u=Bw$, $\bar{u}=B\bar{w}$, $p=u-\bar{u}$• 由假设(H_2), $p''=u''-\bar{u}''=-Mu-NTu+f(t,w,Tw)+Mw+NTw+M\bar{u}+NT\bar{u}-f(t,\bar{w},T\bar{w})-M\bar{w}-NT\bar{w}\leqslant -Mp-NTp$• 显然 $p(0)=p(a)$, $p'(0)=p'(a)$• 再利用引理1及(H_2)得 $p(t)\leqslant 0(t\in J)$, 即 $Bw\leqslant B\bar{w}$•

3° 定义 $u_n=Bu_{n-1}$, $v_n=Bv_{n-1}(n=1,2,\cdots)$• 由2°知

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0,\tag{20}$$

根据(17), (18)得

$$u_n'(t)=(Au_n)(t)=\frac{e^{-Lt}}{e^{La}-1}\int_0^a e^{Ls}[Lu_n'(s)-Mu_n(s)-N(Tu_n)(s)+z_{n-1}(s)]ds+e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Lu_n'(s)-Mu_n(s)-N(Tu_n)(s)+z_{n-1}(s)]ds,\tag{21}$$

其中

$$z_{n-1}(t)=f(t,u_{n-1}(t),(Tu_{n-1})(t))+Mu_{n-1}(t)+N(Tu_{n-1})(t),\tag{22}$$

$$u_n(t)=\frac{e^{-Lt}}{e^{La}-1}\int_0^a e^{Ls}[Au_n(s)+Lu_n(s)]ds+e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Au_n(s)+Lu_n(s)]ds•\tag{23}$$

类似于1°中证明可得

$$\|u_{n+i}-u_n\|\leqslant b_1\|u_{n+i}-u_n\|_1+\max_J\left\{\left|\int_0^t e^{Ls}\left[\frac{e^{-Ls}}{e^{La}-1}\int_0^a e^{Ls}(z_{n+i-1}(\xi)-z_{n-1}(\xi))ds+e^{-Ls}\int_0^s e^{L\xi}(z_{n+i-1}(\xi)-z_{n-1}(\xi))d\xi\right]ds\right|+\frac{1}{e^{La}-1}\left|\int_0^a e^{Ls}\left[\frac{e^{-La}}{e^{La}-1}\int_0^a e^{L\xi}(z_{n+i-1}(\xi)-z_{n-1}(\xi))d\xi+e^{-Ls}\int_0^s e^{L\xi}(z_{n+i-1}(\xi)-z_{n-1}(\xi))d\xi\right]ds\right|\leqslant b_1\|u_{n+i}-u_n\|_1+\frac{2e^{La}a^2}{(e^{La}-1)^2}\|z_{n+i-1}-z_{n-1}\|\right.$$

$$\|u_{n+i}'-u_n'\|\leqslant b_2\|u_{n+i}-u_n\|_1+\max_J\left\{\frac{1}{e^{La}-1}\left|\int_0^a e^{Ls}[z_{n+i-1}(s)-z_{n-1}(s)]ds\right|+\left|\int_0^t e^{Ls}[z_{n+i-1}(s)-z_{n-1}(s)]ds\right|\right\}\leqslant b_2\|u_{n+i}-u_n\|_1+\frac{a\cdot e^{La}}{e^{La}-1}\|z_{n+i-1}-z_{n-1}\|•$$

令 $b^*=\max\{b_1,b_2\}$, $a^*=\max\left\{\frac{2a^2e^{La}}{(e^{La}-1)^2},\frac{a\cdot e^{La}}{e^{La}-1}\right\}$, 则由假设($H_2$)得 $b^*<1$, 从以上两式得

$$\|u_{n+i}-u_n\|_1\leqslant\frac{a^*}{1-b^*}\|z_{n+i-1}-Z_{n-1}\|\qquad(i,n=1,2,\cdots),\tag{24}$$

