

文章编号: 1000-0887(2000) 03-0265-12

任意流场中稀疏颗粒运动方程及其性质^{*}

黄社华^{1,2}, 李 炜¹, 程良骏³

(1. 武汉水利电力大学 河流系, 武汉 430000; 2. 北京大学 湍流国家重点
实验室, 北京 100871; 3. 华中理工大学 动力系, 武汉 430000)

(刘宇陆推荐)

摘要: 通过研究和比较稀疏刚性颗粒相对流体运动时所受到的各种作用力, 并考虑在不同流动条件下各作用力的修正问题从而得到了任意流场中稀疏颗粒运动方程的一般形式; 然后分析了该方程的数学性质, 采用积分变换方法(Laplace 变换) 对方程的基本形式进行了理论解析; 最后探讨了颗粒物理性质对其运动规律的影响, 以及几种典型流场中稀疏颗粒的运动特性, 得到了一些有意义的结论

关键词: 两相流; 粒子运动方程; 稀疏颗粒; 积分变换分析

中图分类号: O359 文献标识码: A

引 言

固液两相流动现象广泛存在于现代工业和工程实际中, 在许多工业设备、制造过程和工程设计中两相流动控制往往是十分关键的技术问题。稀疏固液两相流不仅因其是两相流理论的重要基础, 而且本身就代表了相当多的一类实际流动过程, 具有良好的应用前景。因而有关稀疏固液两相流动的规律及其应用问题近年来一直受到研究者的重视。

在不考虑相变和等温流的前提下, 研究这类两相流中颗粒相运动的主要难点在于相间界面上动量传递关系的确定。若进一步忽略粒间相互碰撞作用, 则单个颗粒在流场中任意运动时的受力分析就成为建立稀疏颗粒相数学模型的关键。在这方面, 陈善谟(C. M. Tchen) 最早研究了湍流场中悬浮细颗粒的扩散问题, 并提出了描述颗粒相运动的数学模型即推广的 B. B. O 方程^[1]。之后许多研究者在探求某些特定流场中颗粒运动规律时都对该方程的正确性和数理性质进行过不同程度的研究^[2~5]。但是从现有的研究资料看, 情况远非完善。在该方程的适用性分析和求解中各主要作用力项(如 Basset 力) 的取舍问题尚存在分歧和近似, 而且针对不同的颗粒特征雷诺数(Re_p), 颗粒运动所受的各主要作用力的具体表达式也有不同的修正形式; 若再考虑到颗粒形状和多个颗粒存在的影响, 则问题将更加复杂。另一方面, 关于 Tchen 所提出的推广的 B. B. O 方程的数学物理性质, 目前的研究也不能说已十分透彻, 仅在均匀流条件下获得了严格意义上的解析解^[6]。如果能得到该方程其它的理论解, 则除了理论解本身的意义外, 还将为数值计算方法提供有力的验证依据。

* 收稿日期: 1998_07_13; 修订日期: 1999_07_20

资助项目: 国家自然科学基金资助项目(59709007); 博士后科学基金资助项目

作者简介: 黄社华(1964~), 男, 博士, 副教授, 研究方向: 流体力学等, 已发表论文 16 篇。

本文将首先对液相流场中单个或稀疏刚性颗粒的运动受力作简要分析和量级比较, 然后通过讨论不同流动条件(如颗粒特征雷诺数、颗粒形状等)下各作用力的适当修正形式, 给出任意液流场中稀疏颗粒运动方程的一般形式。一般而言, 这一方程是非线性的微分积分方程, 目前只能通过数值方法进行求解(关于此方程的数值解法, 可参见文献[7, 8]), 但是在某些特殊的流动和假设条件下, 可以对方程进行适当的线性化。因此本文最后将通过积分变换方法间接分析该线性化的方程, 得到颗粒物理性质与其运动特性的关系, 并获得几个特定流场中颗粒运动速度随时间的变化规律, 讨论初始条件、流场参数及外势力对颗粒运动特性的影响。

1 无界流场中低雷诺数运动颗粒的受力及量级比较

在液流场中非恒定运动的固体颗粒所受到的各种作用力, 按照作用方式的不同可以分为三类^[9]: 1) 与流体和颗粒间的相对运动无关的力, 包括惯性力, 压力梯度力, 重力等; 2) 依赖于流体和颗粒间的相对运动, 且与相对运动速度方向相同的力, 这类力有 Stokes 粘阻、附加质量力、Basset 力等; 3) 依赖于流体和颗粒间的相对运动, 但与相对运动速度方向垂直的力, 如 Saffman 力、Magnus 力等。在文献[7]中将第二类力统一定义为广义阻力, 将第三类力定义为广义升力, 而压力梯度力、广义阻力和广义升力则可统称为固液两相的相间作用力。为便于分析比较以下给出低颗粒雷诺数($Re_p < 1$)条件下各个间作用力的理论表达式。若取 D_p 为颗粒粒径, ρ_f 、 ρ_s 分别为流体和颗粒的密度, \mathbf{u} 、 \mathbf{u}_p 为流体和颗粒速度的张量分量, μ 、 ν 分别为流体的动力、运动粘性系数, 则有

1) 压力梯度力 $F_{f,p}$:

$$F_{f,p} = \frac{1}{6}\pi D_p^3 \rho_f \left[\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right], \quad (1)$$

