

文章编号: 1000-0887(2000) 03-0290-07

非线性自然弯扭闭口薄壁复合梁的 广义变分原理^{*}

虞爱民

(同济大学 固体力学教育部重点实验室, 上海 200092)

(程昌钧推荐)

摘要: 对复合材料自然弯扭闭口薄壁细长梁在小应变、大位移和大转动的情况作了研究, 建立了两端边界均为完全约束的该梁大变形弹性理论的非完全广义变分原理的泛函。由泛函驻值条件可以导出所给问题的平衡方程及全部边界条件。上述方法可方便地推广到其它各种不完全约束边界的情况。此外, 利用上述结果还可以得到该梁在小位移理论中的基本方程和有关公式。

关键词: 广义变分原理; 几何非线性; 大变形

中图分类号: O354 文献标识码: A

引 言

纤维增强复合材料自然弯扭闭口薄壁细长梁(以下简称弯扭薄壁复合梁)的静动力非线性分析在化工和航空航天中有许多重要的应用, 这就要求发展非线性理论来解决这些问题。目前关于复合材料构件的分析工作均偏重于板、壳或板条梁, 对薄壁杆件的分析尚不多见。在文献[1]的基础上, 本文进一步讨论了弯扭薄壁复合梁的几何非线性问题, 即小应变、大位移和大转动的情况, 结果将导致物体的大变形。由于该梁几何非线性性质的复杂性, 故其应变能的计算极其繁冗, 且受力情况也更加复杂, 因此至今尚未见到关于它们由所给问题的泛函驻值条件导出的非线性静动力控制方程。本文目的在于得到一组平衡方程和相应的边界条件, 用于弯扭薄壁复合梁在小应变、大位移和大转动, 且承受任意载荷的情况。这些方程中的未知量用关于曲线坐标 s 的七个位移函数来表示, 包括三个移动(u, v, w), 三个转动(α, β, γ) 以及广义翘曲坐标(τ)。这里欧拉角 α, β, γ 可用来表示任意大的转角。此外, 广义变分原理的建立将有助于扩大有限元和其它近似方法在该梁中的应用。

1 弯扭薄壁复合梁的基本关系

本文在研究中将引入以下几个假设^[2]

- 1) 梁的变形是由伸长、扭转和弯曲共同引起的;
- 2) 梁的横截面在自身平面内不发生变形;
- 3) 推导过程限制在一个小应变分析中;

* 收稿日期: 1998_06_02; 修订日期: 1999_10_28

作者简介: (1948~), 男, 理学学士, 副教授

4) 实际应用中梁的初始曲率大多是缓和的。

图 1 表示弯扭薄壁复合梁的轴线为一空间连续曲线, 可以参数形式来表示为

$$r_0 = r_0(s) \quad (1)$$

这里 s 为沿梁轴线的曲线坐标。

设切向单位向量为 t , 则

$$t = r_0'(s) \quad (2)$$

符号“ $'$ ”表示对 s 的导数。此外, 两个相互垂直正交的单位向量 i_ξ 和 i_η 定义了梁截面平面的形心主轴, 以致在轴线上的每一点, i_ξ, i_η, t 构成了一对正交的坐标轴, 这些单位向量对于 s 的导数为^[2,3]

$$\begin{bmatrix} i_\xi' \\ i_\eta' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\eta & -\kappa_\xi \\ -\kappa_\eta & 0 & \kappa_\xi \\ \kappa_\xi & -\kappa_\eta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\xi \\ i_\eta \\ t \end{bmatrix} \quad (3)$$

根据假设 (1), 位移场可表示为^[2~4]

$$u(s, \xi, \eta) = [u(s) + \xi\theta_1(s) + \eta\theta_2(s) + \tau(s)\phi(\xi, \eta)]t + [v(s) + \xi\phi_1(s) + \eta\phi_2(s)]i_\xi + [w(s) + \xi\varphi_1(s) + \eta\varphi_2(s)]i_\eta \quad (4)$$

这里考虑了横向剪切变形和翘曲变形的影响, 其中 $\phi(\xi, \eta)$ 是和所研究截面相同的柱壳扭转的圣维南翘曲函数, τ 是广义翘曲坐标。

按假设 (2), 即横截面平面内的应变分量为零

$$e_{22} = e_{33} = e_{23} = 0 \quad (5)$$

上述关系式表明 $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \varphi_1$ 和 φ_2 这六个量中仅有三个是独立的, 因此引入欧拉角 α, β, γ 将是方便的^[2]

