

文章编号:1000-0887(2000)04-0415-09

非线性阻尼作用下标准线性固体 粘弹性Ⅲ型破裂的解析解^{*}

范家参

(云南工业大学 建工系,昆明 650051)

(邹瑞锋推荐)

摘要: 把非线性 Rayleigh 阻尼引入标准线性固体粘弹性介质的Ⅲ型破裂的控制方程中,此方程是一个偏微分积分方程;首先设法消去积分项,得到一个三阶非线性偏微分方程,然后用小参数摄动法,得出线性化的各阶渐近控制方程;把每一个具有变系数的三阶线性控制方程分解为弹性部分及剩余部份,而前者的解析解为已知,后者是一个二阶变系数线性偏微分方程;它化不成 Mathieu 方程,也化不成 Hill 方程,故采用 WKBJ 的方法得出其渐近的解析解。

关键词: Rayleigh 阻尼; Ⅲ型破裂; 粘弹性标准线性固体

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

符号及其意义

\bar{x}, \bar{y} 直角横、纵坐标(m)

l 半条裂缝长度(m)

δ 半个裂缝宽度(m)

t 时间参数(s)

\bar{w} 垂直位移(m)

\bar{A}/ρ Reyleigh 阻尼系数之一(s^{-1})

\bar{B}/ρ 另一 Reyleigh 阻尼系数(s/m^2)

c_p 纵波波速(m/s)

c_s 横波波速(m/s)

$k = c_s/c_p$ 波速比, $k < 1$

$x = \bar{x}/l, y = \bar{y}/l$ 量纲为一直角横、纵坐标

$t = \bar{t}c_p/l$ 量纲为时间参数

$A = \bar{A}l/c_p\rho$ 量纲为一的 Rayleigh 阻尼系数之一

ρ 介质的密度(kg/m^3)

$B = \bar{B}c_p l/\rho$ 另一量纲为一的 Rayleigh 阻尼系数

η 粘弹性标准线性固体的粘滞系数($N \cdot s/m^2$)

E_1, E_2 粘弹性标准线性固体中的两个弹性系数
(N/m^2)

$\tau_s = \frac{1}{E_2} \eta$ 粘弹性标准线性固体在常应变下的应力
松弛时间(s)

$\tau_o = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \eta$ 粘弹性标准线性固体在常应力下
的应变松弛(蠕变)时间(s)

$\alpha = \frac{l}{\tau_s c_p}, \beta = 1 - \frac{\tau_s}{\tau_o}$ 粘弹性标准线性固体的本构方
程中两个量纲为一的常数

引 言

如图 1 所示裂缝,在其上下两边界上有垂直于纸面的分布剪切外力作用,上下边上作用的

^{*} 收稿日期: 1998-11-23; 修订日期: 1999-04-20

基金项目: 云南省教委科研基金资助项目(9712063)

作者简介: 范家参(1929~),男,昆明人,教授,发表专著一部,论文近 100 篇,研究方向:固体力学。

分布剪切力大小相等方向相反,而裂缝端部因应力集中而达到断裂韧性之后就开失稳破裂,从而释放能量而激发破裂速度加快,但在失稳破裂后,介质的分子之间有剧烈的内摩擦而产生粘滞性阻尼,加上裂缝两边剧裂的外摩擦,又使破裂速度衰减直到停止破裂。例如地震中倾滑断层(dip slip fault)产生的垂直型构造地震就是Ⅲ型断裂,发展后在断层两侧常发现有烧灼痕迹的断层泥(gouge)存在,就是剧烈的外摩擦产生的。因此这个失稳破裂的运动过程包括运动初期的激发及运动后期的衰减只能用非线性 Rayleigh 公式^[1]才能表达。

