

文章编号: 1000-0887(2000) 03-0245-08

胶体有效粘滞系数的理论研究^{*}

顾国庆¹, 余建华²

(1. 上海理工大学 计算机工程学院, 上海 200093; 2. 香港中文大学 物理系, 香港 新界 沙田)

(戴世强推荐)

摘要: 胶体是自然界和工业应用中的常见对象。胶体领域的一个中心理论问题是如何根据胶体系统的微结构来确定胶体的流变性质。由于处理多粒子系统边值问题的困难, 现有的胶体理论都局限于低颗粒浓度。该文中发展了变换场方法, 用该方法可以计算含胶体颗粒的不可压缩粘滞流体的有效粘滞系数, 颗粒可以是固体也可以是流体。在低颗粒浓度, 该理论预测与爱因斯坦关于悬浮体的公式以及 Taylor 关于乳浊液的公式完全吻合。在高颗粒浓度, 该文的结果与 Nunan 和 Keller 的结果相一致, 其方法可以用于预测非球形颗粒悬浮体的有效粘滞系数。

关键词: 多相流; 胶体; 悬浮体; 乳浊液

中图分类号: O359 文献标识码: A

引 言

胶体的流变学性质在许多物理学和工程问题上具有重要意义。因此人们对于胶体系统, 尤其是能以线性化的 Navier-Stokes 方程处理的胶体系统进行了广泛的研究^[1-3]。胶体可以分为两类, 即悬浮体和乳浊液^[2,4]。悬浮体是细小的固体颗粒悬浮在流体中形成的分散体。当一种流体颗粒悬浮在另一种流体中则形成乳浊液。胶体领域中的一个重要问题是确定胶体的有效粘滞系数。本文的目的就是研究这一问题。

胶体的有效粘滞系数明显地依赖于颗粒的浓度和形状。但是, 目前人们关于胶体有效粘滞系数和浓度的依赖关系的知识基本上局限于低浓度下的球形颗粒悬浮体。在这一问题上的第一个工作是由爱因斯坦作出的^[5]。在忽略流体力学相互作用的条件下, 爱因斯坦计算了球形固体颗粒悬浮体的有效粘滞系数 μ^* 。在颗粒体积的一级近似下, 有效粘滞系数的公式为

$$\mu^* = \mu^s \left(1 + \frac{5}{2} \phi \right), \quad (1)$$

其中 ϕ 是颗粒的体积分数, μ^s 是溶剂的粘滞系数。Taylor 把这一结果对球形颗粒的乳浊液作了推广^[4]。要计算体积分数的二阶项, 就必须处理流体力学的二粒子相互作用。对于球形固体颗粒的悬浮体, 有些作者计算的有效粘滞系数中包含了流体力学的二粒子相互作用^[6,7,8]。但是, 迄今还未把 Taylor 的结果推广到包含二粒子相互作用。

为了确定高颗粒浓度胶体的有效粘滞系数, 必须考虑胶体中所有悬浮颗粒之间的相互作

* 收稿日期: 1998_10_06; 修订日期: 1999_11_08

基金项目: 国家自然科学基金项目(19834070)

作者简介: 顾国庆(1949-), 男, 博士, 研究员。

用。对于两个以上球形颗粒,我们必须把问题作一定的简化才能求解流体力学方程。例如,有些作者把悬浮体作为两种流体的混合物,其中的一种流体的粘滞系数为无穷大^[6,9,10]。瑞利在研究静电问题时,为了计算复合介质的有效电导引进了周期模型。结果能以很直接的方式考虑颗粒之间的相互作用^[11]。Nunan 和 Keller 把瑞利模型和处理感应多极子的技术相结合,对较高颗粒浓度的球形颗粒悬浮体,计算了有效粘滞系数^[12]。不过 Nunan 和 Keller 的方法很难推广用于乳浊液和非球形颗粒悬浮体。本文中把变换场方法推广用于流体力学的多粒子问题,建立了确定胶体中应变率张量的积分方程^[13,14]。利用这一方法,在较高浓度上计算乳浊液的有效粘滞系数并不比计算悬浮体的有效粘滞系数困难,而且也有可能确定非球形颗粒胶体的有效粘滞系数。

