应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 03_0297_04

弹性薄板和薄扁壳及其在半空间上接触问题解的唯一性证明*

范家参

(云南工业大学建工学院, 昆明 650051)

(刘人怀推荐)

摘要: 用 Laplace 方程的第一种内边界问题不可能有两个不同的解这一定理, 证明了弹性薄板和薄扁壳及其在半空间上接触问题解的唯一性问题· 第二类内边界问题唯一性也得到证明·

关 键 词: 调合及重调和函数; 解的唯一性; 弹性薄板及薄扁壳; 半空间上的接触问题
中图分类号: O3343.3 文献标识码: A

引 言

弹性半空间上的倒置弹性薄扁壳静力弯曲问题, 其控制方程组是[1]:

$$\nabla^4\phi - E_i h_i \nabla_k^2 w = 0, \left(\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2,\ \nabla_k^2 = k_y(\partial^2/\partial x^2) + k_x(\partial^2/\partial y^2)\right), \tag{1}$$

$$D_i \nabla^4 w + \nabla_k^2 \phi = q - p, \tag{2}$$

$$w(x,y) = \frac{\lambda_e + 2G_e}{4\pi G_e(\lambda_e + G_e)} \iint_s \frac{p(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \tag{3}$$

在(1)、(2)、(3) 式中, $w(x,y)$ 是扁壳的挠度, $\phi(x,y)$ 是扁壳中面的应力函数, $p(x,y)$ 扁壳底与弹性半空间表面之间的接触压强, (x,y) 是平面直角座标, λ_e 和 G_e 是弹性半空间的 Lame 系数, E_i 及 h_i 分别为扁壳的杨氏弹性系数及壳厚, $q(x,y)$ 是扁壳上的垂直荷载强度, D_i 是扁壳的抗弯刚度, k_x 和 k_y 是扁壳的两个常数主曲率·

由于(1)、(2)、(3) 三式是由偏微分积分方程构成, 求其精确解存在着巨大的数学困难, 故在文献[1] 中, 利用椭圆型偏微分方程中的位势理论, 得出(3) 式的反演为:

$$p(x,y) = \alpha\nabla^2 w(x,y) - \beta f(x,y)\nabla^4 w(x,y), \tag{4}$$

在(4) 式中, $z = f(x,y)$ 是扁壳中面的几何方程, 在工程实用中, 都采用正高斯曲率的二次代数曲面如球面、椭圆抛物面等, 故 k_x 和 k_y 都是常数, 且 $k_x k_y > 0$, 此外(4) 式中的 α 和 β 是两个常数, 即 $\alpha = \dfrac{\nu_i h_i}{2(1-\nu_i)} \Big/ \left(\dfrac{1}{G_e} + \dfrac{1}{E_e} - \dfrac{1}{E_i}\right)$, $\beta = \alpha\left[\dfrac{\alpha}{E_i} + \dfrac{h_i}{2(1-\nu_i)}\right]$, ν_i 是扁壳的泊松比·

* 收稿日期: 1997_07_12; 修订日期: 1999_10_08
基金项目: 云南省教委科研基金资助项目
作者简介: 范家参(1929~), 男, 教授, 研究方向: 固体力学, 已发表专著 1 部, 论文近 100 篇.

1　解的唯一性证明

先讨论弹性薄论小挠度平衡方程:

$$D_i \nabla^4 w_i(x, y) = q \tag{5}$$

的解的唯一性问题, 设 $U(x, y)$ 为某一重调和函数, 则从(5)式可得:

$$D_i \nabla^4 [w_i(x, y) + U(x, y)] = q \tag{6}$$

于是(5)式的解 $w_i(x, y)$ 不具备唯一性, 但由文献[2]可知: 若 $H_1(x, y)$ 和 $H_2(x, y)$ 是两个调和函数, 必有 $U - xH_1(x, y) - yH_2(x, y)$ 为调和函数, 故由文献[3]的下述定理: *Laplace* 方程的第一种内边界问题不可能有两种解, 而第一种边界问题是满足下列三个条件的调和函数(以下用 $H = U - xH_1 - yH_2$ 表之):

1) 此调和函数在定义域内满足 $\nabla^2 H = 0$

2) H 在含其边界的闭域内定义并连续

3) H 在边界上取给定值

若 H 满足上述前两个条件, 第三个条件代以给定 H 的法向导数 $\partial H/\partial n$ 之值, 则称为第二种边界条件。

由文献[4]有下面的定理:

