

文章编号:1000-0887(2000)04-0365-08

# 高精度隐式参差光滑格式的构造<sup>\*</sup>

倪明玖, 席光, 王尚锦

(西安交通大学 能动学院(机泵中心),西安 710049)

(卡荫贵推荐)

**摘要:** 参照 Lax-Wendroff 格式的构造方法,就双曲型方程、抛物型方程和双曲-抛物型方程,构造了一种新的 IRS(implicit residual smoothing)格式. 该 IRS 格式有二阶或三阶时间精度且大大地拓宽了解的稳定区域和 CFL 数. 这种新的 IRS 格式有中心加权型和迎风偏向型两种,并用 von-Neumann 分析方法分析了格式的稳定性范围. 讨论了在透平机械中广泛应用的 Dawes 方法的局限性,发现该方法对稳态问题得出的解与时间步长的选取有关,对粘性问题的求解时,时间步长受严格限制. 最后,结合 TVD(total variation diminishing)格式和四阶 Runge-Kutta 技术,用 IRS 格式和 Dawes 方法对二维反射激波场进行了数值模拟,数值结果支持本文的分析结论.

**关键词:** Lax-Wendroff 格式; IRS 格式; 四阶 Runge-Kutta 技术; TVD 格式

**中图分类号:** O363      **文献标识码:** A

## 引 言

一般的隐式法可写为(傅德薰[1],Hirsch[2]):

$$\{\text{隐式部分}\} = \{\text{显式部分}\}, \quad (1)$$

MacCormack<sup>[3]</sup>指出现代的隐式格式可写为:

$$\{\text{数值部分}\} \delta_t U = \{\text{物理部分}\}. \quad (2)$$

物理部分反映空间方向物理参数的变化规律,数值部分反映时间方向的变化规律. 对稳态问题求解,解的精度由物理部分决定,解的效率由数值部分决定. IRS 格式<sup>[4]</sup>是现代格式的一种. 事实上,结合时间多步技术和多重网格法,IRS 格式已是加速稳态问题解收敛的一种标准技术. Blazek 等<sup>[5]</sup>提供了两类 IRS 格式,即中心加权型和迎风偏向型 IRS 格式,相比中心加权型 IRS 格式,迎风偏向型 IRS 格式有更大的优点. 本文对时间相关方程,基于 Lax-Wendroff 格式<sup>[6]</sup>构造方法,重构了高精度 IRS 格式. 发现 Dawes 方法<sup>[7]</sup>只是本文构造的中心加权型 IRS 格式的一特例,并分析指出 Dawes 方法对稳态或粘性问题的求解存在着局限性. 该方法得出的解与时间步长的选取有关. 本文以 2-D 反射激波问题为例,结合 Yee<sup>[8,9]</sup>的对称 TVD 格式和四阶 Runge-Kutta 技术,用偏迎风 IRS 格式、Jameson<sup>[4]</sup>的标准 IRS 格式、Dawes 方法分别求解,详细对比分析了各种 IRS 格式的特点.

• 收稿日期: 1998-01-06; 修订日期: 1999-12-03

基金项目: 国家教委博士点资金资助课题

作者简介: 倪明玖(1969~),男,安徽人,讲师,博士, E-mail: mjni@xjtu01.xjtu.edu.cn.

# 1 时间相关方程 IRS 格式

## 1.1 高精度 IRS 格式的构造

考虑一维抛物型模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

对时间项用泰勒级数展开有:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^3 + \dots \quad (4)$$

将方程(3)代入方程(4),有:

$$u^{n+1} = u^n + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta t + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\Delta t)^2 + \dots \quad (5)$$

离散方程(5),可有表达式:

$$\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} D_2 \right) \Delta u_i^n = \epsilon \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} D_2 u_i^n, \quad (6)$$

其中:  $\Delta u^n = u^{n+1} - u^n$ ,  $D_2$  为二阶空间导数的差分算子,  $D_2 \rightarrow (1, -2, 1)$  即  $D_2 u_i = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}$ , 方程(6)为抛物型方程的中心加权型 IRS 格式, 由方程(5)和(6)可知, 该 IRS 格式有二阶时空精度.