1 积分方程

我们先定义分散体的流动特征。本文中研究的胶体由两种不可压缩牛顿流体构成。颗粒和基质流体(溶剂)的粘滞系数分别为 μ^d 和 μ^s 。整个系统作定态运动。假设颗粒分布在周期点阵上,颗粒表面无表面张力。颗粒的半径为 R 。元胞的体积为 V 。我们分别用上标 d 和 s 记颗粒区域 Ω_d 和溶剂区域 Ω_s 中的量。对于 $\mu^d \rightarrow \infty$, 该胶体系统就是悬浮体,当 $\mu^s = 0$ 时,就是含气泡的乳浊液。

计算胶体系统的有效粘滞系数需要确定该系统中的应变率张量。应变率张量的定义为,

$$E_{\gamma\eta} = \frac{1}{2}(\partial_\gamma v_\eta + \partial_\eta v_\gamma). \quad (2)$$

为了计算有效粘滞系数,对胶体施加一均匀应变率张量 $E_{\alpha\beta}^0$ 。颗粒或溶剂中的总应力率张量可以写为,

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = E_{\alpha\beta}^0 + E_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

其中 $E_{\gamma\eta}(\mathbf{x})$ 是颗粒引起的扰动项。我们对希腊指标采用重复指标求和的规则。对于牛顿流体,附加应力率和应变率之间存在着线性关系:

$$\sigma_{\alpha\beta}^d = \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^d (E_{\gamma\eta}^0 + E_{\gamma\eta}) \quad (\text{在 } \Omega_d \text{ 区域}), \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^s (E_{\gamma\eta}^0 + E_{\gamma\eta}) \quad (\text{在 } \Omega_s \text{ 区域}), \quad (5)$$

$\mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^p$ ($p = d$ 或 s) 是粘滞张量。牛顿流体的粘滞张量是:

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^p = \mu^p \left[\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] \quad (p = d, s). \quad (6)$$

在不同相之间的界面上拟合边界条件是极为困难的。引进一个变换场可以消除这一困难^[13,14]。引进应变率张量的变换场

$$E_{\alpha\beta}^* = 0 \quad (\text{在 } \Omega_s \text{ 区域}), \quad (7)$$

方程

$$\mu_{\alpha\gamma\eta}^s (E_{\gamma\eta}^0 + E_{\gamma\eta} - E_{\gamma\eta}^*) = \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^d (E_{\gamma\eta}^0 + E_{\gamma\eta}) \quad (\text{在 } \Omega_d \text{ 区域}), \quad (8)$$

就能够满足。于是我们在附加应力率张量和应变率张量之间建立了一个统一的本构方程:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^s (E_{\gamma\eta}^0 + E_{\gamma\eta} - E_{\gamma\eta}^*) \quad (\text{在 } \Omega = \Omega_d + \Omega_s \text{ 区域}). \quad (9)$$

低雷诺数的牛顿流体服从斯托克斯方程:

$$\partial_\alpha (v_\alpha + v_\alpha^0) = 0, \quad (10)$$

$$\partial_\alpha (- (p^0 + p) \delta_{\beta\alpha} + \sigma_{\alpha\beta}) = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3) \quad (11)$$

其中 \mathbf{v}^0 和 \mathbf{p}^0 是相应于外加均匀应变率的速度场和压力场。由于均匀外加场是斯托克斯方程的解, 把它从方程(10) 和(11) 中减去有,

$$\partial_\alpha v_\alpha = 0, \tag{12}$$

$$\partial_\alpha (-p \delta_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^s (E_{\gamma\eta} - E_{\gamma\eta}^*)) = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3). \tag{13}$$

方程(12) 和(13) 中的所有量都是空间点阵的周期函数, 因此可以对它们作 Fourier 变换。例如, 速度场和应变率的变换场的 Fourier 分量分别为,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}), \tag{14}$$

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}). \tag{15}$$

它们的逆变换为,

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = V^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{16}$$