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -c_\alpha s \beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma, & \theta_2 &= c_\alpha s \beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma, \\ 1 + \phi_1 &= c \beta c_\gamma, & \phi_2 &= -c \beta s_\gamma, \\ \varphi_1 &= -s_\alpha s \beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma, & 1 + \varphi_2 &= s_\alpha s \beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里, α, β, γ 分别为绕 ξ, η, s 轴的转角, 使用符号 $s_\alpha = \sin(\alpha), c_\alpha = \cos(\alpha)$ 等, (5) 式现在被自动满足。同样可以得到非零应变分量为

$$\left. \begin{aligned} 2\sqrt{g}e_{12} &= \hat{e}_{12} + \eta\kappa_{12} + \kappa_\eta\tau\phi + \tau\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \\ 2\sqrt{g}e_{13} &= \hat{e}_{13} - \xi\kappa_{12} - \kappa_\xi\tau\phi + \tau\frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \\ \sqrt{g}e_{11} &= \hat{e}_{11} + \xi\kappa_{11} + \eta\kappa_{22} + \kappa_\xi \left[\eta\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right] \tau + \tau\phi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中的 $\hat{e}_{11}, \hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \kappa_{11}, \kappa_{12}, \kappa_{22}$ 及有关符号见文献[2]。这里业已略去了和应变平方同阶的量^[2] 以及翘曲位移的非线性项。

图 2 为用梁截面中线表示的任意形状弯扭薄壁复合梁截面的轮廓图形, 这里的 ζ 是描述截面形状的曲线坐标, 薄壁由叠层复合材料组成。对于薄壁杆件而言, 可以认为应变分量沿壁厚是均匀分布的, 仅有的非零应变分量是轴向应变 e 和剪应变 γ , 即

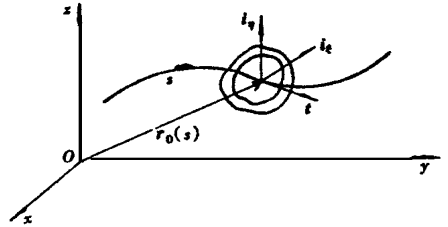


图 1 梁的几何关系

$$\left. \begin{aligned} e &= e_{11}, \\ \gamma &= 2e_{12} \frac{d\xi}{d\zeta} + 2e_{13} \frac{d\eta}{d\zeta} \end{aligned} \right\}$$

把(7)式代入上式,并由圣维南理论^[2,5],上述应变分量可进一步写成

$$\left. \begin{aligned} e &= \hat{e}_{11} + \xi k_{11} + \eta k_{22} + k_{\xi} \left[\eta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \tau + \tau \phi, \\ \gamma &= G_{\xi} \hat{e}_{12} + G_{\eta} \hat{e}_{13} - r k_{12} + \left[k_{\eta} \phi \frac{d\xi}{d\zeta} - k_{\xi} \phi \frac{d\eta}{d\zeta} \right] \tau + \tau \frac{d\phi}{d\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

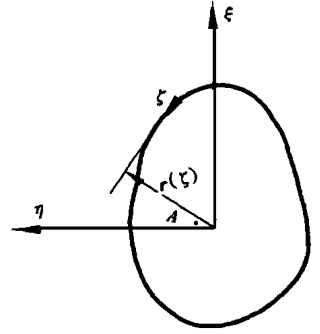


图2 横截面中线的轮廓图形

式中的 G_{ξ} 和 G_{η} 反映了薄壁杆件截面上剪应变 \hat{e}_{12} 和 \hat{e}_{13} 分布的非均匀性。这时的扭转翘曲函数应为 $\phi = \phi(\zeta)$, r 是坐标中心 O 到截面中线切线的垂直距离(见图2),组合(8),(7)和(6)式,可以把应变分量写成

$$\left. \begin{aligned} e &= e(u, u', v, v', w, w', \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \tau, \tau'), \\ \gamma &= \gamma(u, u', v, v', w, w', \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \tau, \tau'). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