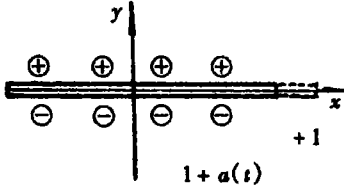


图1 量纲为一的Ⅲ型破裂示意图

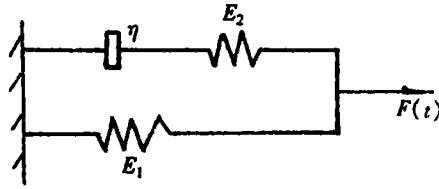


图2 标准线性粘弹性固体模型

既然有重要的内摩擦产生的粘弹性阻尼存在,则研究断裂动力学问题时,采用粘弹性介质模型就比单纯的弹性介质模型更合理。本文采用图2所示的三元件的粘弹性模型,称之为标准线性粘弹性固体。因为一个粘壶与一个弹簧串联的 Maxwell 模型当外力作用时无瞬时平衡似流体,一个粘壶与一个弹簧并联的 Voigt 模型当外力作用时无瞬时变形似刚体。图2的三元件模型克服了上述两种二元件模型不足之处^[2],是较为合理的适用于变形固体的粘弹性模型。当然只是初步的适用模型,若采用多于三元件的粘弹性模型,可以更真实地反映事物本质,但求问题的解析解就太困难了^[3]。

由文献[4]可知,标准线性粘弹性固体的初始条件和本构方程为:

$$\left. \begin{aligned} F + \tau_e \dot{F} &= E_R(u + \tau_e \dot{u}), \\ \tau_e F(0) &= E_R \tau_e \dot{u}(0), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

所以
$$u(t) = \frac{1}{E_R} \int_0^t \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_e}{\tau_\sigma} \right) e^{-(t-\tau)/\tau_\sigma} \right] \frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2)$$

在(1)和(2)两式中, $F(t)$ 是应力, $u(t)$ 是应变, E_R 是松弛弹性系数。由(2)式积分号内的方括号内的项可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时,粘壶作用完全松弛,由弹簧完全控制, E_R 表此特征的弹性系数。

现在讨论本文问题的控制方程。

(1) 考虑 Rayleigh 阻尼有量纲的Ⅲ型弹性断裂动力学的控制方程:

$$c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \left[-\frac{\bar{A}}{\rho} + \frac{\bar{B}}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}; \quad (A)$$

(2) 考虑 Rayleigh 阻尼有量纲的标准线性粘弹性固体的介质Ⅲ型断裂动力学的控制方程: 考虑(2)式的本构方程及下面含参数积分的求导数公式:

令
$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

则
$$\frac{dJ(y)}{dy} = -\frac{da}{dy} f(a, y) + \frac{db}{dy} f(b, y) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx,$$

而得:

$$\frac{c_s^2}{\tau_\sigma} \left(1 - \frac{\tau_e}{\tau_\sigma} \right) \int_0^t e^{-(t-\bar{\tau})/\tau_\sigma} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) d\bar{\tau} + c_s^2 \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \left[\frac{-\bar{A}}{\rho} + \frac{\bar{B}}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}. \quad (\text{B})$$

于是本文问题的量纲为一的控制方程为^[5]:

$$k^2 \nabla^2 w - \beta \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 w \right] e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[-A + B \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

本文问题的本构关系式的量纲为一的形式是:

$$\tau_{xx} = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \tau} d\tau, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} - \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \tau} d\tau. \quad (4)$$

在(4)式中的 τ_{xx} 及 τ_{xy} 是量纲为一的两个剪应力分量,以 G 表介质的剪切弹性系数,以 $\bar{\tau}_{xx}$ 及 $\bar{\tau}_{xy}$ 表示有量纲的剪应力,则

$$\tau_{xx} = (\bar{\tau}_{xx}/G) \text{ 及 } \tau_{xy} = (\bar{\tau}_{xy}/G).$$

方程(3)的边界条件是:

$$\tau_{xx} |_{y=0} = \begin{cases} -p(x,t) \text{ 已知,} & x \leq 1 + a(t), \\ 0, & x > 1 + a(t). \end{cases} \quad (5)$$

在(5)式中, $a(t)$ 为裂缝端点在 x 方向的量纲为一的位移.