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\boldsymbol{\xi}) = V^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是倒格矢:

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\frac{2\pi n_x}{l_x}, \frac{2\pi n_y}{l_y}, \frac{2\pi n_z}{l_z} \right].$$

以同样的方式我们可以得到 $\mathbf{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ 和 p 的 Fourier 分量。把这些 Fourier 分量代入斯托克斯方程(12) 和(13) 就得到一组方程:

$$\boldsymbol{\xi} v_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = 0, \tag{18}$$

$$i\boldsymbol{\xi}_\beta p(\boldsymbol{\xi}) - 2\mu^s \boldsymbol{\xi}^2 v_\beta(\boldsymbol{\xi}) + 2i\boldsymbol{\xi}_\alpha \mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3). \tag{19}$$

解方程(18) 和(19), 我们得到,

$$p(\boldsymbol{\xi}) = -2\mu^s \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\beta \mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\boldsymbol{\xi}) / \boldsymbol{\xi}^2, \tag{20}$$

$$v_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = 2i(\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\beta \mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\boldsymbol{\xi}) / \boldsymbol{\xi}^2 - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^*(\boldsymbol{\xi}) / \boldsymbol{\xi}^2), \tag{21}$$

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}) = ((\mathbf{E}_{\alpha\gamma}^*(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}_\beta + \mathbf{E}_{\beta\gamma}^*(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}_\alpha) \boldsymbol{\xi}_\gamma - 2\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\beta \boldsymbol{\xi}_\gamma \mathbf{E}_{\gamma\delta}^*(\boldsymbol{\xi}) / \boldsymbol{\xi}^2) / \boldsymbol{\xi}^2. \tag{22}$$

把(20) ~ (22) 代入方程(8) 就得到积分方程:

$$-\mathbf{E}_{\alpha\beta}^0 + \frac{\mu^s}{\mu^s - \mu^d} \mathbf{E}_{\alpha\beta}^* = V^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{-2} ((\mathbf{E}_{\alpha\gamma}^*(\mathbf{x}') \boldsymbol{\xi}_\beta + \mathbf{E}_{\beta\gamma}^*(\mathbf{x}') \boldsymbol{\xi}_\alpha) \boldsymbol{\xi}_\gamma - 2\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\beta \boldsymbol{\xi}_\gamma \mathbf{E}_{\gamma\delta}^*(\mathbf{x}') / \boldsymbol{\xi}^2) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) d\mathbf{x}, \tag{23}$$

由此方程可以确定胶体的应变率张量。

2 有效粘滞张量

在远大于颗粒半径的尺度上, 胶体的行为象一种均匀流体, 该流体的粘滞系数既不同于颗粒的粘滞系数也不同于溶剂的粘滞系数。胶体有效粘滞系数的定义是,

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^* \langle \mathbf{E}_{\gamma\eta}^0 + \mathbf{E}_{\gamma\eta} \rangle = \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^s \langle \mathbf{E}_{\gamma\eta}^0 + \mathbf{E}_{\gamma\eta} - \mathbf{E}_{\gamma\eta}^* \rangle, \tag{24}$$

尖括号表示在元胞上取平均,

$$\langle A \rangle = V^{-1} \int_{\Omega} A d\mathbf{x}.$$

由速度场的周期性质可以推得 $\langle E_{y\delta} \rangle = 0$ 。由于这一结果有效粘滞系数的公式简化为:

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^* E_{\gamma\eta}^0 = 2 \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^s (E_{\gamma\eta}^0 - \langle E_{\gamma\eta}^* \rangle) \quad (25)$$

不难证明有效粘滞张量关于它的指标具有如下的对称性质:

$$[i] \quad \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^* = \mu_{\gamma\eta\alpha\beta}^* \quad (26)$$

$$[ii] \quad \mu_{\alpha\beta\gamma\eta}^* = \mu_{\alpha\beta\eta\gamma}^* \quad (27)$$

$$[iii] \quad \mu_{\gamma\eta\alpha\beta}^* = 0 \quad (\text{对于 } \alpha \neq \beta) \quad (28)$$

