

文章编号:1000-0887(2000)04-0357-08

热载荷作用下平面裂纹问题的奇异积分方程与边界元法

徐春晖, 秦太验, 华云龙

(中国农业大学 基础科学部,北京 100083)

(王银邦推荐)

摘要: 从边界积分方程出发,导出了二维裂纹体热传导问题及热弹性问题的积分方程组,继而使用奇异积分方程与边界元相结合的方法,为其建立了相应的数值求解方法.此外,利用奇异积分方程的主部分分析法,严格地证明了裂纹尖端温度梯度场的 $1/\sqrt{r}$ 奇异性,并且给出了奇性温度梯度场的精确解.最后,对一些典型例子,做了数值计算.

关键词: 热传导; 裂纹; 奇异积分方程; 边界元; 应力强度因子

中图分类号: O241;O346.1;O343.6 **文献标识码:** A

许多农产品和食品的加工、贮藏都需要一定的温度条件,工程中的结构和部件也常常工作于变温的环境中.温度的改变可以导致热应力的产生,同时,在物体内部又不可避免地有类似裂纹的缺陷存在,热应力和裂纹之间的相互作用,可能导致裂纹的扩展,甚至断裂,造成不必要的损失.因此,研究热应力载荷作用下的裂纹问题具有重要的理论价值和实际意义.

早在40年代 Motz^[1]首先研究了具有狭长裂纹方形板的拉普拉斯问题,并发现了裂纹尖端附近温度梯度的 $1/\sqrt{r}$ 奇异性;在研究温度场作用下裂纹问题有关文献中,使用较多的是有限元法^[2]和边界元交替法^[3].此外,在断裂力学中发展了一种由边界积分方程演化来的奇异积分方程和超奇异积分方程方法,这两种方法操作比较规范,解析性比较理想,在目前断裂力学中应用较广^[4-6],但在热断裂力学中应用较少,还未见这方面的文献报导.本文使用奇异积分方程与边界元法相结合,分析了稳态、瞬态热传导问题及热载荷作用下的平面裂纹问题,给出了问题的一般解,并在此基础上,将该问题归结为一组混合型积分方程组,并为其建立了相应的数值方法,这一方法在裂纹尖端做相应的解析与数值处理,可以较精确地模拟裂纹尖端附近温度梯度及应力的奇异性,所以可以达到很好的数值精度.此外,使用奇异积分方程的主部分分析法和渐近分析法,得到了裂纹尖端附近温度梯度的具体表达式.最后,对一些典型例子进行了计算,获得了应力强度因子的数值结果.

1 二维裂纹体热传导及热弹性问题的一般解

1.1 热传导问题

- 收稿日期: 1998-05-11; 修订日期: 1999-11-23
- 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672010)
- 作者简介: 徐春晖(1971~),女,辽宁人,讲师,硕士.

考虑含裂纹的二维有限弹性体,裂纹线与坐标系的 Ox_1 轴重合,如图1所示. 边界 Γ 上给定温度 T 或温度梯度 q ,裂纹上下表面绝热,则区域内任意一点的温度为^[7]

$$T(p, t) = -k \int_{\Gamma} \int_{\tau} q^*(p, t; Q, \tau) T(Q, \tau) d\Gamma(Q) d\tau - k \int_{\tau} \int_a^b q^*(p, t; \xi_1, +0, \tau) \bar{T}(\xi_1, \tau) d\xi_1 d\tau + k \int_{\tau} \int_{\Gamma} T^*(p, t; Q, \tau) q(Q, \tau) d\Gamma(Q) d\tau + \int_{\Omega} T^*(p, t; Q, \tau) T_{i_0}(Q) d\Omega(Q), \quad (1)$$

其中, $\bar{T}(\xi_1, t) = T(\xi_1, 0+; t) - T(\xi_1, 0-; t)$ 为裂纹面上温度间断,

$$T^*(p, t; Q, \tau) = \frac{1}{4\pi k(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(t-\tau)}\right],$$

$$q^*(p, t; Q, \tau) = \frac{\partial}{\partial n} T^*(p, t; Q, \tau),$$

上式 k 为传热系数, r 为内点 $p(x_1, x_2)$ 与边界点 $Q(\xi_1, \xi_2)$ 或裂纹上点 $(\xi_1, 0)$ 的距离.