若 u_1 与 u_2 在内域 D 内是调和函数, 在边界 ∂D 上均有 $u_1 = u_2$, 且在 $D + \partial D$ 上连续可微, 则恒有在 D 内 $u_1 = u_2$, 若在 ∂D 上均有 $(\partial u_1/\partial n) = (\partial u_2/\partial n)$, 则在 D 内 u_1 与 u_2 只相差一个常数。

所以, 对于本文所讨论的问题, 若属于调和函数的第一类边界问题, 解的唯一性成立, 若为第二类边界问题, 此相差的常数代表调和函数值的刚性平移, 在弹性力学问题中刚性平移不必考虑也几乎不会发生且它对弹性体的应力应变没有影响, 例如周边固定的弹性薄板给定边上挠度及法向导数为零就如此, 故可取第二类边界问题的解析差常数为零, 唯一性存在。

矩形内域边 $a \parallel x$, $b \parallel y$ 座标原点与一角点重合, 第一类边界的调和函数(给定 $H(0, y) = H(a, y) = H(x, 0) = H(x, b) = 0$):

$$H(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{7}$$

利用 Fourier 级数的正交性而得:

$$\left.\begin{aligned} &\pi^2 A_{mn}\left(m^2/a + n^2/b\right) = 0, \\ &A_{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7$'$}$$

半径为 a, $r \leqslant a$ 的圆内域第一类边界条件的调和函数(给定 $H(a, \theta) = 0$):

$$H(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{8}$$

由

$$\int_0^a \int_0^\pi H(r, \theta) \begin{Bmatrix} \cos n'\theta \\ \sin n'\theta \end{Bmatrix} \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = 0, \quad \therefore a_n = b_n = 0, \tag{8$'$}$$

因此, 对于第一类边界条件, 我们已严格地证明调和函数的解必有唯一性, 而对第二类边界条件问题的调和函数在弹性力学问题中, 也必然具有解的唯一性。

文献[3]给出了双调和函数的解的唯一性证明: 令 w_1 与 w_2 为两个重调合函数且满足同样边界条件, 即:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4 w_1 = \nabla^4 w_2 = 0,\\ &w_1|_c = w_2|_c = g(s),\ \frac{\partial w_1}{\partial n}\Big|_c = \frac{\partial w_2}{\partial n}\Big|_c = h(s)\cdot\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

令 $w = w_1 - w_2$, 则 w 及其法向导数的边值为零, 由格林公式可得

$$(\nabla^2 w)^2 = 0,\ w_1 = w_2\cdot\tag{9$'$}$$

上述齐次边界条件就是固定边弹性薄板的边界条件, 在板面法向荷载强度为零无集中力则挠度为零, 这是指平行板面的内力 N_x、N_y、N_{xy} 也不存在, 故无失稳弯曲的特征值情况·

对于 $k_x \neq k_y$ 且 k_x 与 k_y 为主曲率的正高曲斯曲率弹性薄扁壳(即 $k_x k_y > 0$), 可以用球扁壳 $k_x = k_y = 1/R$(R 为球的半径) 为首次逼近解, 用小参数 $\varepsilon = (k_x - k_y)/(k_x + k_y)$ 来摄动展开, 即:

$$\nabla^2(\nabla^2 + i)\,\psi_0 = q\frac{l^4}{D},\quad \psi = w + i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh}\phi$$

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \cdots$$

以后各次逼近方程为:

$$\nabla^2(\nabla^2 + i)\,\psi_n = -\,i\,\nabla_d^2\psi_{n-1}\quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$\nabla_d^2 = \cos2\theta\left(-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + 2\sin\theta\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot$$

以上取自文献[5]的算法表明, 球扁壳的首次逼近解的通解也是以后高阶逼近解的通解·前述调和及双调和函数解的唯一性证明, 也适用于弹性薄扁壳问题·

最后考虑(4)式解的唯一性, 代 U 及 H 入(4) 式而得:

$$p(x, y) = \alpha\nabla^2(w + H) - \beta(x, y)\nabla^4(w + U)\cdot\tag{10}$$

在唯一边界条件下均有 $U(x, y) = 0$ 及 $H(x, y) = 0$, 从而证明了接触问题的解的唯一性·

2 讨 论

Kirchoff 在 1859 年就证明了下述弹性力学的唯一性定理[6]: 假如弹性体受已知体力作用, 在边界面上的外力或位移是已知的, 则弹性体平衡时, 体内各点的应力、应变分量的解是唯一的·