对一维双曲模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

采用类似的方法, 可构造两种不同的 IRS 格式, 分别写为:

$$\left( 1 - \frac{a^2}{6} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} D_2 \right) \Delta u_i^n = - \frac{a \Delta t}{\Delta x} \delta_x u_i^n + \frac{1}{2} \frac{a^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} D_2 u_i^n, \quad (8)$$

$$\left( 1 + \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ \right) \Delta u_i^n = - \frac{a \Delta t}{\Delta x} \delta_x u_i^n, \quad (9)$$

其中  $\delta_x^+$  为迎风空间差分算子,  $\delta_x$  为空间差分算子. 方程(8)为中心加权 IRS 格式, 有 3 阶时间精度, 如  $\delta_x$  代表中心差分算子, 格式(8)为 Lax-Wendroff 型 IRS 格式. 方程(9)为偏迎风型 IRS 格式, 有 2 阶时间精度. 对稳态问题, 解的精度由空间差分算子  $\delta_x u_i^n$  决定.

更一般地, 考虑一维双曲-抛物模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (10)$$

对时间项采用泰勒级数, 也可得到表达式(4), 将(10)式代入(4)式, 得:

$$u^{n+1} = u^n + \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta t + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta t)^2 + \left( \frac{\epsilon}{2} (\Delta t)^2 + \frac{a^2}{6} (\Delta t)^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \dots, \quad (11)$$

$$u^{n+1} = u^n + \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta t + \frac{1}{2} \left( -a \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\Delta t)^2 + \dots \quad (12)$$

双曲-抛物方程的 IRS 格式可分别表为:

(I) 中心加权 Lax-Wendroff 型 IRS 格式:

$$\left( 1 - \left( \frac{a \Delta t}{6(\Delta x)^2} + \frac{\epsilon \Delta t}{2(\Delta x)^2} \right) D_2 \right) \Delta u^n = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x u^n + \left( \frac{a \Delta t}{2(\Delta x)^2} + \frac{\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} \right) D_2 u^n; \quad (13)$$

(II) 偏迎风 IRS 格式:

$$\left(1 + \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ - \frac{1}{2} \frac{\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} D_2\right) \Delta u^n = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x u^n + \epsilon \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} D_2 u^n. \quad (14)$$

为保证物理粘性影响大于数值粘性, 方程(13)中应有:

$$\frac{1}{2} \frac{a^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \leq \epsilon \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (15)$$

方程(15)严格限制了时间步长的选取, 大大降低了 IRS 格式相比显式格式的优越性. 由于  $(\Delta t)^2$  项, 即  $(a\Delta t)^2/[2(\Delta x)^2] D_2 u_i^n$ , 该格式对稳态流场的求解也存在着局限性, 该项的存在, 使得 IRS 格式所得的结果可能与时间步长的选取有关.

Jameson & Baker<sup>[4]</sup>发展的标准 IRS 格式, 对双曲-抛物方程, 可写为:

$$\left(1 - \gamma \frac{a^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} D_2\right) \Delta u_i^n = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x u_i^n + \frac{\epsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} D_2 u_i^n, \quad (16)$$

其中  $\gamma$  为大于 0 的系数. 显然该格式可用于稳态和粘性流场的求解, 但该 IRS 格式只有一阶时间精度.

### 1.2 时间相关方程 IRS 格式的一般表达式

采用 Jameson & Baker<sup>[4]</sup>的标记符, 令  $R$  代表光滑的残差,  $\bar{R}$  代表光滑后的残差, 中心加权型 IRS 格式的一般表达式可写为:

$$-a\bar{R}_{i-1} + (1 + 2\sigma)\bar{R}_i - a\bar{R}_{i+1} = R_i, \quad (17)$$

其中对抛物方程的 IRS 格式(方程(6))有:  $\sigma = \epsilon \Delta t/[2(\Delta x)^2]$ ; 对双曲型方程的 Lax-Wendroff IRS 格式(方程(8))有:  $\sigma = (a\Delta t)^2/[6(\Delta x)^2]$ ; 对双曲-抛物方程, 中心加权 Lax-Wendroff IRS 格式(方程(13)), 有:  $\sigma = (a\Delta t)^2/[6(\Delta x)^2] + \epsilon \Delta t/[2(\Delta x)^2]$ ; 而 Jameson & Baker 的标准 IRS 格式(方程(16))则有:  $\sigma = \gamma(a\Delta t)^2/(\Delta x)^2$ ,  $\gamma$  为系数(该格式只有一阶时间精度). 而偏迎风 IRS 格式可写为:

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta)\bar{R}_{i-1} + (1 + \alpha + 2\beta)\bar{R}_i - \beta\bar{R}_{i+1} = R_i & (\alpha \geq 0), \\ -\beta\bar{R}_{i-1} + (1 - \alpha + 2\beta)\bar{R}_i - (-\alpha + \beta)\bar{R}_{i+1} = R_i & (\alpha \leq 0), \end{cases} \quad (18)$$

其中双曲方程的 IRS 格式(方程(9))有:  $\alpha = a\Delta t/(2\Delta x)$ ,  $\beta = 0$ ; 而对双曲-抛物方程的 IRS 格式(方程(14)), 则有  $\alpha = a\Delta t/(2\Delta x)$ ,  $\beta = \epsilon \Delta t/[2(\Delta x)^2]$ .

### 1.3 Dawes 隐式法

AF 分解法在空气动力学的计算中发挥着重要的作用<sup>[10,11]</sup>, 对双曲-抛物方程, Dawes<sup>[7]</sup>发展了一种隐式方法, 由于 Dawes 在透平机械领域的杰出贡献, 该方法获得了广泛应用(Hathaway [12], Storer & Cumpsty [13], Krain & Hoffman [14]). 考虑双曲-抛物方程(10), 用二阶中心差分格式离散对流项, 采用与 IRS 格式(13)构造相类似的构造方法可得到类似于 IRS 的格式, 有:

$$[I + \Delta t(a\delta_x^0 - \epsilon\delta_{xx}^2)]\Delta u = -\Delta t(a\delta_x^0 u - \epsilon\delta_{xx}^2 u) = R, \quad (19)$$

其中  $\delta_x^0, \delta_{xx}^2$  为一阶和二阶导数项的中心差分格式. 对大时间步长和高 Reynolds 数, 格式(19)失去了对角占优性, 不易得到左边矩阵的逆矩阵. Dawes 在方程(19)式两边乘以系数矩阵得如下隐式表达式:

$$[I - \Delta t(a\delta_x^0 - \epsilon\delta_{xx}^2)][I + \Delta t(a\delta_x^0 - \epsilon\delta_{xx}^2)]\Delta u = R^*, \quad (20)$$

$$\text{其中 } R^* = [I - \Delta t(a\delta_x^0 - \epsilon\delta_{xx}^2)]R. \quad (21)$$

现在我们展开(20)和(21)式, 并忽略无穷小量, 可得到如下表示式:

$$(I - a^2(\Delta t)^2\delta_{xx}^2)\Delta u = -\Delta t(a\delta_x^0 u - \epsilon\delta_{xx}^2 u) + (\Delta t)^2 a^2 \delta_{xx}^2 u. \quad (22)$$

显然,该式显式部分对流项的离散格式为 Lax-Wendroff 格式. 由于存在项  $(\Delta t)^2 a^2 \delta_{xx}^2 u$ , 该格式在大时间步长下对稳态问题进行求解, 获得的数值解与时间步长的选取有关, 且由于该项的存在, 在  $\Delta t \geq \epsilon/a^2$  下, 其数值粘性大于物理粘性, 因而对粘性流场的求解, 时间步长也受到严格限制. Dawes 法相当于一部显式格式外加一步 Lax-Wendroff 型 IRS 格式, 并非两部显式格式外加 IRS 格式<sup>[12]</sup>.

