文章编号: 1000_0887(2000) 03_0307_08

k 乘子的数学理论

杨文熊

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(何福保推荐)

摘要: 在杨文熊提出的幂单位向量的基础上, 推广其为 k 乘子的数学理论并由此建立了一门新的数学分支 推广的 k 乘子还涉及到它的负整数幂 列举了由 k 乘子组成的复合变数及其函数都能满足由杨文熊在 幂向量, 复合向量数及其函数理论 中导出的各种条件、定理、积分以及方程等 k 乘子理论将进一步应用于建立粒子超光速理论以及自然的波粒二象性运动的研究

关 键 词: 幂单位向量; k 乘子; 双曲线函数; 双曲型方程

中图分类号: O17 文献标识码: A

引 言

在文献[1]中作者曾建立了作为单位向量对其幂指数的数积运算, 取得了对具有高速运动粒子的速度向量在小于光速或近光速时作 Laurent 级数展开及收敛和 在这种情况下我们揭开了用经典的牛顿理论方法计算了高速动运粒子及物体的各种参数, 取得了可喜的成果[2,3,4] 从而把经典的牛顿理论与现代物理学、力学等作了有机的联系

为了进一步发展和推广幂向量的运算, 我们应该对其建立更广泛的数学运算 使单位向量作一普适的乘子 另外, 如有一实数与 k 乘子结合而成为一 k 乘子复合数并由此复合数构成其函数则可成为一完整的函数理论 这种函数论与熟知的复变函数论相辅相成: 前者是双曲型方程, 后者是椭圆型方程 这就完成了整个的乘子函数理论

1 k 乘子的整数幂律

[1]中对单位向量作了幂向量数积的定义 现在把它去掉单位的向量特性而推广为 k 乘子的整数幂, 但在特殊情况下, 它仍不失为向量的涵义

1.1 k 乘子的正整数幂

$$k^n = \begin{cases} k^{2m} = 1 \\ k^{2m+1} = k \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

上述对 k 的定义与文献[1]对单位向量的数积定义是完全一致的 因此如对距离 $\boldsymbol{S}$, 速度 $\boldsymbol{V}$ 等任何向量均可按(1)展开 例如当粒子作近光速运动时, 其速度可按 Laurent 级数展开:

$$L\left(\frac{V}{c}\right) = \quad \left(\frac{V}{c}\right) + k \left(\frac{V}{c}\right), \tag{2}$$

收稿日期: 1998_11_03; 修订日期: 1999_10_25
作者简介: 杨文熊(1934~) , 男, 教授.

其中 k 为一单位向量$\left(\frac{\boldsymbol{V}}{c}\right)$, c 为光速$(= 3 \quad 10^5 \mathrm{km/s})$, 而

$$\left(\frac{V}{c}\right) = {}_{m=1} \quad {}_{2m}\left(\frac{V}{c}\right)^{2m}; \tag{3}$$

$$\left(\frac{V}{c}\right) = {}_{m=1} \quad {}_{2m+1}\left(\frac{V}{c}\right)^{2m+1}, \tag{4}$$

分别为跟随粒子一起运动的量纲为一的总能和动量 上式中的 ${}_{2m+1}$, ${}_{2m}$ 分别为二个幂级数项的系数 由[1] 知

$$\left\{ {}_{2m+1} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \quad , \tag{5}$$

从而级数之和为

$$\left(\frac{V}{c}\right) = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \tag{6}$$

对于 $\left(\frac{V}{c}\right)$, 则可按功能守恒定律并按质能公式 $E_0 = Mc^2$ 得:

$$\left\{ {}_{2m} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \quad , \tag{7}$$

从而级数之和为

$$\left(\frac{V}{c}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \tag{8}$$

1 2 k 乘子的负整数幂

这里可从(1) 推广到负整数幂情况:

( )

$$k^{-1} = \frac{1}{k} = k, \tag{9}$$

这是因为从最基本式 $k^0 = k^1 \quad k^{-1} = 1$ 以及 $k \quad k = k^2 = 1$ 而得;

( )

$$k^{-2} = 1, \tag{10}$$

这是因为从 $k^{-2} = \frac{1}{k^2} = 1$, 并由 $k^2 = 1$ 而得;