式中 \mathbf{f} 为单位质量外势力。

2) 广义阻力 $F^{(s)}$ ^[7]

$$F^{(s)} = 3\pi\mu(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + \frac{1}{12}\pi D_p^3 \rho_f \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)}{dt} + \frac{3}{2}D_p^3 \sqrt{\rho_f \pi \mu} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)/d\tau}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (2)$$

式(2)中右端第一项是 Stokes 粘阻 F_D , 第二项是附加质量力 F_m , 第三项则是 Basset 力 F_B 。从(2)中易见, 颗粒在流场中作非恒定运动时, 其所受 Stokes 粘阻形式上与其作恒定运动时完全一致, 而附加质量力和 Basset 力则分别代表了颗粒作非恒定运动时的无粘、粘性两方面的影响。附加质量力表示颗粒相对无粘流场作加速运动时, 也要带动或推动一部分流体作相同加速度的非恒定运动, 而这部分似乎附着于颗粒上的流体体积正好等于颗粒体积的一半。Basset 力的物理意义是代表颗粒相对流体非恒定运动时所受的附加粘性作用的时间积分。

3) 广义升力 $F^{(l)}$ ^[7]:

$$F^{(l)} = \frac{1}{8}\pi D_p^3 \rho_f \omega(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + K_s \mu \left[\frac{\xi}{\nu} \right]^{0.5} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \quad (3)$$

式(3)中右端第一项是 Magnus 升力 F_{LM} , 其中 ω 为颗粒的自旋角速度; 第二项是 Saffman 升力 F_{SM} , 其中 $\xi = \partial u / \partial y$ 为横向速度梯度, $K_s = 1.615$ 为系数^[10]。如前所述, 广义升力的作用方向和流体颗粒间相对运动速度方向垂直, 且广义升力、相对速度和颗粒的自旋角速度 ω (对 F_{LM} 而言) 或横向速度梯度 ξ (对 F_{SM} 而言) 三者构成右手螺旋系。

一般情况下,不是上述所有作用力都具有相同的数量级。若能有条件地忽略某些表达式比较复杂的相间作用力,则可简化颗粒运动方程的理论分析和求解。如在气固两相流中一些研究者常常忽略 Basset 力以利分析^[5,11,12]。在固液两相流中,一般而言 Stokes 粘性阻力和压力梯度力是重要的,不能忽略。而 Basset 力 F_B 和广义升力 $F^{(1)}$ 的重要性则有争议,因此将它们与 Stokes 粗阻 F_D 进行量级比较是有意义的。现设颗粒相对运动加速度为常数并近似用其差分式表示:

$$\frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)}{dt} \approx \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_p}{t - t_0} = \text{const} \cdot$$

则有

$$\frac{F_B}{F_D} = \frac{D_p}{2\sqrt{\pi\nu(t-t_0)}} \int_{t_0}^t \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)/d\tau}{\sqrt{t-t_0}} d\tau \approx \frac{D_p}{\sqrt{\pi\nu(t-t_0)}}, \quad (4)$$

$$\frac{F_{LM}}{F_D} = \frac{\omega D_p^2}{24\nu}, \quad (5)$$

$$\frac{F_{SM}}{F_D} = 0.16 \sqrt{\frac{D_p \xi Re_p}{u - u_p}}. \quad (6)$$

讨论:

1) 由(4)式可见,当 $\frac{D_p}{\sqrt{\pi\nu(t-t_0)}} \geq \frac{1}{10}$ 时, Basset 力不可忽略,此时 $t \leq 30D_p^2/\nu$ 。对于工程实际中(如水利水电工程等)常见的固液两相流,可取特征参数 $D_p = 0.1 \text{ mm}$, $\nu = 1.792 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 则 $t \leq 0.16 \text{ s}$ 。若取特征流速 $U_p = 10.0 \text{ m/s}$, 则在 $t = 0.16 \text{ s}$ 时段内颗粒移动的特征距离为 1.6 m , 因此在一般稀疏固液两相流中, Basset 力不宜忽略。

2) 由(5)式得, $\frac{\omega D_p^2}{24\nu} \geq \frac{1}{10}$ 时, Magnus 力与 Stokes 阻力同量级。此时对于 $D_p = 0.05 \text{ mm}$ 的颗粒其旋转角速度 ω 必须满足 $\omega > 1730(1/\text{s})$, 作为初步分析, 设颗粒自旋转角速度不满足上述条件, 则可忽略 Magnus 升力。

3) 当 $\frac{D_p \xi Re_p}{u - u_p} \geq 1.0$ 时, Saffman 力与 Stokes 阻力同量级。此时 $\xi = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \geq \frac{\nu}{D_p^2}$, 对于 $D_p = 0.05 \text{ mm}$ 颗粒需 $\xi \geq 720(1/\text{s})$ 。这一条件只有在边界层区域才可能满足, 故在主流区域 Saffman 升力可以忽略。

2 任意流场中稀疏颗粒运动方程的一般形式

在一般流场条件下, 颗粒的相对运动不一定满足 Stokes 假设, 即可能存在颗粒特征雷诺数 $Re_p \gg 1$; 实际中固体颗粒并非球形, 而是具有很不规则的形状; 多个颗粒的存在将改变两相间的相互作用关系, 因此有必要针对各种流动条件对相间作用力予修正。在通常的粒径范围内, 压力梯度力对颗粒特征雷诺数、颗粒形状等参数的变化相对而言不太敏感, 所以下面仅讨论广义阻力和广义升力的修正问题。