## 2 IRS 格式的 von Neumann 稳定性分析

采用 von Neumann 稳定性分析方法(Hirsch[2]), 可得到抛物型方程 IRS 格式(式(6))的放大因子为:

$$G = 1 - \frac{8\sigma \sin^2(\theta/2)}{1 + 4\sigma \sin^2(\theta/2)}, \quad (23)$$

其中  $\sigma = \epsilon \Delta t / [2(\Delta x)^2]$ , 显然该放大因子对任意时间步长均不大于 1, 即该 IRS 格式无条件稳定. 同样可得到其它 IRS 格式的放大因子表达式如下:

双曲方程, 中心加权 Lax-Wendroff IRS 格式(式(8))的为:

$$G = 1 - \frac{2\nu^2 \sin^2(\theta/2) + i\nu \sin\theta}{1 + 2/3\nu^2 \sin^2(\theta/2)}; \quad (24)$$

偏迎风 IRS 格式(方程(9))的为:

$$G = 1 - \frac{i\nu \sin\theta}{1 + 2\nu \sin^2(\theta/2) + i\nu \sin\theta}; \quad (25)$$

对双曲-抛物方程, 中心加权 Lax-Wendroff 型 IRS 格式(式(13))的为:

$$G = 1 - \frac{8\sigma \sin^2(\theta/2) + i\nu \sin\theta}{1 + 2(\nu + 2\sigma) \sin^2(\theta/2) + i\nu \sin\theta}; \quad (26)$$

其中  $\sigma = \epsilon \Delta t / [2(\Delta x)^2]$ ,  $\nu = a \Delta t / [2\Delta x]$ ; 偏迎风 IRS 格式, (方程(14)) 的放大因子可写为:

$$G = 1 - \frac{(2\nu^2 + 8\sigma) \sin^2(\theta/2) + i\nu \sin\theta}{1 + (4\sigma + 2/3\nu^2) \sin^2(\theta/2)}. \quad (27)$$

对方程(24)~(27), 容易证明对任意时间步长均有:  $|G| \leq 1$ , 因而根据局部线性化假定, 由 von Neumann 稳定性分析方法得出本文发展的 IRS 格式是无条件稳定的.

多步显式技术可用以进一步加速解的收敛, 假设 2-D 欧拉方程的半离散式写成:

$$\frac{dU}{dt} = R(U), \quad (28)$$

则四阶 Runge-Kutta 法可表为:

$$\left. \begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + R(U^n) \Delta t / 4, \\ U^{(2)} &= U^n + R(U^{(1)}) \Delta t / 3, \\ U^{(3)} &= U^n + R(U^{(2)}) \Delta t / 2, \\ U^{(4)} &= U^n + R(U^{(3)}) \Delta t, \\ U^{n+1} &= U^{(4)}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

IRS 格式可应用于每级, 这样便于在大时间步长下获得稳定的收敛解.

## 3 算例验证——反射激波问题

对 1-D 双曲型模型方程, Harten<sup>[15]</sup> 提出了“总变差递减”(TVD)概念构造高分辨率格式, Sweby<sup>[16]</sup> 基于对 Lax-Wendroff 格式加限制器构造了一阶和二阶 TVD 格式, 但不宜于用隐式法

求解. Yee<sup>[8,9]</sup>基于对中心差分格式加限制器构造了显隐对称 TVD 格式, 并推广到 2-D 欧拉方程. 对于 2-D 反射激波场, 二阶精度对称 TVD 格式、四阶 Runge-Kutta 法, 结合 Dawes 隐式法 Jameson 的标准 IRS(StIRS(Standard IRS))格式及本文发展的偏迎风 IRS 格式, 求解反射激波流场. 边界条件可表述如下:

进口条件:

$$M_\infty = 2.9, P_\infty = 1, \rho_\infty = 1; \tag{30}$$

固壁条件: 取滑移边界条件, 在上边界进口保证 29° 的激波反射角;

出口条件:  $p, \rho, u, v$  按  $\partial f / \partial x = 0$  外推而得.