即应变分量取决于这七个位移函数以及它们的一阶导数。

在载荷作用下,梁截面上仅产生沿壁厚均匀分布的轴向应力流 n 和剪应力流 q , 它们是 s 和 ζ 的函数,其它的应力分量可忽略不计。因此,可得到应力应变关系为^[6]

$$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mn} & A_{nq} \\ A_{mq} & A_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中

$$A_{mn} = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, \quad A_{qq} = A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}}, \quad A_{nq} = A_{16} - \frac{A_{12}A_{26}}{A_{22}},$$

这里, A_{ij} 是面内刚度矩阵分量,可以根据材料性质和铺层方式求得。

2 广义变分原理

现考察一根弯扭薄壁复合梁,它在两端皆为固定,设梁表面受到沿 s, ξ, η 方向的单位面积分布载荷 p_s, p_{ξ}, p_{η} , 因而在单位长度上作用的力与力矩可定义为

$$\left\{ \begin{aligned} q_{\xi} &= \oint_c p_{\xi} d\zeta, & m_{\xi} &= \oint_c p_s \eta d\zeta, \\ q_{\eta} &= \oint_c p_{\eta} d\zeta, & m_{\eta} &= - \oint_c p_s \xi d\zeta, \\ q_s &= \oint_c p_s d\zeta, & m_s &= \oint_c [p_{\eta}(\xi - \xi_A) - p_{\xi}(\eta - \eta_A)] d\zeta, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

式中, ξ_A, η_A 为梁截面剪切中心 A 的坐标,见图2。故全梁上分布载荷所作功为

$$W = \int_{L_p} \left[\oint_c p_s (u + \xi \theta_1 + \eta \theta_2 + \tau \phi) d\zeta + q_{\xi} v + q_{\eta} w + m_s \gamma \right] ds,$$

这里 L_p 为力边界。把(6)式代入,引用(11)式可得

$$\begin{aligned} W &= \int_{L_p} [q_s u + q_{\xi} v + q_{\eta} w + m_{\xi} (\cos \beta s \gamma - \sin \alpha \gamma) + m_{\eta} (\cos \beta \gamma + \sin \alpha \gamma) + \\ &\quad m_s \gamma + \left(\oint_c p_s \phi d\zeta \right) \tau] ds. \end{aligned} \quad (12)$$

现在引入内力和内力矩定义如下

$$\begin{cases} Q_s = \oint_c n d\zeta, & M_s = \oint_c q r(\zeta) d\zeta, \\ Q_\xi = \oint_c G \xi q d\zeta, & M_\xi = \oint_c n \Pi d\zeta, \\ Q_\eta = \oint_c G \eta q d\zeta, & M_\eta = - \oint_c n \xi d\zeta, \end{cases} \quad (13)$$

其中 Q_s 为轴力, Q_ξ, Q_η 为剪力, M_s 为扭矩, M_ξ, M_η 为弯矩。

如果把 (10), (9) 式代入 (13) 式, 又可得到内力与位移之间的关系式

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= Q_s(u, u', \dots, \tau, \tau'), & M_s &= M_s(u, u', \dots, \tau, \tau'), \\ Q_\xi &= Q_\xi(u, u', \dots, \tau, \tau'), & M_\xi &= M_\xi(u, u', \dots, \tau, \tau'), \\ Q_\eta &= Q_\eta(u, u', \dots, \tau, \tau'), & M_\eta &= M_\eta(u, u', \dots, \tau, \tau'). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

1. 边界条件

由于该梁在 $s = 0, s = l$ 处固定, 故有关位移的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u(0) - u(0) &= 0, & v(0) - v(0) &= 0, & w(0) - w(0) &= 0, \\ \alpha(0) - \alpha(0) &= 0, & \beta(0) - \beta(0) &= 0, & \gamma(0) - \gamma(0) &= 0, \\ u(l) - u(l) &= 0, & v(l) - v(l) &= 0, & w(l) - w(l) &= 0, \\ \alpha(l) - \alpha(l) &= 0, & \beta(l) - \beta(l) &= 0, & \gamma(l) - \gamma(l) &= 0, \\ \tau(0) - \tau(0) &= 0, & \tau(l) - \tau(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $u(0), u(l), v(0), v(l), w(0), w(l)$ 是梁固定支座处已知的沿 s, ξ, η 方向的位移; $\alpha(0), \alpha(l), \beta(0), \beta(l), \gamma(0), \gamma(l)$ 是已知的绕 ξ, η, s 轴转动的欧拉角; 而 $\tau(0), \tau(l)$ 则是两端已知的广义翘曲坐标, 这里它们皆为零。