对于稳态热传导问题,式(1)可简化为

$$T(p) = \int_{\Gamma} T^*(p, Q) q(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} q^*(p, Q) T(Q) d\Gamma(Q) - \frac{1}{2\pi} \int_a^b \arctan \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} f(\xi_1) d\xi_1, \quad (2)$$

式中,

$$T^*(p, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad q^*(p, Q) = \frac{\partial T^*(p, Q)}{\partial n},$$

$$f(\xi_1) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} [T(\xi_1, 0+) - T(\xi_1, 0-)].$$

在温度表达式中,未知函数为裂纹上的 $\bar{T}(Q, t)$ 或 $f(\xi_1)$ 及边界 Γ 上的 T 或 q ,如果求得这些未知量,便可求得区域内任意一点的温度,于是问题得到解决.

1.2 热弹性问题

考虑图1所示平面裂纹热弹性问题,边界 Γ 上给定外应力载荷 t_i 或位移 u_i^{Γ} ,对于瞬态温度场作用下的裂纹问题,只考虑温度随时间变化不是很剧烈时的准静力问题,这时,两种温度场作用下的平面裂纹问题位移及应力在表达形式上完全类似,这里统一给出.

记裂纹上位移间断的偏导数为:

$$g_k(x_1, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} [u_k(x_1, 0+; t) - u_k(x_1, 0-; t)] \quad a < x_1 < b,$$

则区域内任意一点 P 处的位移为^[7]:

$$u_k(p, t) = \int_{\Gamma} U_{ki}(p, t; Q, t_0) t_i(Q, t_0) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ki}(p, t; Q, t_0) u_i(Q, t_0) d\Gamma(Q) +$$

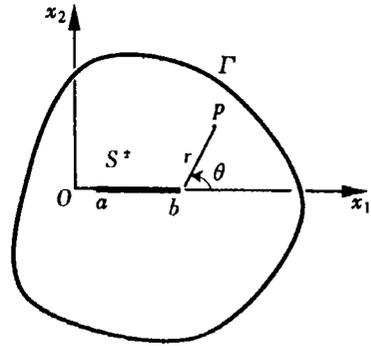


图1 含裂纹二维有限弹性体

$$\int_a^b B_{ki}(p, t; \xi_1, t_0) g_i(\xi_1, t_0) d\xi_1 + \int_{\Gamma} P_k(p, t; Q, t_0) T(Q, t_0) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} Q_k(p, t; Q, t_0) q(Q, t_0) d\Gamma(Q) - \int_a^b D_k(p, t; \xi_1, t_0) f(\xi_1, t_0) d\xi_1$$

$$k, i = 1, 2, \quad (3)$$

式中, $U_{ki}(p, t; Q, t_0)$, $T_{ki}(p, t; Q, t_0)$, $P_k(p, t; Q, t_0)$, $Q_k(p, t; Q, t_0)$ 均为已知的核函数, 参见文献[7], B_{ki} 和 D_k 由下式决定

$$B_{11}(p, t; \xi_1, t_0) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-\nu) \arctan \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} + r_{,1} r_{,2} \right],$$

$$B_{12}(p, t; \xi_1, t_0) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu) \ln r + r_{,2}^2],$$

$$B_{21}(p, t; \xi_1, t_0) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} [-(1-2\nu) \ln r + r_{,2}^2],$$

$$B_{22}(p, t; \xi_1, t_0) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \arctan \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} - r_{,1} r_{,2} \right],$$

$$D_1(p, t; \xi_1, t_0) = \frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} (-x_2 \ln r),$$

$$D_2(p, t; \xi_1, t_0) = \frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left[(\xi_1 - x_1) \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + 2x_2 \arctan \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} \right],$$

其中, α 为材料的线膨胀系数。

在位移表达式(3)中, 未知函数为裂纹上的 $g_k(\xi_1)$, 边界 Γ 上的位移 u_i 或应力 t_i , 如果求得这些未知量, 便可求得区域内任意一点的位移和应力。

2 积分方程组

利用裂纹上的边界条件及奇异积分方程方法, 可得在裂纹上的奇异积分方程; 另外, 在温度表达式以及位移表达式中, 令内点 p 趋向于边界 Γ 上的点 P , 则得到边界积分方程, 下面将分别给出问题的奇异积分方程和边界积分方程。