1. 高雷诺数下球形颗粒运动的广义阻力

目前研究得较的是单个球形颗粒在高颗粒雷诺数 (Re_p) 下广义阻力中的 Stokes 粘阻修正问题, 由于涉及到流动分离及尾流等复杂问题, 关于 Stokes 粘阻的修正公式非常之多, 这里只给出几个典型的修正公式。将(2)式中的 Stokes 阻力项改为下列形式:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho_f \pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \cdot \quad (7)$$

式中, $C_D = f(Re_p)$ 为 Stokes 阻力系数; $Re_p = \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p| D_p}{\nu}$ 为颗粒雷诺数. 对 Stokes 公式:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad (Re_p < 1),$$

Oseen 修正^[13]:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad (Re_p < 1),$$

龚国仁修正^[14]:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \cos \theta + 0.45 \sin \theta \quad (Re_p < 2500) \cdot$$

式中 θ 为小球绕流分离角. 一些研究者根据球体的标准阻力曲线提出了修正公式, 常用的为 Schiller 和 Nauman 修正^[15]:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687} \right) \quad (Re_p < 800) \cdot$$

关于高雷诺数下 Basset 力和附加质量力的修正较为少见, 仅有 Odar 等的实验修正^[16]:

$$\left. \begin{aligned} F_B &= C_B \cdot \frac{3}{2} D_p^3 \sqrt{\rho_f \pi \mu} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)/d\tau}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \\ C_B &= 1.92 + \frac{2.08}{(A_c + 1.0)^3}, \end{aligned} \right\} \quad (1 < Re_p < 100), \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} F_m &= C_m \cdot \frac{1}{12} \pi \rho_f D_p^3 \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)}{dt}, \\ C_B &= 2.1 + \frac{0.132}{(A_c + 0.12)}, \end{aligned} \right\} \quad (1 < Re_p < 100), \quad (9)$$

其中 $A_c = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)^2}{D_p |d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)/dt|}$.

2 任意形状颗粒运动的 Stokes 阻力

Brenner^[17]考虑了颗粒形状为椭球时的 Stokes 阻力修正问题, 其理论分析得到的修正式为:

$$\left. \begin{aligned} F_D &= K \cdot 3\pi \mu D_p (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \\ K &= \left\{ 0.75 \sqrt{\lambda_0^2 - 1} \left[\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1) \cos \lambda_0 \right] \right\}^{-1}, \\ \lambda_0 &= \frac{b}{c} = \left[\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right]^{-0.5} \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, a, b, c 分别为椭球体的垂直半轴长, 且满足关系式 $a^2 = b^2 + c^2$. 对于形状不规则的颗粒, Stokes 粘阻无理论解, 所以在理论上求其修正系数是极为困难的. 一个可能的途径是河流动力学中采用的办法^[18], 即考虑颗粒形状系数对阻力的影响, 这样可得颗粒 Stokes 粘阻的形状修正系数的一般表达式:

$$C_s = f(Re_p, \Lambda) = f_1(Re_p) f_2(\Lambda)$$

这里 Λ 为颗粒形状系数, 函数 $f(Re_p, \Lambda)$ 的值可由实验确定^[19].

3 多颗粒存在时颗粒运动的广义阻力

在稀疏固液两相流条件下, n 个颗粒作低雷诺数运动时的阻力问题, Happle 和 Brenner 较早进行理论研究^[17], 蔡树棠在研究含沙浓度对颗粒沉速的影响时曾考虑了这个问题^[20]. 本文受两相流连续介质模型和轨道模型分类方法的启迪, 结合泥沙运动力学中处理含沙水流阻力的做法, 不单独细微地考查颗粒群中各颗粒对流场的影响, 而是宏观考虑颗粒浓度使流体性质改变后对广义阻力的影响, 从而可使多颗粒存在时广义阻力的修正问题得以简化. 设固液两相形成一种新的混合物质, 其动力粘性系数与颗粒浓度有关. 对于任意单个固体颗粒(尤其是粗颗粒), 其运动相当于在这种新的混合物单相流场中的运动. 于是颗粒运动的广义阻力修正问题就转化为对流体动力粘性系数 μ 的修正问题, 且这种方法的修正结果适合于任何雷诺数情况. 根据 Tam^[21] 的统计计算及 Zuber^[22] 的研究成果, 实际两相混合物的等效动力粘性系数可表示为:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu \cdot \exp\left(\frac{2.5\alpha_p}{1 - S\alpha_p}\right). \quad (11)$$