方程(3)的初始条件是:

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0_-: w(x, y, 0_-) = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0_-} = 0, \\ t \geq 0_+: w(x, y, 0_+) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0_+} = w_0 \text{ 已知.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1 各阶渐近控制方程

我们已经在文献[6]中证明,(3)式中非线性项的阻尼系数 $B < 1$ 是个小参数,故有展开式:

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) + Bw_1(x, y, t) + B^2w_2(x, y, t) + \dots \quad (7)$$

首先要设法消去(3)式中的积分项.为此,对(3)式求 t 的偏导数得出的式子与(3)相减消去积分项,可得:

$$k^2 \nabla^2 w - \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - \tilde{\alpha} \left[-A + 3B \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \tilde{\alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - \tilde{\alpha} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla^2 w = \hat{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \hat{\alpha} \left[-A + B \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial t} + \hat{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w. \quad (8)$$

在(8)式中

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{1 + \alpha}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (8')$$

把(7)式的展开式代入(8)式,得出各阶的线性渐近控制方程.

零阶渐近控制方程:

$$k^2 \nabla^2 w_0 - \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w_0 + \tilde{\alpha} A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \tilde{\alpha} \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3} - \hat{\alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \hat{\alpha} A \frac{\partial w_0}{\partial t} - \hat{\alpha} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla^2 w_0 - \hat{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w_0 = 0; \quad (9)$$

一阶渐近控制方程:

$$\begin{aligned} k^2 \nabla^2 w_1 - \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w_1 + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \hat{\alpha} \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^3} + \hat{\alpha} A \frac{\partial w_1}{\partial t} - \\ \bar{\alpha} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla^2 w_1 - \hat{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w_1 = \\ \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^3 + 3\bar{\alpha} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\bar{\alpha} = (1 - \alpha A)/(1 + \alpha); \quad (10)'$$

.....

各阶渐近控制方程的定解条件中,除了下列的零阶渐近方程(10)的边界及初始条件:

$$\left[\frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \tau} \right]_{y=\pm 0} = -p(x, t) \quad (\text{已知}), \quad (11)$$

$$w_0(x, y, 0_+) = w_0 \quad (\text{已知}), \quad (12)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{w}_0 \quad (\text{已知}), \quad (13)$$

一阶及更高阶的渐近控制的定解条件都是齐次的零定解条件.

2 各阶渐近控制方程的求解

引入 Galileo 变换,把固定坐标系 xOy 变换为动坐标 $\xi Oy'$:

$$x = \xi + a(t), \quad y = y', \quad t = t'; \quad [x \leq 1 + a(t)], \quad (14)$$

则有下列运算公式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - a(t) \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \ddot{a}(t) \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\dot{a}(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} + a^2(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^3}{\partial t'^3} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} - 3\dot{a}(t)\ddot{a}(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \ddot{a}(t) \frac{\partial}{\partial \xi} - 3a(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} + 3a^2(t) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial t} - \\ &\quad 3\dot{a}(t) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial t^2} - \dot{a}^3(t) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

在动坐标中的零阶渐近控制方程:

$$\begin{aligned} k^2 \nabla^2 w_0 - \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w_0 + \bar{\beta} \dot{a}(t) \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 w_0 - \hat{\alpha} \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \ddot{a}(t) \frac{\partial}{\partial \xi} + 3a(t)\dot{a}(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \right. \\ \left. 3\dot{a}(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} - 3a^2(t) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial t} - 3\dot{a}(t) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial t^2} - \dot{a}^3(t) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) (w_0 + \nabla^2 w_0) + \\ (\bar{\alpha} A - \hat{\alpha}) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \dot{a}(t) \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\dot{a}(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} + a^2(t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (w_0 + \nabla^2 w_0) + \\ A\hat{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a(t) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w_0 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

为求解(16)式,设:

$$\left. \begin{aligned} w_0(x, y, t) = w_0(\xi, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{(0)}(t) H(1 - \xi) \sin m\pi\xi \cos n\pi y, \\ H(1 - \xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 1, \\ 0, & \xi \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