在  $61 \times 21$  的网格下, 所得的结果示于图 1 及图 2 中. 图 1 显示不同隐式法在大 CFL 数和小 CFL 数下所求的半高处压力系数 ( $C_p = (P_{i,jmid} - P_\infty) / (\rho_\infty u_\infty^2 / 2)$ ,  $P_{i,jmid}$  为半高处的压力值), 可以看出大 CFL 数下, 由于格式粘性项  $(\Delta t)^2 a^2 \delta_{xx}^2 u$  的作用, Dawes 方法得出与 FUD(一阶迎风) 格式相似的结果, 而 StIRS 格式和 UIRS(偏迎风 IRS) 格式, 即使在大 CFL 数下也给出很好的激波分辨率.

图 2 为 Dawes 法在不同 CFL 数下 ( $CFL = 0.4, CFL = 1.0, CFL = 10.0$ ), StIRS ( $CFL = 10.0$ ) 和 UIRS ( $CFL = 10.0$ ) 格式所求得的压力线图, 可以发现大 CFL 数下, 用 Dawes 法获得的结果精度低且分辨率不高, 而 StIRS 和 UIRS 格式则可以获得几乎相同的高分辨率结果. 这主要是稳态问题的计算精度由空间差分格式的精度决定, 当空间采用二阶精度 TVD 格式时, 由于 StIRS 和 UIRS 格式并不引入二阶格式粘性项, 所以二者得出几乎相同的高分辨率结果.