2. 广义变分原理

根据大变形弹性理论的最小位能原理, 在满足条件 (9), (14) 和 (15) 式时, 体系的泛函为

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_L \oint_c \frac{1}{2} (ne + q\gamma) \sqrt{g} d\zeta ds - \int_{l_p} [q_s u + q_\xi v + q_\eta w + m\xi(c_\alpha s \beta s_\gamma - \\ & s_\alpha c_\gamma) + m\eta(c_\alpha s \beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma) + m_s \gamma + (\oint_c p_s \phi d\zeta) \tau] ds. \end{aligned} \quad (16)$$

现在引入待定的 Lagrange 乘子 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, 14)$, 将梁两端约束位移的边界条件 (15) 式合并到泛函 (16) 式中, 可得到下列的广义泛函

$$\begin{aligned} \Pi_1^* = & \Pi + \lambda_1 [u(0) - u(0)] + \dots + \lambda_7 [\tau(0) - \tau(0)] + \\ & \lambda_8 [u(l) - u(l)] + \dots + \lambda_{14} [\tau(l) - \tau(l)]. \end{aligned} \quad (17)$$

在对 (17) 式进行变分时, $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \tau, \lambda_i$ 均为独立变量。当 Π_1^* 达到驻值时, 有 $\delta \Pi_1^* = 0$, 即

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1^* = & \int_L \oint_c (n \delta e + q \delta \gamma) \sqrt{g} d\zeta ds - \int_{l_p} \left\{ q_s \delta u + q_\xi \delta v + q_\eta \delta w - \right. \\ & [m\xi \cdot (s_\alpha s \beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) + m\eta (s_\alpha s \beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma)] \delta \alpha + \\ & [m\xi c_\alpha c \beta s_\gamma + m\eta c_\alpha c \beta c_\gamma] \delta \beta + [m\xi \cdot (c_\alpha s \beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma) - \\ & m\eta (c_\alpha s \beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma) + m_s] \delta \gamma + \left. (\oint_c p_s \phi d\zeta) \delta \tau \right\} ds + \\ & \lambda_1 \delta u(0) + \dots + \lambda_7 \delta \tau(0) + \lambda_8 \delta u(l) + \dots + \lambda_{14} \delta \tau(l) + \\ & [u(0) - u(0)] \delta \lambda_1 + \dots + [\tau(0) - \tau(0)] \delta \lambda_7 + \end{aligned}$$

$$[u(l) - u(l)]\delta\lambda_8 + \dots + [\tau(l) - \tau(l)]\delta\lambda_{14} = 0 \quad (18)$$