代(17)式的 Fourier 级数入(16)式,应用 Fourier 级数的正交性而得下列两个变系数常微分方程:

$$\ddot{A}_{mn}^{(0)}(t) - (\alpha - A)\dot{A}_{mn}^{(0)}(t) - [\alpha\bar{\beta}m^2\pi^2 + \alpha A - n^2\pi^2(\alpha\bar{\beta} + 3\dot{a}^2(t))]A_{mn}^{(0)}(t) - \{[(3\dot{a}(t)\ddot{a}(t) + ak^2 + A\dot{a}^2(t) + \alpha\dot{a}(t))]n^2\pi^2 + ak^2m^2\pi^2\}A_{mn}^{(0)}(t) = 0, \quad (18)$$

$$\ddot{A}_{mn}^{(0)}(t) + \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)} + \frac{2}{3}A - \frac{2}{3}\alpha - 2a\dot{a}(t)\right)\dot{A}_{mn}^{(0)}(t) - \frac{1}{3\dot{a}(t)}[\ddot{a}(t) - A\dot{a}(t)\ddot{a}(t) - A\alpha\dot{a}(t) - n^2\pi^2(\dot{a}^3(t) - 2\alpha\bar{\beta}\dot{a}(t))]A_{mn}^{(0)}(t) = 0. \quad (19)$$

为表达 Rayleigh 阻尼公式中包括运动初始有激发和运动后期的衰减的破裂速度,本文采用下列的一个半波的正弦函数来表达:

$$\dot{a}(t) = a_M \sin \frac{\pi}{2\bar{\tau}}t, \quad [0 \leq t \leq 2\bar{\tau}]. \quad (20)$$

在(20)式中: $\bar{\tau}$ 为从失稳破裂开始直至破裂速度达到极大值时所需量纲为一的时间, a_M 为量纲为一的最大破裂速度. 因此(20)式定义的破裂速度的变化符合 Rayleigh 阻尼的要求. 当然还有其他符合 Rayleigh 阻尼所要求的变速破裂速度的公式. 例如可采用二次代数抛物线公式

$$a(t) = 2a_M\left(1 - \frac{t}{2\bar{\tau}}\right)\frac{t}{\bar{\tau}}, \quad [0 \leq t \leq 2\bar{\tau}],$$

此式满足 $a(0) = a(2\bar{\tau}) = 0$ 及 $\dot{a}(\bar{\tau}) = a_M$. 但半个正弦波表达的破裂速度公式,可导致控制方程变为熟悉的 Mathieu 方程,便于求解;而二次代数抛物线表达的破裂速度公式,只能导致人们未曾研究过的某个变系数的二阶常微分方程,当然还有其他适用于 Rayleigh 阻尼的破裂速度公式,如悬链线,等,但是都不如半个正弦波公式有利.

按照常微分方程解析理论的 Fuchs 定理^[7], (19)式这个常微分方程的变系数在 $t = 0$ 及 $t = 2\bar{\tau}$ 即失稳破裂开始及停止时有奇异值,则其解必为长期项(secular term)而应舍去不用——这是奇异摄动方法规定的准则——使控制方程的解符合力学的本质. 现在,只须求解(18)式这个三阶变系数的线性常微分方程,因为它的系数在定义的闭区间 $[0 \leq t \leq 2\bar{\tau}]$ 没有奇异值. 还必须强调指出:既然(18)式是线性常微分方程,迭加原理的应用就是正确的,迭加原理适用于一切的线性问题,大家熟知的非齐次线性常微分方程的解,就是由满足齐次方程的通解迭加满足非齐次项的特解所组成. 若 L 为线性算子,函数 $u = u_1 + u_2$, 则恒有 $L(u) = L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$. 下面我们求解(18)式时就应用迭加原理.

已知 Rayleigh 阻尼作用时弹性介质Ⅲ型破裂问题须要求解下列二阶常微分方程^[8]:

$$\ddot{A}_{mn}^{(0)}(t) - A\dot{A}_{mn}^{(0)}(t) + [m^2(k^2 - \dot{a}^2(t)) + k^2n^2]A_{mn}^{(0)}(t) = 0. \quad (C)$$

把(C)式求一次导数而得:

$$\ddot{A}_{mn}^{(0)}(t) - A\dot{A}_{mn}^{(0)}(t) + [m^2(k^2 - \dot{a}^2(t)) - k^2n^2]\pi^2\dot{A}_{mn}^{(0)}(t) - 2m^2\pi^2\dot{a}(t)\dot{a}(t)A_{mn}^{(0)}(t) = 0. \quad (D)$$