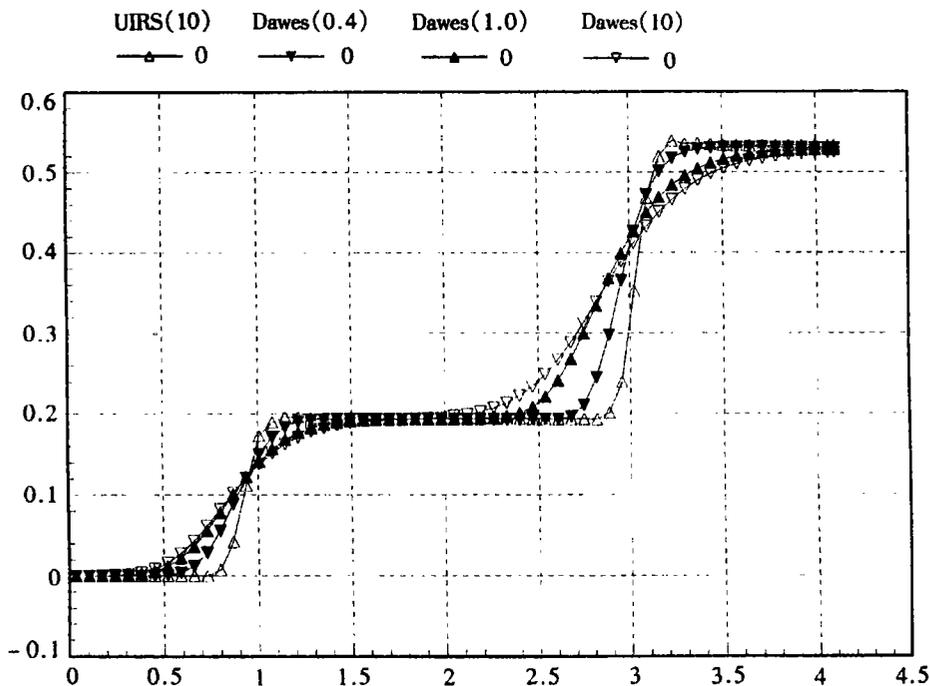


图 1 2-D 反射激波流压力系数

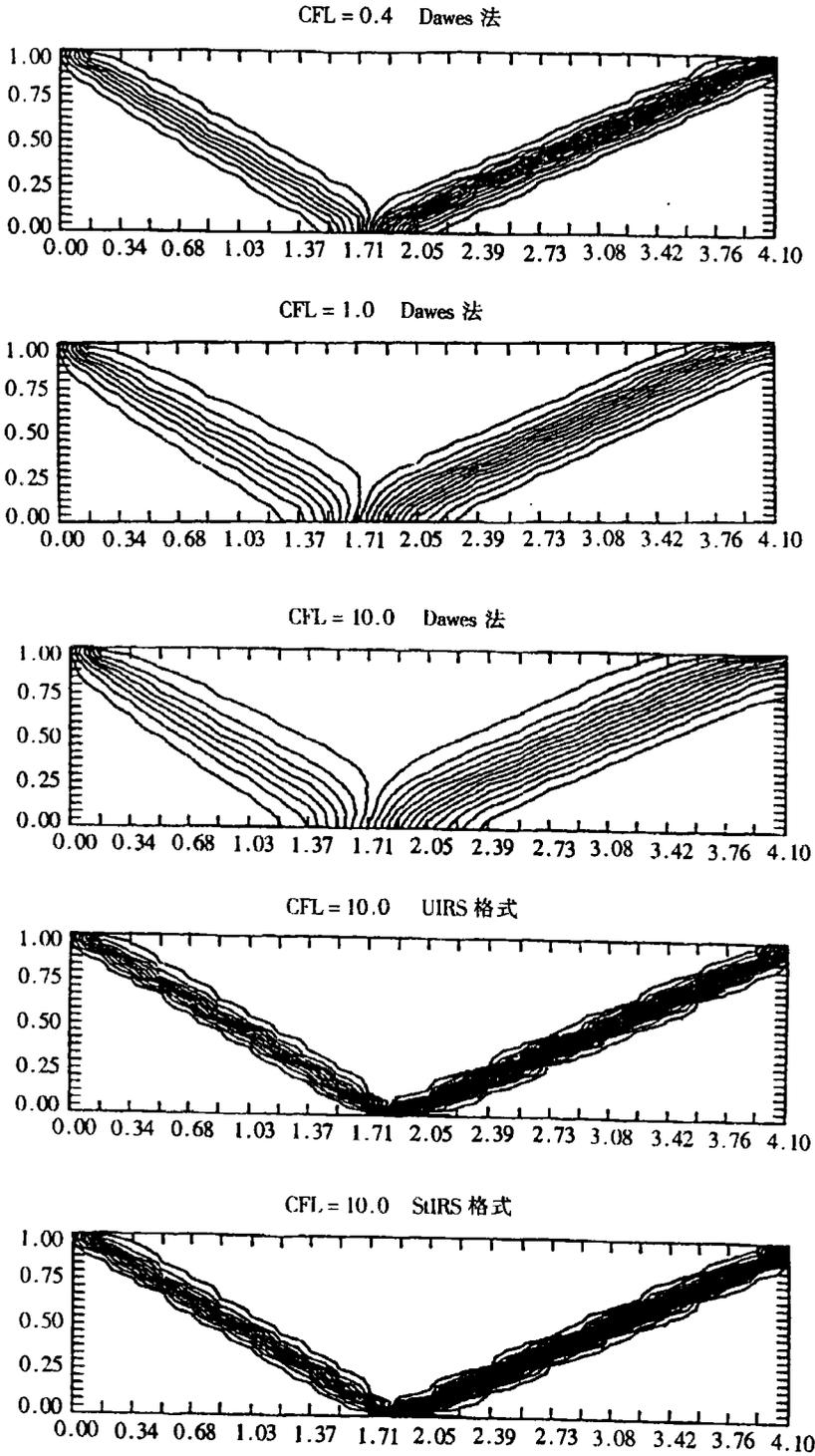


图2 二维反射激波场等压力线图

## 4 结 论

1. 参照 Lax-Wendroff 格式构造方法,对双曲型方程、抛物型方程和双曲-抛物方程,本文构造了新的 IRS 格式,该格式有二阶或三阶时间精度,且大大拓宽了显式格式的稳定性范围。

2. 本文发展了中心加权型和迎风偏向型两种 IRS 格式来求解流场,由于存在与时间步长有关的格式粘性,文章证明了中心加权型 Lax-Wendroff IRS 格式对稳定和粘性流场的求解存在着局限性。