式中, α_p 为颗粒相浓度, S 为纯系数且 $1.35 < S < 1.95$. 当 α_p 很小时, (11) 式可简化为 Einstein 公式

$$\mu_{\text{eff}} = \mu(1 + 2.5\alpha_p).$$

4. 高颗粒雷诺数和颗粒群条件下广义升力的修正

关于高雷诺数 (Re_p) 下颗粒自旋时所受的 Magnus 升力 F_{LM} , Tsuji^[23] 的实验研究建议引入如下修正系数:

$$\left. \begin{aligned} F_{LM} &= C_{LM} \cdot \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{D_p}{2}\right)^2 | \mathbf{u} - \mathbf{u}_p | (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p), \\ C_{LM} &= 0.2 D_p \omega / (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对于 Saffman 升力在高雷诺数下的情况, R. Mei^[24] 提出了用于数值计算时的修正结果:

$$\left. \begin{aligned} F_{LS} &= C_{LS} \cdot K_s \mu D_p^2 \left(\frac{\xi}{v}\right)^{0.5} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p), \\ C_{LS} &= \begin{cases} (1 - 0.3314\alpha^{0.25}) \exp(-Re_p/10) + 0.3314\alpha^{0.25} & (Re_p \leq 40), \\ 0.0524(\alpha \cdot Re_p)^{0.5} & (Re_p > 40), \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中, $\alpha = D_p^2 \xi / (\nu Re_p)$. 对于颗粒群的情形, 可以采用前述修正广义阻力时的处理办法, 在上述广义升力的各计算式中用 μ_{eff} 、 v_{eff} 代替 μ 、 v 进行运算, 从而获得对广义升力的修正.

综上所述相间作用力的分析和修正结果, 再计入外势力 f 的作用, 可以得到任意流场中任意形状稀疏颗粒运动方程的一般形式, 经简单整理并用矢量形式表示即^[7]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} &= \left[1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right] \mathbf{f} + \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + C_D \frac{3\rho_f}{4\rho_s D} | \mathbf{u} - \mathbf{u}_p | (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + \\ &C_m \frac{\rho_f}{2\rho_s} \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)}{dt} + \frac{9C_B}{\rho_s D} \sqrt{\frac{\rho_f \mu_{\text{eff}}}{\pi}} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)/d\tau}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + \\ &C_{LM} \frac{3\rho_f}{4\rho_s D} | \mathbf{u} - \mathbf{u}_p | (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + C_{LS} \frac{6K_s \mu}{\rho_s \pi D} \left(\frac{\xi}{v}\right)^{0.5} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p). \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式中考虑的因素比较全面, 因而具有较为广泛的适用性. 此外, 对上式中的求导数符号

$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ 和 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 应加以区别:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

是颗粒形心处未扰流中流体的加速度; 而

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_p \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

则是以颗粒运动速度迁移的流体质点的加速度。二者之间的关系为:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \cdot \nabla]\mathbf{u}$$

3 稀疏颗粒运动方程的数理性质及其解析

由(14)式可见,一般形式的稀疏颗粒运动方程是一非线性的微分积分方程,在方程的各阶导数项和积分项的系数中也含有未知变量及其一阶导数,因此理论上求解是很困难的,一般只能求其数值解,为了获得该方程性质的解析逼近,同时为直接求解该方程的数值解法提供必要的解析标准,以下讨论(14)式所对应的线性方程的性质,即设在(14)式中以下假定成立:

1) Stokes 粘阻和广义升力的修正系数 C_D 、 C_{LS} 和 C_{LM} 均与颗粒相对速度的绝对值的一次方成反比;

2) 附加质量力和 Basset 力的修正系数 C_m 和 C_B 为常数,并令 $C_m = C_B = 1.0$;

3) $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \frac{d\mathbf{u}}{dt}$.

当球体颗粒运动的特征雷诺数 $Re_p < 1$ 时,上述条件自动满足,而且对于(14)式的任一坐标方向分量形式,广义升力可以看作常量,它的取舍不会影响方程的数学性质。因此可取 $Re_p < 1$ 时(14)式相应的分量形式进行分析,即

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} = & \left[1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right] f + \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{du}{dt} + \frac{18\mu_{\text{eff}}}{\rho_s D_p^2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + \frac{\rho_f}{2\rho_s} \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)}{dt} + \\ & \frac{9}{\rho_s D_p} \sqrt{\frac{\rho_f \mu_{\text{eff}}}{\pi}} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)/d\tau}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

令 $W = \mathbf{u} - \mathbf{u}_p$, 将(15)式整理成以颗粒相对运动速度表示的形式:

$$\frac{dW}{dt} = -A_1 f + A_2 \frac{du}{dt} - A_1 W(t) \Big|_{t=0} + \int_0^t \left[\frac{A_3}{\sqrt{t - \tau}} - A_1 \right] \frac{dW}{d\tau} d\tau, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{36\nu_{\text{eff}}}{(2k + 1)D_p^2}, \quad A_2 = -\frac{2(k - 1)}{2k + 1}, \\ A_3 = & -\frac{18}{(2k + 1)D_p} \sqrt{\frac{\nu_{\text{eff}}}{\pi}}, \quad k = \frac{\rho_s}{\rho_f}. \end{aligned}$$

若把 dW/dt 视为因变量,则根据数学积分方程理论^[25], (16)式属于典型的第二类涅尔特拉积分方程。因而当 du/dt 为区域 $[0, t]$ 上的连续函数时, (16)式的解存在且唯一。第二类涅尔特拉方程的求解有二种方法,一种是通过将未知函数展开为幂级数,代入原方程逐项积分并比较方程两边同类项系数,逐次求得幂级数的各项基函数,从而得到方程的逼近解。另一种就是 Laplace 积分变换法,我们将采用后者对(16)式进行解析。

为便于分析,将方程(16)式量纲一化^[26]。令 $t^* = A_1 t$, 对 u 、 W 和 f 分别用单位速度和单位外势力作量纲一化,略去量纲一标记“*”后, (16)式变为:

$$\frac{dW}{dt} + W = -\frac{A_2}{A_1} f + A_2 \frac{du}{dt} + A_4 \int_0^t \frac{dW/d\tau}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad (17)$$