采用下列变换:

$$T = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t}{\bar{\tau}}\right), \quad A_{mn}^{(0)}(t) = A_{mn}^{(0)}(T) = e^{At/2}\alpha_{mn}^{(0)}(t) = \exp\left[\frac{A\bar{\tau}}{2}\left(1 - \frac{2\bar{\tau}}{\pi}\right)\right]\alpha_{mn}^{(0)}(T), \quad (21)$$

则(C)式或(D)式化为标准的 Mathieu 方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT^2} + (\lambda_{mn} - 2q_m \cos 2T) \alpha_{mn}^{(0)}(T) &= 0, \\ \lambda_{mn} &= 4\bar{\tau}^2 m^2 - 2\bar{\tau}^2 k^2 m^2 d_M + 4\bar{\tau}^2 n^2 - \frac{\bar{\tau}^2 A}{\pi^2}, \\ q_m &= k^2 \bar{\tau}^2 m^2 d_M^2. \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

用 WKBJ 方法^[9]得出(E)式在稳定区域的近似解:

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_r n C_r^{(0)} J_n \left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}} \right) \cos l_m \left[\frac{2}{\bar{q}_{mn}} J_0(l_m) \sin \frac{\bar{q}_{mn}\pi}{2} + \right. \\ \left. 4 \sum_j \frac{\bar{q}_{mn}}{\bar{q}_{mn} - (2j)^2} J_{2j}(l_m) \sin \frac{\bar{q}_{mn}\pi}{2} \right] = \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp \left[-\frac{A\bar{\tau}}{2} \left(1 - \frac{2T}{\pi} \right) \right] \times \\ p(x, T) \cos m\pi [x - a(T)] dT dx. \end{aligned} \quad (F)$$

在(F)式中:

$$\bar{q}_{mn} = \sqrt{\lambda_{mn}} - 2r, \quad l_m = 4m\bar{\tau}d_M, \quad a(T) = \frac{2\bar{\tau}}{\pi} d_M (1 - \sin T). \quad (F')$$

由(18)式减去(D)式而得:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mn}^{(0)}(t) - [\pi^2 m^2 \bar{\alpha}(\bar{\beta} - a^2(t)) + A + \pi^2 n^2 \bar{\alpha}(\bar{\beta} + 3a^2(t))] A_{mn}^{(0)}(t) + \\ \left[\left(3\bar{\alpha} + \frac{3m^2 \bar{\alpha}}{n^2} a(t) \dot{a}(t) + k^2 + A\bar{\alpha} a^2(t) + a(t) \right) n^2 \pi^2 + \right. \\ \left. k^2 m^2 \pi^2 \right] A_{mn}^{(0)}(t) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

于是,由求解(18)式这个变系数线性三阶常微分方程的问题,简化为求解(22)式,使之变为求解变系数的二阶线性常微分方程,从数学运算上大大简化了求解的工作。从力学观点上看,(18)式中包括了问题的弹性部分即(D)式或(C)式,又包括了(22)式所代表粘滞性与弹性耦连的部分所代表的控制方程,而图2的粘弹性三元件模型被称之为标准粘弹性线性固体。这就说明了以上把(18)式分解为(C)或(D)式再迭加(22)是正确的,力学意义及数学原理都很清楚。

为求解(22)式,引入下列变换^[10]:

$$\left. \begin{aligned} u_{mn}^{(0)}(t) &= A_{mn}^{(0)}(t) \exp \left[-\frac{1}{2} g_{mn}^{(0)}(t) dt \right], \\ g_{mn}^{(0)}(t) &= -[\bar{\alpha} m^2 \pi^2 (\bar{\beta} - a^2(t)) + \bar{\alpha} n^2 \pi^2 (\bar{\beta} + 3a^2(t))]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(22)式化为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{mn}^{(0)}(t) + I_{mn}^{(0)}(t) u_{mn}^{(0)}(t) &= 0, \\ I_{mn}^{(0)}(t) &= h_{mn}^{(0)}(t) - \frac{1}{4} [g_{mn}^{(0)}(t)]^2 - \frac{1}{2} g_{mn}^{(0)}(t), \\ h_{mn}^{(0)}(t) &= k^2 m^2 \pi^2 + n^2 \pi^2 \left(9\bar{\alpha} \frac{m^2}{n^2} a(t) \dot{a}(t) + k^2 + A\bar{\alpha} (1 + a(t)) \right) a(t). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