由于 $E_{\alpha\alpha} = 0$, 应变率张量应为 $(\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}^*, \mu_{\alpha\beta\gamma\gamma}^*, \mu_{\alpha\beta\delta\delta}^*)$, 而且由 $(\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}^* + a_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta\gamma\gamma}^* + a_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta\delta\delta}^* + a_{\alpha\beta})$ 可以得到同一个附加应力率张量, 因此这两组应变率张量是等价的。按照习惯的做法, 取

$$\mu_{iiii}^* = \mu_{iiii}^s = \frac{4}{3} \mu^s \quad (i = 1, 2, 3) \quad (29)$$

就可消去有效粘滞系数定义中的歧义性。积分方程(23)中的未知函数正好能够唯一地确定余下的有效粘滞张量的分量。

对于正交系, 有效粘滞张量关于它的指标有附加的对称性质。为了继续讨论和计算, 我们把应变率的变换场张量作幂级数展开,

$$E_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} C_{\alpha\beta}^{ijk} \left(\frac{x}{l_x} \right)^i \left(\frac{y}{l_y} \right)^j \left(\frac{z}{l_z} \right)^k \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (30)$$

把它代入积分方程(23), 结果得到一个矩阵方程:

$$\begin{aligned} - E_{\alpha\beta}^0 \bar{y}^k + \frac{\mu^s}{\mu^d} \sum_{i,j,k=0}^{\infty} A^{i+p, j+q, k+r} C_{\alpha\beta}^{ijk} = \\ V^{-1} \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G^{jk}(\xi) ((C_{\alpha\gamma}^{pq} \xi_{\beta} + C_{\beta\gamma}^{pq} \xi_{\alpha}) \xi_{\gamma} - \\ 2 \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \xi_{\gamma} C_{\gamma\delta}^{pq} / \xi^2) G^{pq}(-\xi) / \xi^2, \end{aligned} \quad (31)$$

其中,

$$A^{jk} = \int_{\Omega_d} \left(\frac{x}{l_x} \right)^i \left(\frac{y}{l_y} \right)^j \left(\frac{z}{l_z} \right)^k d\mathbf{x}, \quad (32)$$

$$G^{jk}(\xi) = \int_{\Omega_d} \left(\frac{x}{l_x} \right)^i \left(\frac{y}{l_y} \right)^j \left(\frac{z}{l_z} \right)^k \exp(i \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (33)$$

对于具有正交对称性的胶体, 我们有

$$A^{jk} = 0, \quad (\text{若 } i, j \text{ 或 } k = d), \quad (34)$$

而且 $G^{jk}(\xi)$ 关于它的宗量具有如下的对称性质,

$$\begin{aligned} G^{ijk}(-\xi, -\xi, -\xi) = (-1)^i G^{ijk}(\xi, -\xi, -\xi) = \\ (-1)^j G^{ijk}(-\xi, \xi, -\xi) = \\ (-1)^k G^{ijk}(-\xi, -\xi, \xi). \end{aligned} \quad (35)$$

其中 d 表示奇数, 偶数分量将用 e 标记。根据正交系统 A^{ijk} 和 $G^{jk}(\xi)$ 的对称性质, 经过仔细的分析后可以发现总指数为偶的 C^{jk} 的方程和总指数为奇的 C^{jk} 的方程不相耦合。而且, 总指数为偶的 C^{jk} 的方程又分解为四组:

$$(C_{xy}^{eee}, C_{xz}^{eed}, C_{yz}^{ded}, C_{\alpha\alpha}^{dde}),$$

$$\begin{aligned} & (C_{xy}^{edd}, C_{xz}^{eee}, C_{yz}^{dde}, C_{\alpha\alpha}^{ded}), \\ & (C_{xy}^{del}, C_{xz}^{dde}, C_{yz}^{eee}, C_{\alpha\alpha}^{dde}), \\ & (C_{xy}^{dde}, C_{xz}^{del}, C_{yz}^{edd}, C_{\alpha\alpha}^{eee}). \end{aligned}$$