式中, $A_4 = \frac{A_3}{\sqrt{A_1}} = -\frac{3}{\sqrt{\pi(2k+1)}}$. 在(17)式两边作 Laplace 变换得:

$$sW - W_0 + W = A_2(su - u_0) + A_4 \sqrt{\pi} s (sW - W_0) - \frac{A_2}{A_1 s} f,$$

其中 W, u, f 分别表示 W, u 和 f 的拉氏变换象函数, 而 W_0, u_0 则是 W, u 的初值. 将上式整理可写成:

$$W = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{\sqrt{s-a}} - \frac{1}{\sqrt{s-b}} \right] \left[W_0 + A_2 u_0 + A_2 s u - A_4 W_0 \sqrt{\frac{\pi}{s}} - \frac{A_2}{A_1 s} f \right], \quad (18)$$

式中

$$a = \frac{1}{2} (A_4 \sqrt{\pi} + \sqrt{A_4^2 \pi - 4}) = \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{\sqrt{2k+1}} + \sqrt{\frac{-8k+5}{2k+1}} \right],$$

$$b = \frac{1}{2} (A_4 \sqrt{\pi} - \sqrt{A_4^2 \pi - 4}) = \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{\sqrt{2k+1}} - \sqrt{\frac{-8k+5}{2k+1}} \right].$$

对于固液两相流而言, 一般 $k = \frac{\rho}{\rho_f} > \frac{5}{8}$, 故 a, b 是共轭的两个复数. 将(18)式作 Laplace 逆变换, 并利用卷积定理^[25]可得到:

$$\left. \begin{aligned} W &= -\frac{A_2}{A_1} f + 2\operatorname{Re} \left\{ (N + M) e^{a^2 t} \right\}, \\ N &= \frac{b}{a-b} \operatorname{erfc}(-a\sqrt{t}) \left[W_0 + \frac{A_2}{A_2} f \right], \\ M &= \frac{A_2 a}{a-b} \int_0^t e^{-a^2 \tau} \operatorname{erfc}(-a\sqrt{t-\tau}) \frac{du}{d\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中 $\operatorname{erfc}(x)$ 为误差函数:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\theta^2} d\theta.$$

(19)式即低雷诺数下量纲一化的稀疏颗粒运动方程的理论解. 从式中可见, 当流场结构 $u(t), du/dt$ 已知时, 稀疏颗粒的运动原则上已可由(19)式求解. 但因(19)式中包含有复变量误差函数这样一个特殊函数和对它的复积分, 比较难于分析其性质, 一般情况下需供助于数值积分运算获得颗粒速度随时间的变化关系. 从(19)式的表象上看, 参数 a^2 的实部对颗粒运动有重要影响^[26], 即

$$\operatorname{Re} \left\{ a^2 \right\} = \frac{1}{2} \pi A_4^2 - 1 = \frac{7-4k}{2(2k+1)}.$$

于是固液两相的密度比 k 成为影响颗粒运动特性的重要参数. 当 $k < 1.75$ 时, 颗粒运动速度将以振荡方式随时间增至无穷大; 当 $k > 1.75$ 时, 颗粒绝对运动速度将以衰减振动或单调指数衰减形式无限接近流体运动速度或某一稳定值; 当 $k = 1.75$ 时, 颗粒运动速度随时间作简谐振动. 应该指出, 以上关于密度比 k 的分析结果成立的前提条件是, 在(19)式中当 $t \rightarrow \infty$ 时 $e^{-a^2 t}$ 必须是比 $(M + N)$ 高阶的无穷小. 由于(19)式中复变量误差函数以及它的复积分的性质尚不明确, 所以这一条件是否成立有待深入研究. 当 $k \leq 1.75$ 时颗粒将随时间谐振或作增幅振动的性质, 在物理上也较难解释, 对此后文还将进一步讨论. 以下将针对几种待定的流场计算颗粒速度随时间的变化关系, 并讨论外势力、初始速度、流场结构和颗粒物理性质(粒径和密度)对颗粒运动的影响.

1. 静止或均匀流场中稀疏颗粒的运动

在定常均匀流条件下, $du/dt = 0$, 则在(19) 式中 $M = 0$ 。计算中取: $f = 9.81\text{m/s}^2$, $W_0 = 0.01\text{m/s}$, $\mu = 1.719 \times 10^{-3}\text{N} \cdot \text{s}$, $\nu = 1.72 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, $\rho_f = 9.9978 \times 10^2\text{kg/m}^3$, $\rho_s = 2.65 \times 10^3\text{kg/m}^3$, 以及 $D_p = 0.1\text{mm}$ 作为各参数的基本值, 然后改变其中一个或几个参数, 所得计算结果如图1~ 图4 所示。