再引入变换^[10]:

$$\left. \begin{aligned}
 l_{mn}^{(0)}(t) u_{mn}^{(0)}(t) &= - \left[\frac{1}{\bar{\alpha}} f_{mn}^{(0)}(t) + l_{mn}^{(0)}(t) \right] u_{mn}^{(0)}(t), \\
 f_{mn}^{(0)}(t) &= - \pi^2 \left[3m^2 - \frac{\pi \bar{\beta} a_M^2}{2\bar{\tau}} (m^2 - 3n^2) \right] \sin \frac{\pi t}{\bar{\tau}} - \bar{\alpha} n^2 \pi^2 a_M^2 \sin \frac{\pi t}{2\bar{\tau}} - \\
 &\quad \left[\frac{3}{4} \bar{\beta} \pi^2 a_M^2 (m^2 - 3n^2) + \bar{\alpha} A + \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} \pi^4}{16} a_M^4 (m^2 - 3n^2) + \bar{\beta} \pi^2 (m^2 + n^2) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{A}{2} a_M^2 \right] \cos \frac{\pi t}{\bar{\tau}} + \bar{\alpha} \bar{\beta} \pi^4 a_M^4 (m^2 - 3n^2) \cos \frac{2\pi t}{\bar{\tau}}, \\
 l_{mn}^{(0)}(t) &= \left\{ 3\pi^2 n^2 \bar{\alpha} + k^2 m^2 \pi^2 + \frac{A \bar{\alpha}}{2} a_M^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\pi^2}{2} \bar{\alpha} \bar{\beta} a_M^2 (m^2 - 3n^2) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \bar{\alpha} \bar{\beta} \pi^2 (m^2 + n^2) - A \right] \right\}^2 t.
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

因为 $\bar{\alpha} = 1/(1 + \alpha)$, 故 $1/\bar{\alpha} > 1$ 为大参数, 令^[10]:

$$u_{mn}^{(0)}(t) = \exp \left[\frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \int V_{mn}^{(0)}(t) dt \right], \quad (26)$$

则(24)式的第一式化为 Riccati 方程:

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \dot{V}_{mn}^{(0)}(t) + \frac{1}{\bar{\alpha}} [V_{mn}^{(0)}(t)]^2 - \frac{1}{\bar{\alpha}} f_{mn}^{(0)}(t) - g_{mn}^{(0)}(t) = 0. \quad (27)$$

设: $\bar{\rho} = 1/\sqrt{\bar{\alpha}} > 1$, 故有下列展开式:

$$V_{mn}^{(0)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} V_{mn,i}^{(0)}(t) \bar{\rho}^{-i}. \quad (28)$$

代(28)式的展式入(27)式, 比较 $\bar{\rho}$ 的同次幂的系数而得到:

$$\left. \begin{aligned}
 V_{mn,0}^{(0)}(t) &= \pm \sqrt{f_{mn}^{(0)}(t)}, \quad V_{mn,1}^{(0)}(t) = - \dot{V}_{mn,0}^{(0)}(t) / 2V_{mn,0}^{(0)}(t), \\
 V_{mn,2}^{(0)}(t) &= \{ g_{mn}^{(0)}(t) - V_{mn,1}^{(0)}(t) - [V_{mn,0}^{(0)}(t)]^2 \} / 2V_{mn,0}^{(0)}(t), \\
 V_{mn,i+1}^{(0)}(t) &= - \left[V_{mn,i}^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^i V_{mn,j}^{(0)}(t) V_{mn,i+1-j}^{(0)}(t) \right] / 2V_{mn,0}^{(0)}(t), \\
 &\quad (i \geq 2).
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