注意到假设(4), 有 $\sqrt{g} \approx 1$, 由 $\delta\Gamma_1^*$ 取驻值的条件可导出平衡方程

$$\begin{aligned} & [Q_s(1 + \varepsilon)]' - K_\eta Q_s \xi + K_\xi Q_s \vartheta_1 - (K_\xi^2 + K_\eta^2)[M_\eta(\text{cas}\beta\text{c}\gamma + \text{sas}\gamma) + \\ & M_\xi(\text{cas}\beta\text{s}\gamma - \text{sac}\gamma)] - K_s K_\xi [M_\eta \text{c}\beta\text{c}\gamma + M_\xi \text{c}\beta\text{s}\gamma] + K_s K_\eta [M_\eta(\text{sas}\beta\text{c}\gamma - \text{cas}\gamma) + \\ & M_\xi(\text{sas}\beta\text{s}\gamma + \text{cac}\gamma)] - K_\xi M_\xi' - K_\eta M_\eta' + H_1 + q_s + F_1 = 0, \\ & (Q_s \xi)' + K_\eta Q_s(1 + \varepsilon) - K_s Q_s \vartheta_1 + (K_\eta^2 + K_s^2)(M_\eta \text{c}\beta\text{c}\gamma + M_\xi \text{c}\beta\text{s}\gamma) + K_s K_\xi [M_\eta \cdot \\ & (\text{cas}\beta\text{c}\gamma + \text{sas}\gamma) + M_\xi(\text{cas}\beta\text{s}\gamma - \text{sac}\gamma)] + K_\xi K_\eta [M_\eta(\text{sas}\beta\text{c}\gamma - \text{cas}\gamma) + \\ & M_\xi(\text{sas}\beta\text{s}\gamma + \text{cac}\gamma)] - K_\xi K_\eta M_\xi - K_\eta^2 M_\eta + H_2 + q_\xi + F_2 = 0, \\ & (Q_s \vartheta_1)' - K_\xi Q_s(1 + \varepsilon) + K_s Q_s \xi - (K_\xi^2 + K_s^2)[M_\eta(\text{sas}\beta\text{c}\gamma - \text{cas}\gamma) + \\ & M_\xi(\text{sas}\beta\text{s}\gamma + \text{cac}\gamma)] + K_s K_\eta [M_\eta(\text{cas}\beta\text{c}\gamma + \text{sas}\gamma) + M_\xi(\text{cas}\beta\text{s}\gamma - \text{sac}\gamma)] - \\ & K_\xi K_\eta (M_\eta \text{c}\beta\text{c}\gamma + M_\xi \text{c}\beta\text{s}\gamma) + K_\xi K_\eta M_\eta + K_\xi^2 M_\xi + H_3 + q_\eta + F_3 = 0 \end{aligned}$$

(在 L 上),

$$\begin{aligned} & A_9(\text{cas}\beta\text{c}\gamma + \text{sas}\gamma) + A_{10}(\text{cas}\beta\text{s}\gamma - \text{sac}\gamma) + A_{11}(\text{sas}\beta\text{c}\gamma - \text{cas}\gamma) + \\ & A_{12}(\text{sas}\beta\text{s}\gamma + \text{cac}\gamma) + (M_s \text{s}\beta)' - K_s M_s \text{c}\alpha\text{c}\beta + K_\eta M_s \text{c}\alpha\text{c}\beta + \\ & m\xi(\text{sas}\beta\text{s}\gamma + \text{cac}\gamma) + m\eta(\text{sas}\beta\text{c}\gamma - \text{cas}\gamma) + F_4 = 0, \\ & A_9 \text{s}\alpha\text{c}\beta\text{c}\gamma + A_{10} \text{s}\alpha\text{c}\beta\text{s}\gamma - A_{11} \text{c}\alpha\text{c}\beta\text{c}\gamma - A_{12} \text{c}\alpha\text{c}\beta\text{s}\gamma - A_{13} \text{s}\beta\text{c}\gamma - A_{14} \text{s}\beta\text{s}\gamma - M_s \alpha' \text{c}\beta - \\ & K_s M_s \text{c}\alpha\text{s}\beta + K_\xi M_s \text{c}\beta - K_\eta M_s \text{s}\alpha\text{s}\beta - m\xi \text{c}\alpha\text{c}\beta\text{s}\gamma - m\eta \text{c}\alpha\text{c}\beta\text{c}\gamma + F_5 = 0, \\ & A_9(\text{sas}\beta\text{s}\gamma + \text{cac}\gamma) - A_{10}(\text{sas}\beta\text{c}\gamma - \text{cas}\gamma) - A_{11}(\text{cas}\beta\text{s}\gamma - \text{sac}\gamma) + \\ & A_{12}(\text{cas}\beta\text{c}\gamma + \text{sas}\gamma) + A_{13} \text{c}\beta\text{s}\gamma - A_{14} \text{c}\beta\text{c}\gamma + M_s' + m_s + \\ & m\xi(\text{cas}\beta\text{c}\gamma + \text{sas}\gamma) - m\eta(\text{cas}\beta\text{s}\gamma - \text{sac}\gamma) + F_6 = 0, \\ & \left(\oint_c \phi_n d\zeta \right)' - \oint_c \left\{ \left[\frac{d\phi}{d\zeta} + K_\eta \phi \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right) - K_\xi \phi \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right) \right] q \right\} d\zeta - \\ & K_s \oint_c \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \eta - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \xi \right] n d\zeta + \oint_c p_s \phi d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