注意到 P 是正则锥(从而是正规锥)• 由(20)推出 $\{u_n\}$ 在 $C(J,E)$ 上有界, 又已知 f 在 $J\times B_r\times B_r$ 上有界, 于是(22)推出存在常数 $C>0$, 使得

$$\|Z_{n-1}\|\leqslant C\qquad(n=1,2,\cdots),$$

所以利用(21)~(23)可看出$\{u_n\}$在J上等度连续• 另一方面,据P的正则性及(20)可得$\{u_n(t)\}$收敛,设$u_n(t) \to x(t)(t \in J, n \to \infty)$,那么由Azela_Araela定理知在$J$上一致地有$u_n \to x(n \to \infty)$,即

$$\| u_n - x \| \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{25}$$

依(22)及(25)推出

$$\| z_{n-1} - z \| \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{26}$$

这里

$$z(t) = f(t, x(t), (Tx)(t)) + Mx(t) + N(Tx)(t) \quad (t \in J)\text{•} \tag{27}$$

现在不难从(24)及(25)看出$\{u_n\}$在$C^1(J, E)$上收敛,且从(25)得到$x \in C^2(J, E)$及

$$\| u_n - x \|_1 \to 0 \quad (n \to \infty)\text{•} \tag{28}$$

根据(26)~(28),对(21),(23)两边分别取极限得

$$x'(t) = (Ax)(t) = \frac{e^{-Lt}}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lx'(s) + f(s, x(s), (Tx)(s))]ds +$$

$$e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Lx'(s) + f(s, x(s), (Tx)(s))]ds,$$

$$x(t) = \frac{e^{-Lt}}{e^{La} - 1}\int_0^a e^{Ls}[Lx(s) + x'(s)]ds + e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}[Lx(s) + x'(s)]ds,$$

结合引理2得到x是PBVP(Ⅰ)的解•

同理可证存在$y \in C^2(J, E)$,使得$\| u_n - y \|_1 \to 0 \quad (n \to \infty)$• 且$y$是PBVP(Ⅰ)的解•

4° 最后证明x, y分别是PBVP(Ⅰ)在$[u_0, v_0]$上的最小、最大解• 为此,设$u \in [u_0, v_0]$是PBVP(Ⅰ)的任一解,假设$u_{n-1}(t) \leqslant u(t) \leqslant v_{n-1}(t) \ (t \in J)$成立,令$p(t) = u(t) - v_n(t)$,由$(H_2)$得

$$\begin{aligned} p'' &= u'' - v_n'' = \\ &f(t, u, Tu) + Mv_n + N(Tv_n) - f(t, v_{n-1}, Tv_{n-1}) - Mv_{n-1} - N(Tv_{n-1}) \leqslant \\ &-M(u - v_n) - N(Tu - Tv_n) = \\ &-Mp - NTp, \end{aligned}$$

又易知$p(0) = p(a), p'(0) = p'(a)$,由引理1得$p(t) \leqslant 0 \quad (t \in J)$• 即$u \leqslant v_n$• 类似地有$u_n \leqslant u$,由归纳法知对一切自然数$n$有$u_n(t) \leqslant u(t) \leqslant v_n(t) \quad (t \in J)$,令$n \to \infty$得到$x \leqslant u \leqslant y$• 证毕•

注 如果E是弱序列完备的Banach空间,那么定理中P只要求是正规的,结论仍然成立•

[参 考 文 献]

[1] Hu S, Lakshmikantham V. Periodic boundary value problems for integro_differential equations of volterra type[J]. Nonlinear Anal, 1986, **10**(1): 1203~1208.

[2] Chen Yubo, Wan Zhuang. On monotone iterative method for periodic boundary value problems of nonlinear integro_differential equations[J]. Nonlinear Anal, 1994, **22**(3): 295~303.

[3] Guo Dajun. Initial value problems for second order impulsive integro_differential equations in Banach Spaces[J]. China Ann of Math, 1997, **18**B(4): 439~448.

[4] Lakshmikantham V. Periodic boundary value problems of first and second order differential equations [J]. J Appl Math Simulation, 1989, **2**(3): 131~138.

[5] 胡适耕. 非线性分析[M]. 华中理工大学出版社, 1996.

Existence of Solutions for Periodic Boundary Value Problem for Second Order Integro_Differential Equations

Hong Shihuang[1], Hu Shigeng[2]

(1. Science and Engineering College, Hainan University, Haikou 570228, P R China;

2. Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P R China)

Abstract: By establishing a comparison result and using monotone iterative methods, the theorem of existence for minimal and maximal solutions of periodic boundary value problems for second order nonlinear integro_differential equations in Banach Spaces is proved.

Key words: ordered Banach spaces; periodic boundary value problems; maximal and minimal solutions