2.1 热传导方程

将时间分割成步长 $\Delta t = t_2 - t_1$, T, q, \bar{T} 取为时间步长上的常数, 与时间有关的积分用解析法算出, 可得瞬态热传导问题的积分方程组为:

$$\int_{\Gamma} \frac{\exp(-\zeta)}{r^2} \left(2 \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \frac{\partial r}{\partial n} (1 + \zeta) - n_{\xi_2} \right) T(Q, t_2) d\Gamma(Q) - \int_a^b G_2(P, \xi_1) f(\xi_1, t_2) d\xi_1 =$$

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi_2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{r^{2n-1}}{[4k(t_2 - t_1)]^{n_1} n!} \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right] q(Q, t_2) d\Gamma(Q) +$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2k\Delta t} \exp(-\zeta) \frac{2r}{4k\Delta t} \frac{\partial r}{\partial \xi_2} T_1(Q) d\Omega(Q), \quad a < x_1 < b, \quad (4)$$

$$C(P) T(P, t_2) - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \exp(-\zeta) T(Q, t_2) d\Gamma(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_a^b G(P, \xi_1) f(\xi_1, t_2) d\xi_1 =$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} E_i(\zeta) q(Q, t_2) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} T^*(P, t_2; Q, t_1) T_1(Q) d\Omega(Q) \quad P \in \Gamma, \quad (5)$$

其中

$$\zeta = \frac{r^2}{4k(t_2 - t_1)}, \quad G(P, \xi_1) = \int_r^1 \frac{\partial r}{\partial n} \exp(-\zeta) d\xi,$$

$$G_2(P, \xi_1) = \int \frac{\exp(-\zeta)}{r^2} \left(2 \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \frac{\partial r}{\partial n} (1 + \zeta) - n_{\xi_2} \right) d\xi_1.$$

未知函数 $f(\xi, t_2)$ 除了满足积分方程(4)和(5)之外,还应满足如下条件:

$$\int_a^b f(\xi_1, t) d\xi_1 = 0 \quad t \geq 0. \quad (6)$$

对于稳态热传导问题,式(4)和(5)可简化为

$$\int_{\Gamma} \frac{\xi_2}{r^2} q(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{2(\xi_1 - x_1)\xi_2}{r^4} n_{\xi_1} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\xi_2^2}{r^4} \right) n_{\xi_2} \right] T(Q) d\Gamma(Q) + \int_a^b \frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - x_1} d\xi_1 = 0 \quad a < x_1 < b, \quad (7)$$

$$C(P)T(P) + \int_{\Gamma} q^*(P, Q)T(Q) d\Gamma(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \arctan \frac{\xi_1 - x_1}{x_2} f(\xi) d\xi = \int_{\Gamma} T^*(P, Q)q(Q) d\Gamma(Q) \quad P \in \Gamma, \quad (8)$$

上式中, $C(P)$ 为与边界点 P 有关的系数.

2.2 热弹性问题

对于两种温度场作用下的平面裂纹问题,这里统一给出其积分方程组

$$\int_{\Gamma} S_{ki2}(P, t; Q, \tau) u_k(Q, \tau) d\Gamma(Q) - \int_a^b B_{ki2}(P, t; \xi_1, \tau) g_k(\xi_1, \tau) d\xi_1 = \int_{\Gamma} D_{ki2}(P, t; Q, \tau) t_k(Q, \tau) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} D_{i2}(P, t; Q, \tau) T(Q, \tau) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} S_{i2}(P, t; Q, \tau) q(Q, \tau) d\Gamma(Q) - \int_a^b B_{i2}(P, t; Q, \tau) f(\xi, \tau) d\xi - \beta T(P) \delta_{i2} \quad P \in S^+, \quad (9)$$

$$C_{ik}(P) u_k(P, t) - \int_{\Gamma} U_{ik}(P, Q) t_k(Q, t) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} T_{ik}(P, Q) u_k(Q, t) d\Gamma(Q) - \int_a^b B_{ik}(P, \xi_1) g_k(\xi_1, t) d\xi_1 - \int_{\Gamma} P_i(P, Q) T(Q, t) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} Q_i(P, Q) q(Q, t) d\Gamma(Q) + \int_a^b D_i(P, Q) f(\xi_1, t) d\xi_1 = 0 \quad (P \in \Gamma), \quad (10)$$