和两端的位移边界条件(15)式。这里的 F_i 为曲率和扭率的导数, 即 K_ξ' , K_η' , K_s' 和各位移函数乘积的多项式。 H_1, H_2, H_3 分别为

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} + A_{55} + A_{66}, \\ H_2 &= -A_{13} - A_{24} + A_{31} + A_{42} + A_{75} + A_{86}, \\ H_3 &= A_{15} + A_{26} - A_{51} - A_{62} + A_{73} + A_{84}, \end{aligned} \right\}$$

这里

$$\begin{aligned} A_{1j} &= M_\eta \ddot{X}_j + (M_\eta' - Q_\xi - K_s M_\xi) \dot{X}_j - (Q_\xi' + K_s M_\xi') X_j, \\ A_{2j} &= M_\xi \ddot{X}_j + (M_\xi' + Q_\eta + K_s M_\eta) \dot{X}_j + (Q_\eta' + K_s M_\eta') X_j, \\ A_{3j} &= 2K_\eta M_\eta \dot{X}_j + (K_\eta M_\eta' - K_\eta Q_\xi - K_s K_\eta M_\xi) X_j, \\ A_{4j} &= 2K_\eta M_\xi \dot{X}_j + (K_\eta M_\xi' + K_\eta Q_\eta + K_s K_\eta M_\eta) X_j, \\ A_{5j} &= 2K_\xi M_\eta \dot{X}_j + (K_\xi M_\eta' - K_\xi Q_\xi - K_s K_\xi M_\xi) X_j, \\ A_{6j} &= 2K_\xi M_\xi \dot{X}_j + (K_\xi M_\xi' + K_\xi Q_\eta + K_s K_\xi M_\eta) X_j, \\ A_{7j} &= -2K_s M_\eta \dot{X}_j - (K_s M_\eta' - K_s Q_\xi - K_s^2 M_\xi) X_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{8j} &= -2K_s M_{\xi} X_j' - (K_s M_{\xi} + K_s Q_{\eta} + K_s^2 M_{\eta}) X_j, \\
 A_9 &= -[M_{\eta} \theta_1 + M_{\eta} \theta_1 + Q_{\xi} \theta_1 - K_{\xi} M_{\eta} (1 + \epsilon) + K_s M_{\xi} \theta_1 + K_s M_{\eta} \epsilon_j], \\
 A_{10} &= -[M_{\xi} \theta_1 + M_{\xi} \theta_1 - Q_{\eta} \theta_1 - K_{\xi} M_{\xi} (1 + \epsilon) + K_s M_{\xi} \epsilon_s - K_s M_{\eta} \theta_1], \\
 A_{11} &= [M_{\eta} (1 + \epsilon) + M_{\eta} \epsilon_s - Q_{\xi} (1 + \epsilon) - K_s M_{\xi} (1 + \epsilon) + K_{\xi} M_{\eta} \theta_1 - K_{\eta} M_{\eta} \epsilon_j], \\
 A_{12} &= [M_{\xi} (1 + \epsilon) + M_{\xi} \epsilon_s - Q_{\eta} (1 + \epsilon) - K_s M_{\eta} (1 + \epsilon) + K_{\xi} M_{\xi} \theta_1 - K_{\eta} M_{\xi} \epsilon_j], \\
 A_{13} &= [M_{\eta} \epsilon_s + M_{\eta} \theta_1 + Q_{\xi} \epsilon_s + K_{\eta} M_{\eta} (1 + \epsilon) + K_s M_{\xi} \epsilon_s - K_s M_{\eta} \theta_1], \\
 A_{14} &= [M_{\xi} \epsilon_s + M_{\xi} \theta_1 - Q_{\eta} \epsilon_s + K_{\eta} M_{\xi} (1 + \epsilon) - K_s M_{\xi} \theta_1 - K_s M_{\eta} \epsilon_j],
 \end{aligned}$$

式中 A_{ij} ($i = 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, \dots, 6$) 的第二个下标和 X_j 的下标相同, X_i 分别为