于是对于具有正交对称性的系统,有效粘滞张量有一些附加的约束

$$\mu_{jkk}^* = 0 \quad (\text{若 } i \neq j), \tag{36}$$

$$\mu_{jkl}^* = 0 \quad (\text{若 } i \neq j, \text{ 以及若 } i \neq k \text{ 或 } j \neq l). \tag{37}$$

3 数值结果

为了给出数值计算的细节,并且把结果和已有的理论进行比较,本节中我们将计算分布在立方阵上的球形颗粒胶体系统的有效粘滞系数。对于具有立方对称性的系统,有效粘滞张量的公式简化为,

$$\begin{aligned} \mu_{jkl}^* &= \frac{1}{2} \mu^s (1 + \beta) \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] + \\ & \mu^s (\alpha - \beta) \left[\delta_{jkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \end{aligned} \tag{38}$$

其中,

$$\alpha = - \langle \mathbf{E}_{ii}^* \rangle / E_{ii}^0, \tag{39}$$

$$\beta = - \langle \mathbf{E}_{ij}^* \rangle / E_{ij}^0. \tag{40}$$

把幂级数(30)作截断就能以近似的方式确定应变率的变换场。我们将以所得到的多项式的最大总指数来标记近似的阶。对于具有立方对称性的系统,最低阶的近似为,

$$\alpha = \frac{\phi^2}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G^{000}(\xi) G^{000}(-\xi) \xi_x^2 / [1 + (\xi_y^2 - \xi_x^2) | \xi^2 | / \xi^2 - \frac{\mu^s}{\mu^d - \mu^s} A^{000}]^{-1}, \tag{41}$$

$$\beta = \frac{\phi^2}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G^{000}(\xi) G^{000}(-\xi) [\xi_x^2 + \xi_y^2 - 4\xi_x^2 \xi_y^2 | \xi^2 | / \xi^2 - \frac{\mu^s}{\mu^d - \mu^s} A^{000}]^{-1}, \tag{42}$$

对于忽略了表面张力的乳浊液,有效粘滞系数的Taylor公式为,

$$\frac{\mu^*}{\mu^s} = 1 + \frac{5}{2} \frac{\mu^d - \mu^s}{\mu^d + \frac{2}{3} \mu^s} \phi. \tag{43}$$

令 μ^d 趋向无穷大, Taylor公式就化为爱因斯坦公式。图1是用公式(42)和用爱因斯坦公式计算的球形颗粒悬浮体的有效粘滞系数。Taylor关于乳浊液有效粘滞系数的理论结果以及本文的结果画在图3上。图1和图3上的曲线表明变换场方法在低颗粒浓度区域给出了合理的结果。和高阶近似作比较则表明变换场理论的最低阶近似中已经容纳了部分颗粒的相互作用。

对于球形颗粒的胶体,方程(32)和(33)中出现的积分都可以用解析的方法积出[14]。为简单起见,这里我们只对总指数小于2的 $G^{ijk}(\xi)$ 写出积分公式。若倒格矢与 z 轴平行,我们有:

$$G^{000}(\xi) = (4\pi/\xi^2) (\sin(\xi R)/\xi - R \cos(\xi R)), \tag{44}$$

$$G^{200}(\xi) = (4\pi/\xi^3) ((3/\xi^2 - R^2) \sin(\xi R) - 3R \cos(\xi R)/\xi), \tag{45}$$

$$G^{020}(\xi) = G^{200}(\xi), \tag{46}$$

$$G^{200}(\xi) = (4\pi/\xi^3) ((5R^2 - 12/\xi^2) \sin(\xi R) + R(12/\xi^2 - R^2 \xi) \cos(\xi R)), \tag{47}$$