( )

$$k^{-3} = k, \tag{11}$$

这可由( ), ( ) 联合运算而得 对于 $k^{-4}, k^{-5}, \quad$ 可按同样法则得出以下普遍表示式:

$$k^n = \begin{cases} k^{2m} = 1 \\ k^{2m+1} = k \end{cases} \quad (m = 0, -1, -2, \quad ; n = 0, -1, -2, \quad), \tag{12}$$

2 k 乘子运算的双曲线函数

双曲线函数如双曲线正弦, 双曲线余弦等函数由 Riccati(1957 年) 首先发现和定义的, 后经不少学者如Lambert 等人逐步发展 然而很遗憾的是这些函数并不是从它们最具有自然的本质出发研究的 在这里如应用 k 乘子的理论研究时就显得非常自然和简单而且突出其本质

首先,我们对含有单纯的 k 乘子与一参数 相结合并作为一指数函数,因而它的幂级数是

$$e^{k} = 1+ \frac{k}{1!} + \frac{(k\ )^2}{2!} + \quad = \ _{n=0} \frac{(k\ )^n}{n!} \qquad (13)$$

按(1)对 k^n 的运算,(13)立刻得

$$e^{k} = \ _{n=0} \frac{^{2n}}{(2n)!} + k \ _{n=0} \frac{^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (14)$$

上式中二级数都定义为双曲线函数,其中

$$_{n=0} \frac{^{2n}}{(2n)!} = \cosh \quad (| \quad | < \quad), \qquad (15)$$

$$_{n=0} \frac{^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh \quad (| \quad | < \quad), \qquad (16)$$

因而(14)得

$$e^{k} = \cosh \ + k\sinh \ , \qquad (17)$$

(17)与在复数 $i = \sqrt{-1}$ 的情况下有著名的欧拉公式(Euler s formula)

$$e^{i} = \cos \ + i\sin \qquad (18)$$

相对应 为了避免(17)与(18)互相混淆,这里暂把(17)称为杨氏公式(Yang s formula) 如果对(17)取 $m($ 2, 3, $)$ 乘方运算,由于

$$(e^{k})^{m} = \ _{n=0} \frac{(m\ )^{2n}}{(2n)!} + k \ _{n=0} \frac{(m\ )^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

因而

$$(\cosh \ + k\sinh \ )^{m} = \cosh m \ + k\sinh m \qquad (19)$$

这又对应于著名的棣莫弗定理(De Moiver s theorem)

$$(\cos \ + i\sin \ )^{m} = \cos m \ + i\sin m \qquad (20)$$

这里也为避免互相混淆,称(19)为杨氏定理(Yang s theorem) 不过,在(17),(19)与(18),(20)中的 其意义是不同的 在后者中的 代表角度或弧度,而在前者却是代表双曲线 $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ 上一点 $p(x, y)$ 围成的扇形面积 S 与面积 ab 一半之比(图1):

$$= \frac{2S}{ab} = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)^{[附录1]}, \qquad (21)$$

其中 a 为实轴截距,b 为虚轴截距 因而取得双曲线函数正弦、余弦及正切等的几何表达式:

$$\sinh \ = \sinh\left[\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right] = \frac{y}{b}^{[附录2]}; \qquad (22)$$

$$\cosh \ = \cosh\left[\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right] = \frac{x}{a}; \qquad (23)$$

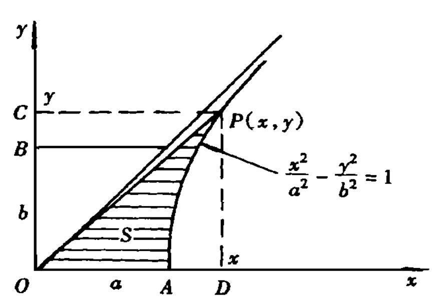

图 1 双曲线扇形面积 S

$$\tanh \ = \frac{ay}{bx} \qquad (24)$$

再根据双曲线方程 $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$, 按(22) 和(23) 得出一关系式:

$$\cosh^2 \; - \sinh^2 \; = 1 \qquad (25)$$

现在我们来研究在 k 乘子作用下, 双曲线的正弦, 余弦和正切与 $e^{\;k}$ 的关系 为此, 只要对(17) 取 $-\;k$ 代替 k :

$$e^{-\;k} = \cosh \; - k\sinh \qquad (26)$$

上式若与(17) 联解得:

$$\sinh \; = \frac{1}{2k}(e^{k} - e^{-\;k}) = \frac{1}{2}(e \; - e^{-}\;)^{[附录3]}; \qquad (27)$$

$$\cosh \; = \frac{1}{2k}(e^{k} + e^{-\;k}) = \frac{1}{2}(e \; + e^{-}\;); \qquad (28)$$

$$\tanh \; = \frac{e \; - e^{-}}{e \; + e^{-}} \qquad (29)$$

其他的双曲线函数关系这里不再多述, 请读者参阅有关的著作[5,6]