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 &= c_{\alpha} s_{\beta} c_{\gamma} + s_{\alpha} s_{\gamma}, & X_2 &= c_{\alpha} s_{\beta} c_{\gamma} - s_{\alpha} c_{\gamma}, & X_3 &= c_{\beta} c_{\gamma}, \\
 X_4 &= c_{\beta} s_{\gamma}, & X_5 &= s_{\alpha} s_{\beta} c_{\gamma} - c_{\alpha} s_{\gamma}, & X_6 &= s_{\alpha} s_{\beta} s_{\gamma} + c_{\alpha} c_{\gamma} \cdot
 \end{aligned} \right\}$$

如 A_{11} 只需用 X_1 代替 A_{ij} 中的 X_j , A_{84} 只需用 X_4 代替 A_{8j} 中的 X_j 等。

Lagrange 乘子的物理意义, 可以从广义功来解释, λ_1, λ_8 为广义轴向力, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_9, \lambda_{10}$ 为广义剪力, $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_{11}, \lambda_{12}$ 为广义弯矩, λ_6, λ_{13} 为广义扭矩, λ_7, λ_{14} 可理解为梁在约束扭转时, 在固定支座处相应于广义翘曲坐标的广义载荷。即

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1 &= Q_s(0), & \lambda_2 &= Q_{\xi}(0), & \lambda_3 &= Q_{\eta}(0), & \lambda_4 &= M_{\xi}(0), \\
 \lambda_5 &= M_{\eta}(0), & \lambda_6 &= M_s(0), & \lambda_7 &= T(0), & \lambda_8 &= -Q_s(l), \\
 \lambda_9 &= -Q_{\xi}(l), & \lambda_{10} &= -Q_{\eta}(l), & \lambda_{11} &= -M_{\xi}(l), & \lambda_{12} &= -M_{\eta}(l), \\
 \lambda_{13} &= -M_s(l), & \lambda_{14} &= -T(l) \cdot
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上面已经得到了复合材料自然弯扭闭口薄壁梁结构在任意载荷作用下的一组大位移分析控制方程。与线性理论不同, 它的平衡方程中包含了力与位移的乘积。在该梁的大变形问题中, 这些非线性项分别表示了伸长、弯曲和扭转的相互耦合, 因此必须同时考虑。如果消去这些非线性项, 就可以得到小位移理论的平衡方程^[3]。

3 结 论

1. 在该梁的大位移理论中, 各种几何非线性被正确地计算。此外, 拉压、弯曲与扭转相互耦合, 使问题变得极其复杂。
2. 本文导出了在任意载荷作用及各种边界条件下弯扭薄壁复合梁平衡问题的全部方程及计算公式, 包括计算各种内力、应变、应力、位移的公式。
3. 本文可用于各向异性层压材料且任意截面形状的弯扭薄壁复合梁, 它代表了工程上普遍适用的情况。

[参 考 文 献]

[1] 张雷, 虞爱民. 非线性薄壁复合曲梁广义变形原理的研究[J]. 应用力学学报, 1995, 12(2): 52~ 58.
 [2] Bauchau O A, Hong C H. Large displacement analysis of naturally curved and twisted composite beams[J]. AIAA Journal, 1987, 25(11): 1469~ 1475.
 [3] Washizu K. Some considerations on a naturally curved and twisted slender beam[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1964, 43(2): 111~ 116.
 [4] 诺沃日洛夫 B B. 非线性弹性力学基础[M]. 朱兆祥译, 北京: 科学出版社, 1958.
 [5] Bauchau O A. A Beam theory for anisotropic materials[J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 107

(6): 416~ 422.

- [6] Tsai S W, Hahn H T. Introduction to Composite Materials [M]. Pennsylvania: Technomic Publishing Co, 1980.

Generalized Variational Principle on Nonlinear Theory of Naturally Curved and Twisted Closed Thin_Walled Composite Beams

Yu Aimin

(Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE , Tongji University ,
Shanghai 200092, P R China)

Abstract: Naturally curved and twisted closed thin_walled slender beams of composite material undergoing small strains, large displacements and rotations have been investigated, and an incomplete generalized variational function on the theory of elasticity with finite displacement is established for these beams with complete constrained boundaries at two ends. The balance equations as well as all boundary conditions concerned have been deduced from functional stationary value condition. The above_mentioned method can also be extended to other various incomplete constrained boundaries conveniently. In addition, the fundamental equations and concerned formulas in the small displacement theory of the beams can be derived by using above results.

Key words: generalized variational principle; geometric nonlinear; finite displacement