式中, $S_{ki2}(P, t; Q, \tau)$, $D_{ki2}(P, t; Q, \tau)$, $D_{i2}(P, t; Q, \tau)$, $S_{i2}(P, t; Q, \tau)$ 均为已知函数,可参见文献[7], B_{ki2} 和 B_{i2} 由下式决定

$$B_{112}(P, t; Q, \tau) = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \frac{1}{\xi_1 - x_1},$$

$$B_{222}(P, t; Q, \tau) = -\frac{(1-4\nu)E}{4\pi(1-\nu^2)} \frac{1}{\xi_1 - x_1},$$

$$B_{122}(P, t; Q, \tau) = B_{212}(P, t; Q, \tau) = 0,$$

$$B_{12}(P, t; Q, \tau) = \frac{\alpha E}{4\pi(1-\nu)} \ln |\xi_1 - x_1|,$$

$$B_{22}(P, t; Q, \tau) = 0.$$

此外, $g_k(\xi_1, t)$ 还应满足如下条件

$$\int_a^b g_k(\xi_1, t) d\xi_1 = 0. \quad (11)$$

在热传导问题中,积分方程(4)和(7)是奇异积分方程,(5)和(8)是普通的边界积分方程,

使用奇异积分方程与边界元法相结合,来求解这组积分方程,便可解得裂纹上的 $f(\xi_1, t)$ 及边界 Γ 上未知 T 或 q , 代回温度表达式中,可得到区域内任意一点的温度分布. 与热传导问题相似,在热弹性问题中,积分方程(9)是奇异积分方程,(10)是普通的边界积分方程,使用奇异积分方程与边界元法相结合来求解这组积分方程,若解得未知的 $g_k(\xi)$ 、 t_1 和 t_2 或 u_1 和 u_2 , 则问题得以解决.

3 裂纹尖端奇性温度梯度场

这里就稳态热传导问题,证明了裂纹尖端附近温度梯度的性质,并给出了奇性温度梯度场的具体表达式. 根据 Cauchy 积分端点的性质^[8],可设

$$f(\xi_1) = g(\xi_1)(b - \xi_1)^\mu(\xi_1 - a)^\beta \quad a < \xi_1 < b, \quad -1 < \mu, \beta < 0.$$

当 $\xi_1 \rightarrow b^-$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - x_1} d\xi_1 = g(b)(b - a)^\beta(b - x_1)^\mu \cot\pi\mu + H(x_1), \quad (12)$$

其中, $H(x_1)$ 为有界函数.

由(7)式知, $\cot\pi\mu = 0$, 得

$$\mu = -1/2,$$

同理,

$$\beta = -1/2.$$

于是,得到

$$f(\xi_1) = g(\xi_1)(b - \xi_1)^{-1/2}(\xi_1 - a)^{-1/2}. \quad (13)$$

如图 1 所示,在裂纹尖端附近一点 $p(x_1, x_2)$, 其坐标为

$$x_1 = b + r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta.$$

令 $z_1 = x_1 - ix_2, z_2 = x_1 + ix_2$, 利用性质(13), 由(2)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(p)}{\partial x_1} &\approx -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2i} \left[\int_a^b \frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1 - \int_a^b \frac{f(\xi_1)}{\xi_1 - z_2} d\xi_1 \right] = \\ &\frac{1}{2} g(b)(b - a)^{-1/2} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

同理可得

$$\frac{\partial T(p)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} g(b)(b - a)^{-1/2} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (15)$$

(14)、(15)即为裂纹尖端附近温度梯度场的精确表达式.

4 数值方法及应力强度因子计算公式

对于热传导问题及温度场作用下的热弹性问题,由于不考虑热变形对热传导的影响,所以热传导问题可独立求解. 在两种问题所得到的积分方程组中,边界 Γ 上是普通的边界积分,而在裂纹上的积分则有奇异性,这里采用奇异积分与边界元法相结合来求解. 对于边界 Γ 上的积分采用普通的边界单元法进行离散,详细过程这里不再说明. 对于裂纹上的积分,采用 Cauchy-Chebyshev 求积公式^[8],为此引入量纲为一的参数

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c\eta + d, \quad \xi_1 = c\lambda + d, \\ f(\xi_1) &= T_0\phi(\lambda)/c, \quad g_k(\lambda) = \phi_k(\lambda)/c, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $c = (b - a)/2, d = (b + a)/2$.

设函数

$$\phi(\lambda) = F(\lambda)\omega(\lambda), \phi_k(\lambda) = G_k(\lambda)\omega(\lambda), \quad (17)$$

式中 $\omega(\lambda) = (1 - \lambda^2)^{1/2} \quad (-1 \leq \lambda \leq 1)$.