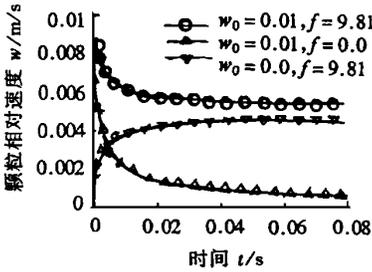


图1 外势力及初始速度作用下颗粒相对速度随时间的变化关系

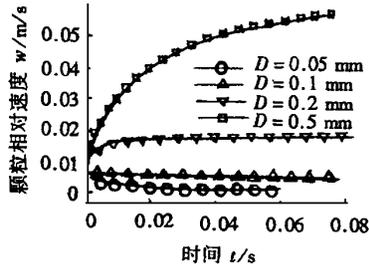


图2 不同粒径颗粒相对速度随时间的变化关系

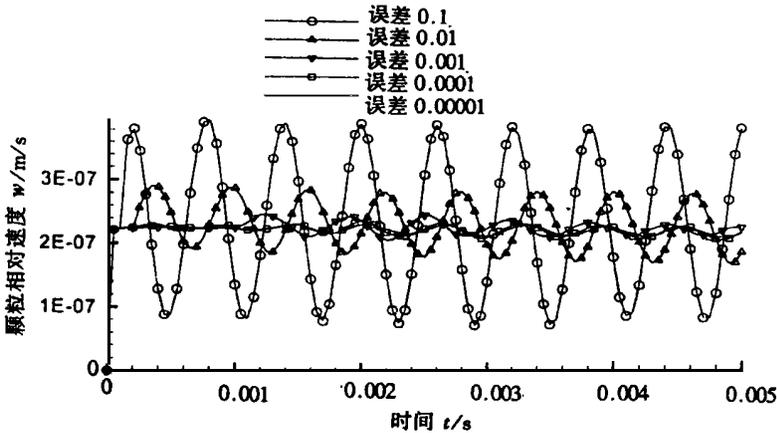
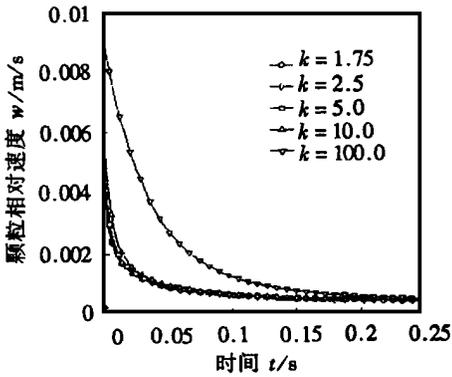


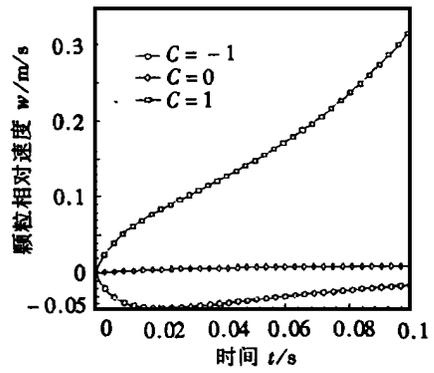
图3 不同计算精度下颗粒相对速度随时间的变化关系

由图1 可见, 在外势力及初始相对速度的作用下, 颗粒相对运动速度随时间以指数方式趋于零和某一稳定的极限速度。图2 表示不同粒径颗粒的运动速度随时间的变化关系, 小粒径颗粒的弛豫时间较短, 能较快衰减与流体的相对速度差, 而大粒径颗粒则弛豫时间较长且受外势力影响较大, 能造成大的相对速度。图4 示出了不同密度比时的颗粒运动特性, 可见密度比 k 愈小颗粒对充体的跟随性愈好。特别的, 对 $k \leq 1.75$ 情形的计算表明, 如果计算精度越高, 颗粒速度与时间关系曲线出现谐振的特征时间越拖后, 而且振幅也越小并趋于零, 图3 示出了 $k = 1.75$ 时不同计算精度下的颗粒运动速度与时间关系曲线。这个结果说明, 当 $k \leq 1.75$ 时颗粒速度不会随时间谐振或作增幅振动, 固液两相的密度比 k 对颗粒运动特性的影响不是特别关键的参数, 这一点与文献[26] 的结论颇为不同。



$(w_0 = 0.01, f = 9.81, p_s = 2650)$

图4 不同密度比下颗粒相对速度随时间的变化关系



$(d = 0.5\text{mm}, p_s = 2650)$

图5 非恒定加速流中颗粒相对速度随时间的变化关系

2 非定常流场中稀疏颗粒的运动

对于颗粒在速度随时间单调变化的流场中的运动, 现以 du/dt 等于常数的匀加速运动流场或 du/dt 随时间呈指数规律变化的流动为代表进行研究, 即设

$$u = e^{ct} + t$$

其中, c 为常数且当 $c = 0$ 时 $du/dt = 1$ 。将上式代入(19) 式中进行计算, 所得结果如图 5 所示。可见颗粒对匀加速流尚有一定的跟随能力, 而在呈指数规律随时间变化的流场中, 颗粒与流体间相对运动速度随时间的变化呈指数规律, 表明在变加速流中固液两相存在较大的速度滑移。