3. 本文证明了在透平机械中获得广泛应用的 Dawes 隐式法类似于单步 Lax-Wendroff 型 IRS 格式,对稳定和粘性流场的求解也存在着局限性。

4. 本文用 Dawes 隐式法、Jameson 标准 IRS 及本文发展的偏迎风 IRS 格式结合 Yee 的二阶精度对称 TVD 格式,在不同 CFL 数下对反射激波流场求解的结果支持本文的分析结论。

### [参 考 文 献]

- [1] 傅德薰. 流体力学数值模拟[M]. 北京:国防工业出版社,1993.
- [2] Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1: *Fundamental of Numerical Discretization*[M]. Chichester: John Wiley and Sons,1988.
- [3] MacCormack R W. Current status of numerical solutions of Navier-Stokes equations[Z]. AIAA Paper, 85-032,1985.
- [4] Jameson A, Baker T J. Solution of the Euler equations for complex configurations[Z]. AIAA Paper, 83-1929,1983.
- [5] Blazek J, Kroll N, Rossow C C. A comparison of several implicit residual smoothing methods[A]. In: *ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*[C]. UK: Reading,1992.
- [6] Lax P D, Wendroff B. Systems of conservation laws[J]. *Comm Pure Appl Math*,1960,13(1):217.
- [7] Dawes W N. Application of a three-dimensional viscous compressible flow solver to a high-speed centrifugal rotor-secondary flow and loss generation[Z]. IMechE, C261/87,1987.
- [8] Yee H C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications[J]. *J Comput Phys*,1987,68(1):151 ~ 179.
- [9] Yee H C. High-resolution shock-capturing schemes for inviscid and viscous hypersonic flows[J]. *J Comput Phys*,1990,88(1):31 ~ 61.
- [10] Pullium T H, Chaussee D S. A diagonal form of an implicit approximate factorization algorithm[J]. *J Comput Phys*,1981,39(2):347 ~ 363.
- [11] Chakravathy S R. Relaxation methods for unfactored implicit upwind schemes[Z]. AIAA Paper, 84-0165,1984.
- [12] Hathaway M D, Criss R M, Wood J R, et al. Experimental and computational investigation of the NASA low-speed centrifugal compressor flow field[J]. *ASME J Turbomachinery*,1993,115(3):527 ~ 542.
- [13] Storer J A, Cumpsty N A. Tip leakage flow in axial compressors[J]. *ASME J Turbomachinery*,1991,113(2):252 ~ 259.
- [14] Krain H, Hoffman W. Verification of an impeller design by laser measurements and 3D-viscous flow calculations[Z]. ASME,89-GT-159,1989.
- [15] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *J Comput Phys*,1983,49(2):357 ~ 393.

- [16] Sweby P K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1984, 21(5):995 ~ 1011.

## Construction of High-Order Accuracy Implicit Residual Smoothing Schemes

Ni Mingjiu, Xi Guang, Wang Shangjin

(*School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong  
University, Xi'an 710049, P R China*)

**Abstract:** Referring to the construction way of Lax-Wendroff scheme, new IRS (Implicit Residual Smoothing) schemes have been developed for hyperbolic, parabolic and hyper-parabolic equations. These IRS schemes have 2nd- or 3rd-order time accuracy, and can extend the stability region of basic explicit time-stepping scheme greatly and thus can permit higher CFL number in the calculation of flow field. The central smoothing and upwind-bias smoothing techniques have been developed too. Based on one-dimensional linear model equation, it has been found that the scheme is unconditionally stable according to the von-Neumann analysis. The limitation of Dawes' method, which has been applied in turbomachinery widedspreadly, has been discussed on solving steady flow and viscous flow. It is shown that stable solution of this method is not completely independent with the value of time step. In the end, numerical results by using IRS schemes and Dawes' method as well as TVD (total variation diminishing) scheme and four-stage Runge-Kutta technique are presented to verify the analytical conclusions.

**Key words:** IRS scheme; four-stage Runge-Kutta technique, TVD scheme