利用文献[8]介绍的方法,则裂纹上的积分可由如下公式计算

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\lambda)}{\lambda - \eta_i} d\lambda &\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{F(\lambda_j)}{\lambda_j - \eta_i}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_k(\lambda)}{\lambda - \eta_i} d\lambda &\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{G_k(\lambda_j)}{\lambda_j - \eta_i}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中

$$\lambda_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\eta_i = \cos \frac{i}{n} \pi \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

由此可将积分方程组化为一组线性代数方程,限于篇幅,这里不给出具体表达式.解这组代数方程,可求得边界 Γ 和裂纹面上所有的未知函数,由此可求得裂纹端部的应力强度因子:

$$K_{Ia} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{c} G_1(-1), \quad K_{Ib} = -\frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{c} G_1(1),$$

$$K_{IIa} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{c} G_2(-1), \quad K_{IIb} = -\frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{c} G_2(1),$$

其中 E, ν 分别为材料的弹性模量和泊松比.

5 数值结果

为了说明前面介绍的方法的应用,计算了几个数值例子的应力强度因子.

例1 热载荷作用下带中心裂纹的矩形区域

考虑带裂纹的矩形区域,其边界条件如图2所示.裂纹上为绝热条件.表1给出了裂纹长度对区域内 OC 线上温度的影响.由表1可见,裂纹长度相同时,内点距离裂纹越近,则对温度的影响越大;对于相同的内点,裂纹越大,则对温度的影响越大.

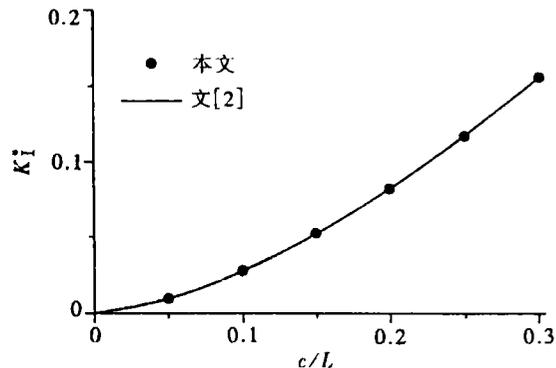
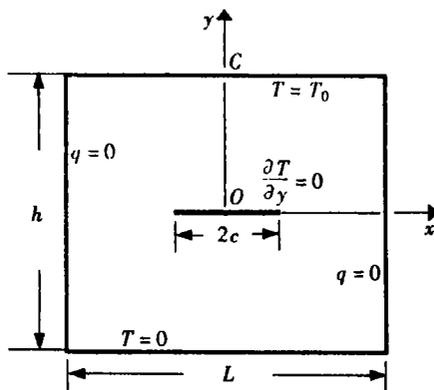


图2 带中心裂纹的矩形区域

图3 温度场作用下的矩形区域中心裂纹结果比较

带中心裂纹的方形区域,不受其它外力,在本例中温度场作用下,裂纹尖端处于 I 型断裂

状态,裂纹的量纲为一的应力强度因子 $K_I^* = K_I/\alpha T_0 E\sqrt{c}$ 随裂纹长度的变化见图 3。由图可见,本文结果与 Hellen 等^[2] 用有限元法获得的结果符合得很好。

例 2 带裂纹矩形区域瞬态问题

带裂纹矩形区域瞬态热传导的初始条件和边界条件见图 4,裂纹上为绝热条件,热弹性边界条件见图 5。其中 $t^* = kt/L^2$, 取 $\alpha T_1 E = P_0$ 。记 $K_I^* = K_I/P_0\sqrt{c}$, $K_{II}^* = K_{II}/P_0\sqrt{c}$ 。不同时刻应力强度因子随裂纹长度变化值如表 2 所示。

表 1 裂纹长度对内点温度的影响 (T/T_0) ($L = h$)

$(x/L, y/L)$	(0.0,0.1)	(0.0,0.2)	(0.0,0.3)	(0.0,0.4)
无裂纹	0.6	0.7	0.8	0.9
$c/L = 0.1$	0.639	0.720	0.811	0.905
$c/L = 0.2$	0.711	0.766	0.838	0.918
$c/L = 0.3$	0.781	0.818	0.872	0.934
$c/L = 0.4$	0.844	0.869	0.907	0.952