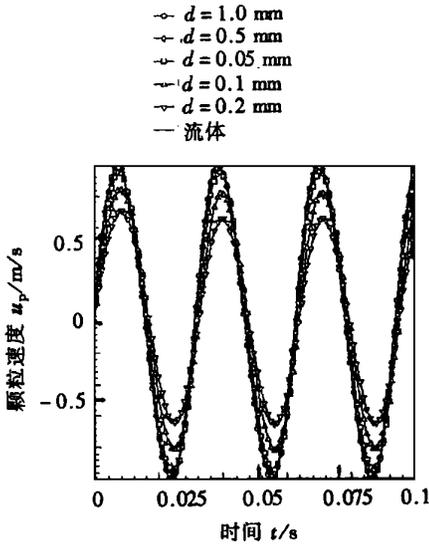


图6 不同粒径的颗粒运动速度随时间的变化关系

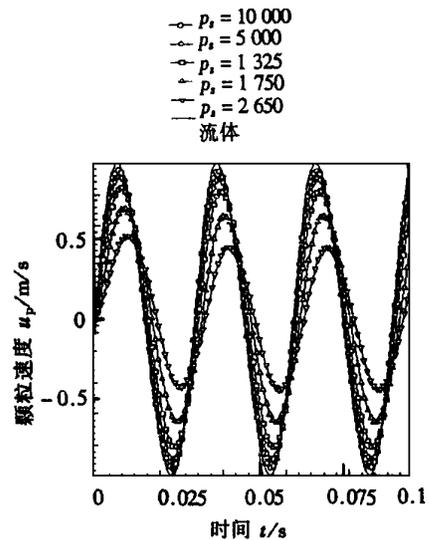


图7 不同密度的颗粒运动速度随时间的变化关系

对于振荡流场, 可设 $u = \sin(nt)$, 改变颗粒粒径和密度, 相应的计算结果如图 6 和图 7 所

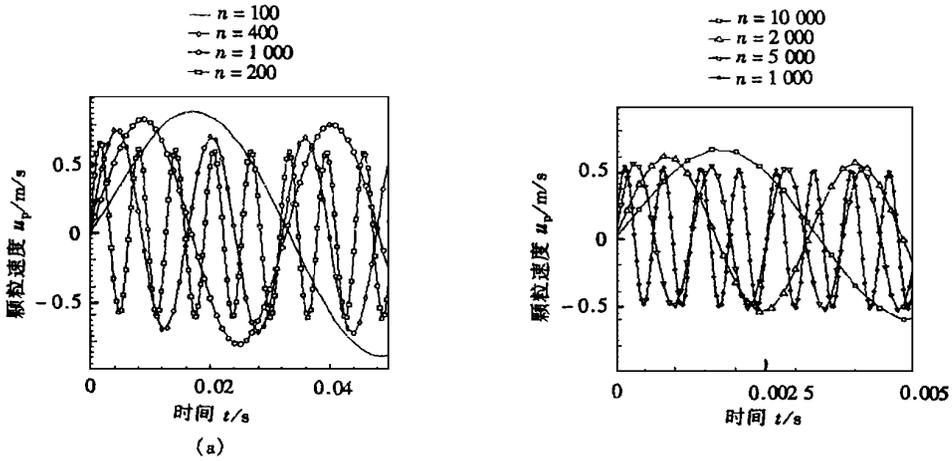


图8 不同频率的振荡流场中颗粒速度随时间的变化关系*

示。从图中可见,颗粒在谐振流场中亦作振荡运动。随着粒径和密度的增大,颗粒运动速度的振幅逐渐减小,相位滞后逐渐变大,这说明粒径或密度大的颗粒与流体的速度滑移较大。比较图6和图7的结果还可见,颗粒密度变化对上述颗粒运动特性的影响较之粒径变化的影响更大。颗粒对不同频率振荡流场的响应特性如图8和图9所示的计算结果*。由图8(a)和图8(b)可见,随着流场振荡频率的增加,颗粒运动速度的振幅是逐渐减小的,图9给出了颗粒速度振幅随流场谐振频率的增加而衰减的关系。这一计算结果定理地表明,固体颗粒对流场高频分量的作用不太敏感。

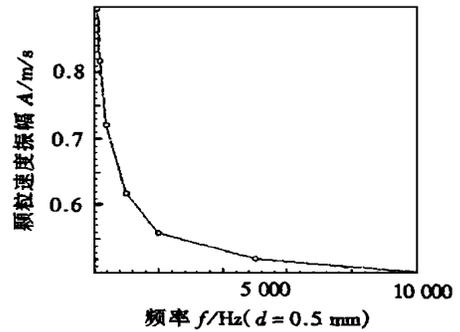


图9 颗粒速度振幅与频率的关系*

如果进一步考虑到流体高频脉动分量的幅值一般较小,则可以认为固体颗粒在任意流场中的运动不受其中高频脉动分量的影响。

4 结 论

本文对任意流场中稀疏颗粒的运动特性进行了比较详细的分析,得到的主要研究结果为:

1) 将稀疏颗粒运动的受力进行归纳并提出广义阻力和广义升力的概念,对广义阻力和广义升力所作的量级比较表明,固液两相流中 Basset 力一般是重要的,不宜忽略不计,而 Saffman 和 Magnus 力则可有条件省略。

2) 分析了各种流动条件下稀疏固液两相流的相间作用力的修正问题,给出了主要的修正公式及各自的适用范围。在此基础上得到了任意流场中稀疏颗粒运动方程的一般形式,该模

* 注:图8~图9中高频情形下的结果为数值计算方法所得,特此说明。

型具有比较广泛的适用性。

3) 在低颗粒特征雷诺数下, 相应的颗粒运动方程在数学上属于第二类涅尔特拉积分方程, 用 Laplace 变换法求得了该方程的解析解。

4) 计算表明, 颗粒的粒径和密度对固液两相的相对速度有重要影响。颗粒粒径和密度愈大, 速度差愈大; 但固液两相的密度比则不存在特定的临界值使得颗粒运动特性在其附近发生根本变化, 即在定常均匀流场中, 当 $k \leq 1.75$ 时颗粒速度不会随时间谐振或作增幅运动。