至此, 我们已得出零阶渐近方程的两个线性无关的级数解, 即以 $V_{mn,0}^{(0)}(t)$ 分别取正值和负值的表达式而得来, 其中的通解常数要求初位移和初速度来决定。

比较(9)式及(10)式和(11)式可知, 一阶及更高阶的渐近控制方程与零阶渐近控制方程, 在方程的左端是相同的, 只是右端不同, 即零阶为齐次方程, 一阶及更高阶的为非齐次方程。由文献[10]可知: 令 ϕ_1 及 ϕ_2 表示齐次方程的通解, 则对应的非齐次方程的特解为:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{mn}^{(i)}(t) &= \phi_{mn,2}^{(i)}(t) \int \frac{\phi_{mn,1}^{(i)}(t)}{W(t)} H_{mn}^{(i)}(t) dt - \phi_{mn,1}^{(i)}(t) \int \frac{\phi_{mn,2}^{(i)}(t)}{W(t)} H_{mn}^{(i)}(t) dt, \\
 W(t) &= \phi_{mn,1}^{(i)}(t) \dot{\phi}_{mn,2}^{(i)}(t) - \dot{\phi}_{mn,1}^{(i)}(t) \phi_{mn,2}^{(i)}(t), \quad (i = 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$A_{mn}^{(i)}(t)$ 是下列非齐次线性方程

$$\ddot{A}_{mn}^{(i)}(t) + g_{mn}^{(i)}(t) \dot{A}_{mn}^{(i)}(t) + h_{mn}^{(i)}(t) A_{mn}^{(i)}(t) = H_{mn}^{(i)}(t) \quad (31)$$

的特解,且有

$$\left. \begin{aligned} H_{mn}^{(1)}(t) &= \int_0^1 \int_0^{\delta/l} \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^3 + 3\bar{\alpha} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right] \cos m\pi\xi \cos n\pi y d\xi dy, \\ H_{mn}^{(2)}(t) &= 3 \int_0^1 \int_0^{\delta/l} \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} + 3\bar{\alpha} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right] \sin m\pi\xi \cos n\pi y d\xi dy, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

所以一阶及更高阶渐近控制方程的解也就求出了。

3 讨 论

(1) 本文要求解的(24)式,由(25)式表示其系数的公式中,含有

$$\sin \frac{\pi t}{2\bar{\tau}}, \sin \frac{\pi t}{\bar{\tau}}, \cos \frac{\pi t}{\bar{\tau}}, \cos \frac{2\pi t}{\bar{\tau}}$$

等 4 项变系数,它不同于下列 Hill 方程:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z + \dots) u = 0.$$

因此,只有把(24)式化为(27)式的 Riccati 方程,再用 WKBK 方法得出(27)式的级数式解(29)式。

(2) 在文献[11]里,我们用原始的幂级数方法去求解(18)式这个变系数三阶线性常微分方程,因此初始条件就要有 3 个:即已知初位移、初速度和初加速度。这最后一个初始条件是什么任何固体动力学所没有的,是违反了动力学规律的。其实(18)式出现最高阶为三阶导数,是为了消除(3)式的积分项而对它求 t 的偏导数才出现的,这是在演算过程中人为的增加的而非本构方程所应有的项,在本文中我们已去除了这种人为的错误。

(3) 用断裂动力学得出强震地面运动的解析解是国内外十分重视的课题,系统地提出这个课题的是著名断裂力学专家,积分的创始人 J. R. Rice^[12],但在这个文献中只提出了没有考虑阻尼作用并假定破裂速度不变的控制方程。地壳中发震断层失稳破裂产生的构造地震是危害最严重也是最常见的地震,在距震源很近的极震区地面,地震波传播时间太短可以忽略不计,因此地面运动便是驻波或称振动,而距震源较远处才产生行波。最快的是体波中的纵波速度 c_p ,其次是体波中的横波速度 c_s ,最后才是面波中的 Rayleigh 波速度 c_R 和 Love 波速度 c_L 。以花岗岩中波速为例: $c_p = 6.5 \text{ km/s}$, $c_s = 3.74 \text{ km/s}$, $c_L = 0.95 c_s$, $c_R = 0.91 c_s$ 。所以,地震波传播到距震源较远处的震害当然不如极震区的震害为烈,而在极震区即震级 $M_s \geq 7$ 的浅源地震即震源小于 15 km 时,地震烈度往往大于 8 级时,垂直地面运动是造成震害的主要原因^[13],本文的成果适用于此类情况。