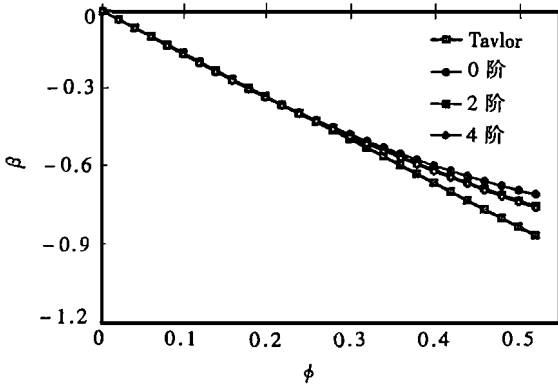


图 1 球形颗粒悬浮体的有效粘滞系数 β
(爱因斯坦公式的结果以及 Nunan 和 Keller 计算的结果也画在图上以资比较)

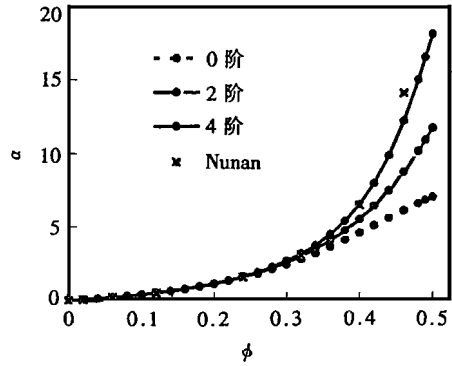


图 2 球形颗粒悬浮体的有效粘滞系数 α
(Nunan 和 Keller 计算的结果也画在图上作比较)

其中 ξ' 表示倒格矢与 z 轴重合。对于其他的情形, 通过坐标系的变换可以使倒格矢和 z 轴重合。相应的变换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \xi / \sqrt{\xi} & \xi / \sqrt{\xi} & 0 \\ \xi \xi / (\xi \sqrt{\xi}) & \xi \xi / (\xi \sqrt{\xi}) & - \xi / (\xi \sqrt{\xi}) \\ \xi / \xi & \xi / \xi & \xi / \xi \end{bmatrix}$$

其中 $\xi = \xi_x^2 + \xi_y^2$ 。有了这一变换矩阵和 $G^{ijk}(\xi')$ 的公式, 就很容易推出 $G^{ijk}(\xi)$ 的公式。

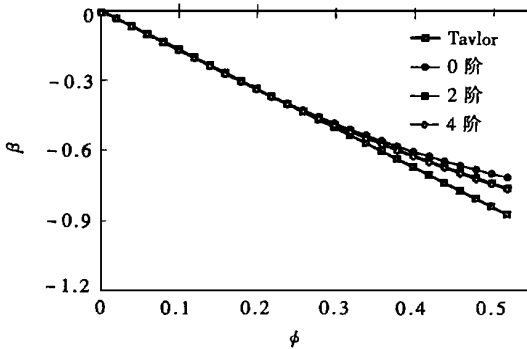


图 3 含球形气泡的乳浊液的有效粘滞系数 β
(由 Taylor 公式算出的结果也画在图上作比较)

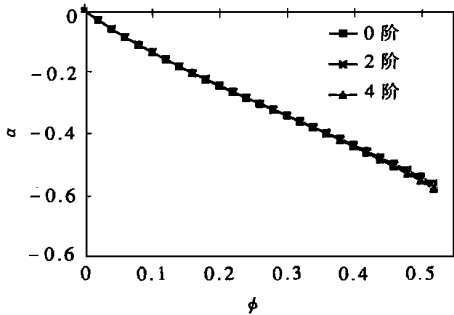


图 4 含球形气泡的乳浊液的有效粘滞系数 α

有了 A^{ijk} 和 $G^{ijk}(\xi)$ 的解析表达式, 计算有效粘滞系数的近似值就十分方便。对于球形颗粒悬浮体, β 和 α 的零阶、二阶和四阶近似值画在图 1 和图 2 上。Nunan 和 Keller 的理论结果也画在这两个图上作比较。图上的结果显示了近似方法的收敛性质。而且从图上可以看出只要在幂级数展式中保留少数几项就可以在很大的浓度区间内满足需要。只有当浓度接近密堆积, 此时有效粘滞系数具有奇性, 近似方法的精度才变坏。图 3 和图 4 是含球形气泡的乳浊液的有效粘滞系数。对于乳浊液, 方法的收敛性质更好, 取低阶近似就可以给出有效粘滞系数的好的数值。