3 k 乘子的双曲型函数与自变量的关系

当 k 乘子代替了单位向量后, 文献[1] 中的运算都是有效的, 特别是双曲型函数与自变量的关系 在这里列举系列由 k 乘子组成的函数给予验证

首先, 在文献[1] 中, 由 k 乘子代替单位向量后必有函数

$$f(z) = U(x, y) + kV(x, y), \quad z = x + ky \qquad (30)$$

其中证明了函数 $f(z)$ 在域 $\mathscr{R}$ 中为解析函数的必要和充分条件是

$$\frac{\;U}{\;x} = \frac{\;V}{\;y}; \qquad \frac{\;U}{\;y} = \frac{\;V}{\;x} \qquad (31)$$

(31) 类似于复变函数论中解析函数 $f(z) = U(x, y) + iV(x, y), z = x + iy$ 满足哥西_黎曼条件(Cauchy_Reimann s conditions) :

$$\frac{\;U}{\;x} = \frac{\;V}{\;y}; \qquad \frac{\;U}{\;y} = \frac{\;V}{\;x} \qquad (32)$$

(32) 与(31) 比较仅在后一式中相差一符号 $-$ 为了(31) 不与(32) 相混淆, 这里也称(31) 为杨氏条件(Yang s conditions) 还有, 在[1] 中明确指出, 在满足(31) 中 U 和 V 的同时, 它们也满足下面方程式

$$\frac{\;^2U}{\;x^2} - \frac{\;^2U}{\;y^2} = 0; \qquad \frac{\;^2V}{\;x^2} - \frac{\;^2V}{\;y^2} = 0 \qquad (33)$$

这又与复变函数论中称为拉普拉斯方程(Laplace s equation)

$$\frac{\;^2U}{\;x^2} + \frac{\;^2U}{\;y^2} = 0; \qquad \frac{\;^2V}{\;x^2} + \frac{\;^2V}{\;y^2} = 0 \qquad (34)$$

相对应, 这不过在项中仅相差在符号 $-$ 同样理由称(33) 为杨氏方程(Yang s equations) 现举下列函数满足(31) 和(33)

3 1 指数函数 $f(z) = e^{z}, z = x + ky$

由(30) 和(17) 得

$$f(z) = U(x, y) + kV(x, y) = e^{x+ky} = e^{x}\cosh y + ke^{x}\sinh y, \qquad (35)$$

由此得

$$U(x,y) = e^x \cosh y; \quad V(x,y) = e^x \sinh y, \tag{36}$$

按(31)计算

$$\left.\begin{aligned} \frac{U}{x} &= e^x \cosh y; \quad \frac{V}{y} = e^x \cosh y, \\ \frac{U}{y} &= e^x \sinh y; \quad \frac{V}{x} = e^x \sinh y, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

这些等式都满足(31),所以$f(z) = e^z$ 是k 乘子的解析函数　由于

$$\left.\begin{aligned} \frac{{}^2 U}{x^2} &= e^x \cosh y; \quad \frac{{}^2 U}{y^2} = e^x \cosh y, \\ \frac{{}^2 V}{x^2} &= e^x \sinh y; \quad \frac{{}^2 V}{y^2} = e^x \sinh y, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

故 U 及 V 均满足(33)

3 2　幂指数函数　$f(z) = z^n, z = x + ky$　(n 为一正整数)

$$U(xy) + kV(x,y) = (x + ky)^n, \tag{39}$$

所以

$$U(x,y) = x^n + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \quad ; \quad V(x,y) = nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \tag{40}$$

按条件(31),

$$\left.\begin{aligned} \frac{U}{x} &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!}x^{n-3}y^2 + \quad , \\ \frac{V}{y} &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!}x^{n-3}y^2 + \quad , \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{U}{y} &= n(n-1)x^{n-2}y + \quad , \\ \frac{V}{x} &= n(n-1)x^{n-2}y + \quad , \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