(4) 本文(7)式的小参数摄动展开,只适用于 $w_i < B^i$ 的情况即小振幅时。若在 $w_i \geq B^i$ 的大振幅时,则不能用小参数展开使控制方程(8)线性化,只能用适合所有边界条件的振型函数代入控制方程约化为非线性常微分方程而求解,如我们在文献[14]对水平地震时所激发的水库中动力压力对斜面水坝的作用所得的解析解那样。这时,对于约化而得的非线性常微分方程组,只能用逐次迭代法求解。

[参 考 文 献]

- [1] Nayfeh A H. *Introduction to Perturbation Techniques* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1981, 147 ~ 148.
- [2] 王启宏,等. 材料流变学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1985,20 ~ 29.
- [3] 刘保国,孙钧. 岩体粘弹性本构模型识别的一种方法[J]. 工程力学,1999,16(1):18 ~ 25.
- [4] Fung Y C. *Foundations of Solid Mechanics* [M]. New York: Prentice-Hill Inc, 1965, 20 ~ 30, 60 ~ 63.
- [5] Костров Б В. Неустойчивый распространение трещины продольного сдвига[J]. ПИММ, 1996, 30(3):331 ~ 337.
- [6] 范家参,徐平. 有激发和衰减的有限长裂缝Ⅱ型破裂过程的研究[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(5):689 ~ 706.
- [7] 戈鲁别夫 B B. 微分方程解析理论讲义[M]. 路见可,齐民友,译. 北京:高等教育出版社,1956, 227 ~ 230.
- [8] 范家参. 包括激发和衰减的倾滑断层破裂过程的解析解[J]. 地震研究,1982,5(3):332 ~ 344.
- [9] 王竹溪,郭教仁. 特殊函数概论[M]. 北京:科学出版社,1965,711 ~ 713.
- [10] 卡姆克 E. 常微分方程手册[M]. 张鸿林译. 北京:科学出版社,1977,151 ~ 155,174 ~ 177.
- [11] Fan Jiashen, Tsai Chong-shien. The model Ⅲ dynamic rupture of rocks as standard linear solid under Rayleigh damping[A]. In: Shah S P, Swartz S E, Barr B Eds. *Proc Int'l Conf on Recent Developments in Fracture of Concrete and Rocks* [C]. New York: Elsevier, 1989, 142 ~ 151.
- [12] Rice J R. The Mechanics of Earthquake Rupture[R]. NSF Geophys Program Grant EAR-12948 & US Department of Interior Geology Survey Contract 14-08-0001-17664 Mod. 1, Report No. 18, 1978.
- [13] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 北京:地震出版社,1988,640 ~ 643.
- [14] 范家参. 水平地震时斜面水坝受到的非线性动水压力的全过程的解析解[J]. 应用力学学报, 1994, 11(3):111 ~ 116.

Analytical Solution for Mode Ⅲ Dynamic Rupture of Standard Linear Viscoelastic Solid With Nonlinear Damping

Fan Jiashen

(Department of Civil Engineering, Yunnan Polytechnic University,
Kunming 650061, P R China)

Abstract: Introducing the nonlinear Rayleigh damping into the governing equation of the Mode Ⅲ dynamic rupture for standard viscoelastic solid, this equation is a partial differential and integral equation. First, eliminating the integral term, a PDE of order three is obtained. Then, applying the small parameter expansion method, linearized asymptotic governing equation for each order of the small parameter is obtained. Dividing the order three PDE into an elastic part with known solution, the rest part pertains to viscous effect which is neither a Mathieu equation nor a Hill one. The WKBJ method is still adopted to solve it analytically.

Key words: Rayleigh damping; mode Ⅲ rupture; standard linear viscoelastic solid