4 结 论

本文中我们把变换场方法用于处理流体力学的多粒子问题,建立了确定胶体中的应变率张量的积分方程。变换场方法对元胞中胶体颗粒的分布没有任何限制,因此变换场方法可以对随意分布的胶体系统进行模拟研究。变换场方法使得计算高颗粒浓度乳浊液的有效粘滞系数和悬浮体一样简单,并且也可预测非球形颗粒胶体的有效粘滞系数。

[参 考 文 献]

- [1] Batchelor G K. Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction[J]. *J Fluid Mech*, 1976, **74**(1): 1~ 29.
- [2] 顾国庆,陶瑞宝. 周期性悬浮体有效粘滞率的第一性原理研究[J]. *中国科学(A辑)*, 1989(5): 495~ 501.
- [3] Chow T S. Viscosities of concentrated dispersions[J]. *Phys Rev*, 1993, **E48**(3): 1977~ 1983.
- [4] Taylor G I. The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid[J]. *Proc Roy Soc*, 1931, **A138**(1): 41~ 48.
- [5] Einstein A. Eine neue bestimmung der molek ldimensionen annln [J]. *Phys. (Leipai)*, 1906, **19**: 289~ 306.
- [6] Mellema J, Willemse M W M. Effective viscosity of dispersions approached by a statistical continuum method[J]. *Physica*, 1981, **122A**(1~ 2): 286~ 312.
- [7] Batchelor G K, Green J T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 [J]. *J Fluid Mech*, 1972, **56**(3): 401~ 427.
- [8] Pererson J M, Fixman M. Viscosity of polymer solutions[J]. *J Chem Phys*, 1963, **39**: 2516.
- [9] Takashi Nagatani, Statistical theory of effective viscosity in a random suspension[J]. *J Phys Soc Jpn*, 1979, **47**(1): 320~ 326.
- [10] Mazur P, Van W. Saarloos Many_sphere hydrodynamic interactions and mobilities in a suspension [J]. *Physica*, 1982, **115A**(1): 21~ 57.
- [11] Lord Rayleigh. On the influence of obstacle arrayed in rectangular order upon the properties of a medium[J]. *Philos Mag*, 1892, **34**: 481~ 502.
- [12] Nunan K C, Keller J B. Effective viscosity of a periodic suspension[J]. *J Fluid Mech*, 1984, **142**(1): 269~ 289.
- [13] Nemat Nasser S, Taya M. On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed void[J]. *Q Appl Math*, 1981, **39**(1): 43~ 59.
- [14] 顾国庆,陶瑞宝. A new method for evaluating the dc effective conductivities of composites with periodic structure [J]. *Phys Rev*, 1988, **B37**(15): 8612~ 8617.
- [15] Bedeaux D, Kappal R, Mazur P. The effective shear viscosity of a uniform suspension of spheres [J]. *Physica*, 1977, **88A**(1): 88~ 121.

A Theoretical Research to Effective Viscosity of Colloidal Dispersions

Gu Guoqing¹, Yu Kinwah²

(1. School of Computer Engineering, University of Shanghai
for Science and Technology, Shanghai 200091, P R China;

2. Physics Department, The Chinese University of Hong Kong, Shatin,
New Territories, Hong Kong)

Abstract: Colloidal dispersions are common in nature with wide industrial applications. One of the central theoretical problems in the field is to determine the rheological properties of the colloidal dispersion from the microstructures of the systems. Because of the difficulties associated with the boundary_value problems of the many_particle system, existing theories for colloidal suspensions are limited to low particle concentrations. In this work, we develop a method of transformation field is developed by which one can calculate the effective viscosity of an incompressible viscous fluid containing colloidal particles (either solid particles or liquid drops). The predictions of our theory are in good agreement with the Einstein's formula for suspensions and the Taylor's formula for emulsions at low particle concentrations. At higher particle concentrations, the results of Nunan and Keller are produced. The method is also applicable to the viscosity of colloidal systems with non_spherical particles.

Key words: multiphase flow, colloidal dispersion, suspension, emulsion