5) 在非定常流场条件下, 颗粒对匀加速流尚有一定的跟随性, 变加速流中颗粒和流体的滑移速度较大。对于振荡流场情形, 颗粒密度变化比粒径变化对其运动特性的影响更大; 流场的高频脉动分量对固体颗粒运动特性的影响通常可以不予考虑, 或固体颗粒对高频脉动流体的跟随性较差。

[参 考 文 献]

- [1] Hinze J O. Turbulence [M]. New York: 2nd, McGraw-Hill Book Co. 2nd, 1975.
- [2] Maxey M R, Riley J J. Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow [J]. Phys Fluids, 1983, 26(4): 883~ 889.
- [3] Gousbet G, Berlement A, Picart A. Dispersion of particles by continuous turbulent motions. Extensive discussion of the Chen's theory, using a two-parameter family of Lagrangian correlation functions [J]. Phys Fluids, 1984, 27(4): 827~ 837.
- [4] Lazaro B J, Lasheras J C. Particles dispersion in a turbulent, plane, free shear layer [J]. Phys Fluids, 1989, A1(6): 1035~ 1044.
- [5] Tio K, Gana_Calvo A M, Lasheras J C. The dynamics of small, heavy, rigid spherical particles in a periodic Stuart vortex flow [J]. Phys Fluids, 1993, A5(7): 1679~ 1693.
- [6] 易家训. 流体力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [7] 黄社华. 固液两相运动理论及水力机械泥沙磨损的研究 [D]. 武汉: 博士学位论文, 华中理工大学博士学位论文, 1995.
- [8] 黄社华, 李炜, 程良骏. 任意流场中稀疏颗粒运动方程的数值解法及其应用 [J]. 水动力学研究与进展, A辑, 1999, 14(1): 51~ 62.
- [9] 刘大有. 两相流体动力学 [M]. 工程力学丛书, 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [10] Saffman P G. Corrigendum [J]. J Fluid Mech, 1968, 32.
- [11] Hamed A. Particle dynamics of inlet flow fields with swirling vanes [J]. J of Aircraft, 1982, 19(9): 707~ 712.
- [12] Beacher B et al. Improved particles trajectories calculations through turbomachinery affected by coal ash particles [J]. J of Engineering for Power, 1982, 104(1): 64~ 68.
- [13] 怀特, F M [美]. 粘性流体动力学 [M] (魏中磊, 甄恩森译). 北京: 机械工业出版社, 1982.
- [14] 窦国仁. 紊流力学 [M] (下册). 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [15] 岑可法, 樊建人. 工程气固多相流动的理论及计算, 杭州: 浙江大学出版社, 1990.
- [16] Odar F. Verification of the proposed equation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid [J]. J Fluid Mech, 1966, 25(3): 591~ 592.
- [17] Happel J, Brenner H. Low Reynolds Number Hydrodynamics, [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1965.
- [18] 谢鉴衡. 河流泥沙工程学 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1980.
- [19] 钱宁, 万兆惠. 泥沙运动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [20] 蔡树棠. 泥沙在静水中的沉淀运动, (I) 含沙浓度对沉速的影响 [J]. 物理学报, 1956, 12(5): 409~ 418.
- [21] Tam C K W. The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow [J]. J Fluid Mech,

1969, **38**(4): 537~ 546.

- [22] Zuber N. On the dispersed two phase flow in the laminar flow region[J]. *Chen Eng Scien* , 1964, **19**(4): 897~ 917.
- [23] Tsuji Y et al. Experiment measurement of Magnus forces on a rotating shere at low Peynolds[J]. *Trans ASME J Fluid of Eng*, 1985, **107**(4): 484~ 488.
- [24] Mei R. An approximate expression for the shear lift force of a spherical particle at finite Reynolds number [J]. *Int J Multiphase Flow* , 1992, **18**(1): 145~ 148.
- [25] 汪胡楨编. 现代工程数学手册[M]. 第一卷, 武汉: 华中工学院出版社, 1985.
- [26] 沈钧涛, 陈十一. 球形粒子在流体中的跟随性[J]. *空气动力学学报*, 1989, **17**(1): 50~ 58.

On Equation of Discrete Solid Particles' Motion in Arbitrary Flow Field and Its Properties

Huang Shehua^[1, 2], Li Wei¹, Cheng Liangjun³

(1. Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan 430000, P R China ;

2. State Koy Lab for Turbulence Research, Peking University, Beijing 100871, P R China ;

3. Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430000, P R China)

Abstract: The forces on rigid particles moving in relation to fluid having been studied and the equation of modifications of their expressions under different flow conditions discussed, a general form of equation for discrete particles' motion in arbitrary flow field is obtained. The mathematical features of the linear form of the equation are clarified and analytical solution of the linearized equation is gotten by means of Laplace transform. According to above theoretical results, the effects of particles' properties on its motion in several typical flow field are studied, with some meaningful conclusions being reached.

Key words: solid liquid two phase flow; discrete particles' motion equation; discrete solid porticles; Laplace transform