显然都满足(31)　另外,我们也可求

$$\frac{{}^2 U}{x^2} = n(n-1)x^{n-2} + \quad ; \quad \frac{{}^2 U}{y^2} = n(n-1)x^{n-2} + \quad , \tag{43}$$

$$\frac{{}^2 V}{x^2} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}y + \quad ; \quad \frac{{}^2 V}{y^2} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \quad , \tag{44}$$

上面的(43)和(44)都满足了(33)

3 3　对数函数　$f(z) = \ln z$, $z = x + ky$

由于$z = x + ky$,故上面对数函数可写成

$$f(z) = U(x,y) + k(x,y) = \ln x + \ln\left(1 + k\frac{y}{x}\right) \quad (x \quad 0, y \quad 0), \tag{45}$$

但

$$\ln\left(1 + k\frac{y}{x}\right) = - {}_{n=1} \frac{1}{2n}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} + k {}_{n=1} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n-1}, \tag{46}$$

由此得

$$U(x,y) = \ln x - {}_{n=1} \frac{1}{2n}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n}; \quad V(x,y) = {}_{n=1} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n-1} \tag{47}$$

因此(31)有:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{U}{x}=\frac{1}{x}\left(1+{}_{n=1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n}\right);\quad \frac{V}{y}=\frac{1}{x}\left(1+{}_{n=1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n}\right),\\&\frac{U}{y}=-\frac{1}{y}{}_{n=1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n};\quad \frac{V}{x}=-\frac{1}{y}{}_{n=1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n},\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

由此证明了函数 $\ln z$ 满足(31)　也有(33) 成立的:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{{}^2U}{x^2}=-\frac{1}{xy}\left[{}_{n=1}(2n-1)\left(\frac{y}{x}\right)^{2n-1}\right];\quad \frac{{}^2U}{y^2}=-\frac{1}{xy}\left[{}_{n=1}(2n-1)\left(\frac{y}{x}\right)^{2n-1}\right],\\&\frac{{}^2V}{x^2}=\frac{1}{y^2}\left[{}_{n=1}2n\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}\right];\quad \frac{{}^2V}{y^2}=\frac{1}{y^2}\left[{}_{n=1}2n\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}\right]\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

4　k 乘子函数的积分

在文献[1]中曾证明函数 $f(z)$ 在定义域 $\mathscr{R}$ 中沿封闭曲线 c 积分:

$$_c f(z)\,\mathrm{d}z=0,\tag{50}$$

现在对 k 乘子的函数在满足(31) 时也同样有上述的积分　这积分对应于复变函数论中的柯西定理(Cauchy s theorem)　也是同样的情况对函数中含有 k 乘子复合变量的积分(50) 称为杨氏定理(Yang s theorem)　现在仅举一例:

设

$$f(z)=z^2\cosh z,\quad z=x+ky,\tag{51}$$

而

$$\left.\begin{aligned}&U(x,y)=(x^2+y^2)\cosh x\quad\cosh y+2xy\sinh x\quad\sinh y,\\&V(x,y)=(x^2+y^2)\sinh x\quad\sinh y+2xy\cosh x\quad\cosh y,\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

不言而喻, 按上述表示式一定满足(31) 条件的　现在考虑(51) 在定义域 $\mathscr{R}$ 中沿某一封闭曲线积分

$$_c z^2\cosh z\,\mathrm{d}z,\quad z=x+ky\tag{53}$$

若先对被积函数 $f(z)=z^2\cosh z$ 沿 A 到 B 端的路线积分

$$\begin{aligned}{}_A^B z^2\cosh z\,\mathrm{d}z&=z^2\sinh z\,|_A^B-2{}_A^B z\sinh z\,\mathrm{d}z=\\&[(z^2+2)\sinh z-2z\cosh z]_A^B,\end{aligned}$$

则当积分路线为封闭时, $A=B$, (53) 成为

$$_c z^2\cosh z\,\mathrm{d}z=[(z^2+2)(\sinh z-2z\cosh z]_{A=B}=0,\tag{54}$$

因而(53) 对函数 $f(z)=z^2\cosh z$ 在 $\mathscr{R}$ 中沿封闭线积分为零

综上所述, 对 k 乘子所引出的(31), (33) 和(50) 用例子检验都能很好地满足并且是一丝不苟的　(17) 和(19) 也是正确的　因而 k 乘子及其函数理论可应用并发展成一门新的数学分支　过去双曲线函数和双曲型方程已成功地应用于非欧几何学, 电工中的电路分析, 流体力学和波的传播等　现在 k 乘子理论已应用于粒子物理学中并取得可喜的成果[2, 3]　它还将进一步用于建立粒子超光速运动的理论以及自然的波粒二象性运动研究