Kirchoff 证明上述定理是从弹性力学的平衡方程组及应变能的基本公式为出发点, 用齐次边界条件而得解唯一性定理, 经过由弹性力学的平衡方程组、几何方程组、物理方程组一定的合理简化及进一步推导而证明的, 也应包括本文得出弹性薄板小挠度控制方程、弹性薄扁壳小挠度控制方程组及本文(4)式的 Boussinesq 积分方程的反演· 而[7] 提出了可能在这些问题的解可能会存在唯一性的问题, 但人们求解这些问题已经习以为常而不考虑其解的唯一性, 其实这些解的唯一性是存在的, 若不考虑边界条件的唯一性而添加调和函数及重调和函数, 则否定不了解的唯一性[7]· 因为此文[7] 对弹性薄扁壳控制方程组即本文的(1)和(2)式取去 E_i、h_i、D_i 的下标变为 E、h、D 并取消(2) 式右端的 p, 得出下面两组解: (给定算子 $L = D\nabla^8 + Eh\nabla_k^4$)

$$w = \nabla^4 F_1,\ \Phi = Eh\nabla_k^2 F_1\quad (LF_1 = 0),\tag{A}$$

$$w = -\nabla_k^2 F_2,\ \Phi = D\nabla^4 F_2\quad (LF_2 = 0)\cdot\tag{B}$$

以此来否定弹性薄扁壳控制方程组的解不具备唯一性, 若不考虑定解条件即静力学的边界条

件及动力学的边界和初始条件,则常微分方程的解有积分常数,偏微分方程有积分函数,若给定了唯一定解条件,则这种任意的积分常数或积分函数就被唯一地确定了,本文已对此应用于弹性薄扁壳及其在弹性半空间上的接触问题做了证明,这还涉及柱体扭转、薄膜弯曲、波动方程时,文[7]给出的(B)式只是平凡解。

附录:关于公式(9)′的证明

由格林公式:

$$\iint_G(\nabla^2\phi\psi-\phi\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s. \tag{I}$$

令: $\phi=w=w_1-w_2$, $\psi=\nabla^2 w$ 代入(I)式而得:

$$\iint_G\nabla^2 w\nabla^2 w\,\mathrm{d}\sigma-\iint_G w\nabla^4 w\,\mathrm{d}\sigma=\int_c\left(\nabla^2 w\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 w\right)\mathrm{d}s=0, \tag{II}$$

这是因为在边界 c 上 $w=0$, $\dfrac{\partial w}{\partial n}=0$. 在定义域 G 内, $\nabla^4 w=0$ 所以

$$\iint_G(\nabla^2 w)^2\,\mathrm{d}\sigma=0. \tag{III}$$

最后有 $(\nabla^2 w)^2=0$ 而得 $w=0$, 从而:

$$w_1=w_2. \tag{IV}$$

[参 考 文 献]

[1] Fan Jashen. Potential theory applied to solve shallow shell on elastic half space[A]. In: Proc EASEC_2[C]. Vol.2, Chiang Mai, Thailand, 1989, 1182~1187.

[2] ÅÃÇ¶½º Ê³º½º. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 赵惠元译,北京:科学出版社, 1958, 79~83.

[3] 吉洪诺夫等 A.H. 数学物理方程(上册)[M]. 黄克欧等译,北京:高等教育出版社, 1956, 311~316, 431~436.

[4] Copson E T. Partial Differential Equations[M]. London: Cambridge University Press, 1975, 139~144.

[5] 龙驭球等. 椭圆抛物面扁壳的某些应力集中问题[J]. 力学学报, 1965, **8**(2): 101~121.

[6] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京:科学出版社, 1956, 118~121.

[7] 王炜. 弹性常曲率扁壳通解的完备性和不唯一性[J]. 力学学报, 1996, **28**(5): 532~541.

Uniqueness for the Solutions of Elastic Thin Plates and Shallow Shells as Well as Their Contact Problem With Half Space

Fan Jiashen

(School of Civil Engineering, Yunnan Polytechnic University, Kunming 650051, P R China)

Abstract: The uniqueness for the solutions mentioned in the subject is proved by using the uniqueness of the solution for the internal boundary problem of Laplace and bi_Laplace equations of the first kind as well as of the second.

Key words: harmonic and bi_harmonic functions; uniqueness of solution; elastic plates and shallow shells; contact problem with the elastic half space