5　结　论

1) k 乘子由单位向量推广而得　它按以下定义

$$k^n = \begin{cases} 1, (n = 2m) \\ k, (n = 2m - 1) \end{cases} \quad (m = 0, \quad 1, \quad 2, \quad), \tag{55}$$

引出了整套数学理论　特别与复变函数论中著名的结论互相对应　它们有:

$$e^k = \cosh + k\sinh ; \tag{56}$$

$$(\cosh + k\sinh)^m = \cosh m + k\sinh m ; \tag{57}$$

$$\frac{U}{x} = \frac{V}{y}; \quad \frac{U}{y} = \frac{V}{x}; \tag{58}$$

$$\frac{{}^2U}{x^2} = \frac{{}^2U}{y^2} = 0; \quad \frac{{}^2V}{5x^2} - \frac{5^2V}{5y^2} = 0; \tag{59}$$

$$R_c f(z)\,dz = 0\# \tag{60}$$

, , , , , , , , , , , ,

在以上的表达式中由 k 乘子组成的复合变量及其函数是

$$z = x + ky; \quad f(z) = U(x, y) + kV(x, y)\# \tag{61}$$

2) 由 k 乘子组成的数学理论将与复变函数并驾齐驱构成了一门新的数学分支#　它有着广阔的理论研究和应用前景#

附录　1

图 1 中围成的面积 $S = S_{OPDO} - S_{APDA} = \frac{xy}{z} - Q_a^x y\,dx =$

$$\frac{xy}{z} - \frac{b}{aQ_a^x} \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$$

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{2a}[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})]_a^x =$$

$$\frac{b}{2a}[x\sqrt{x^2 - a^2} - (x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2} + a^2\ln a)] =$$

$$\frac{b}{2a}\left[a^2\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right] = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\#$$

故得(21)

$$H = \frac{2S}{ab} = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\#$$

附录　2

$$\sinh H = \sinh\left[\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} - \frac{a}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{y}{b}\#$$

$$\cosh H = \cosh\left[\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \frac{x}{a}\#$$

附录 3

$$\sinh H = \frac{1}{2k}\left(e^{kH} - e^{-kH}\right) = \frac{1}{2k}\left(1 + \frac{kH}{1!} + \frac{(kH)^2}{2!} + , - 1 + \frac{kH}{1!} - \frac{(-kH)^2}{2!} - \frac{(-kH)^3}{3!} - ,\right) =$$

$$\frac{1}{2k}\left(2kH + 2\frac{(kH)^3}{3!} + ,\right) = \frac{1}{2}\left(2H + 2\frac{H^3}{3!} + ,\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{H}{1!} + \frac{H^2}{2!} + , - 1 - \frac{(-H)}{1!} - \frac{(-H)^3}{3!} - ,\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{H} - e^{-H}\right)\#$$

同理

$$\cosh H = \frac{1}{2k}\left(e^{kH} + e^{-kH}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{H} + e^{-H}\right)\#$$

[参 考 文 献]

[1] 杨文熊,幂向量.复合向量数及其函数理论[J]. 应用数学和力学,1996, 17(2): 133~ 138.

[2] 杨文熊. 广义非线性、非定常力学理论及在粒子物理学中的应用[J]. 应用数学和力学, 1995, 16(1): 23~ 32.

[3] 杨文熊,高速运动粒子质量的守恒性[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(8): 725~ 729.

[4] 杨文熊,马波.地球运动的超非线性分析[J]. 西北地震学报, 1997, 19(4): 98~ 100.

[5] 徐玉相.双曲线函数[M].上海:商务印书馆,1957.

[6] 阎喜杰. 双曲线函数论[M]. 上海:科学技术出版社,1957, 101~ 158.

Mathematical Theory of *k Multiplier*

Yang Wenxiong

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R Chiina)

Abstract: On the power unit vector presented by Yang Wenxiong, it for the mathematical theory of *k multiplier is extended to create a new mathematical branch. The extended k multiplier is yet to concern the negative powers. Enumerating the combinatorial variaties and its functions can satisfy the various conditions, formulas, integrations, and equations etc. derived by Yang Wenxiong. The theory of k multiplier will be applied further to establish the theory of supperlight of a particle and its motion with the natural wave_particle duality etc.*

Key words: power unit vector; k multiplier; hyperbolic function; hyperbolic equation