表 2 K_I^* 随时间及裂纹长度变化值 ($L = h$)

	$c/L = 0.1$	$c/L = 0.2$	$c/L = 0.3$	$c/L = 0.4$
$t^* = 0.2$	4.755 7	4.758 7	4.761 3	4.767 8
$t^* = 0.3$	4.113 6	4.122 3	4.133 0	4.149 2
$t^* = 0.4$	4.033 6	4.044 1	4.055 7	4.066 2
$t^* \rightarrow \infty$	4.022 0	4.033 3	4.044 9	4.057 6

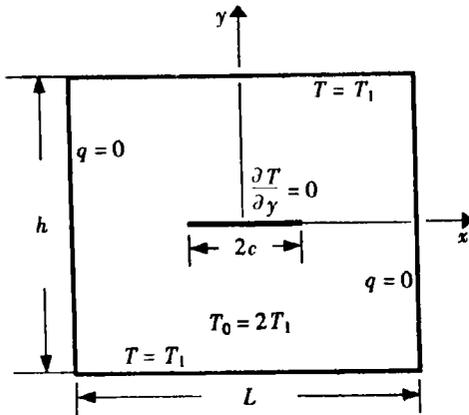


图 4

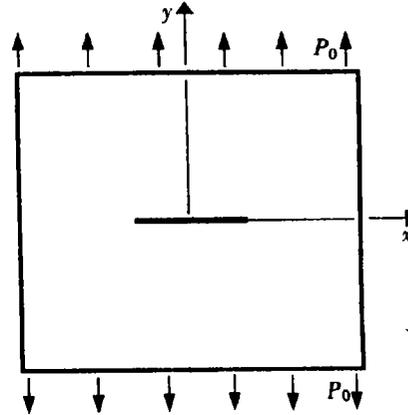


图 5

6 结 论

通过以上分析,得出如下结论:

- (1) 通过与其它方法的比较,可以看出本文方法的正确性。同时,由于本方法在裂纹尖端

做相应的解析与数值处理,可以很好地模拟裂纹尖端附近温度梯度及应力的奇异性,所以可以达到较高的数值精度。

(2) 由数值算例的计算结果,可以看到温度场对裂纹尖端应力强度因子的影响。一般来讲,对于瞬态问题,在初始时刻,应力强度因子随时间的变化较大,其后随时间的变化,逐步趋于稳定。

[参 考 文 献]

- [1] Motz H. The treatment of singularities of partial differential equation by relaxation methods[J]. *Quart J Appl Meth*, 1946, 4(4): 371 ~ 377.
- [2] Hellen T K, Cesari F, Maitan A. The application of fracture mechanics in thermally stressed structure [J]. *Int J Pres Ves Piping*, 1982, 10(2): 181 ~ 204.
- [3] Chen W H, Tu Y M. Thermal analysis for 2D fracture problems using the BE alternating method[J]. *Comput Struct*, 1993, 50(3): 401 ~ 408.
- [4] 汤任基. 断裂力学中的两类奇异积分方程[J]. 上海交通大学学报, 1990, 24: (5/6): 36 ~ 45.
- [5] Kaya A C, Erdogan F. On the solution of integral equation with singular kernels[J]. *Quart Appl Math*, 1987, 45(1): 105 ~ 122.
- [6] Qin T Y, Tang R J. Finite-part integral and boundary element method to solve embedded planar crack problems[J]. *Int J Fracture*, 1993, 60(3): 373 ~ 381.
- [7] 王元淳. 平面非正常热弹性问题的边界元分析[J]. 上海交通大学学报, 1988, 22(2): 48 ~ 51.
- [8] Erdogan F. Mixed boundary value problems[A]. In: Nemat-Nasser S Ed. *Mechanics Today*, Vol. 4, New York: Pergamon Press, 1978, 1 ~ 86.

Singular Integral Equations and Boundary Element Method of Cracks in Thermally Stressed Planar Solids

Xu Chunhui, Qin Taiyan, Hua Yunlong

(Department of Basic Sciences, China Agricultural University, Beijing 100083, P R China)

Abstract: Using the method of the boundary integral equation, a set of singular integral equations of the heat transfer problems and the thermo-elastic problems of a crack embedded in a two-dimensional finite body is derived, and then its numerical method is proposed by the numerical method of the singular integral equations combined with boundary element method. Moreover, the singular nature of temperature gradient field near the crack front is proved by the main-part analysis method of the singular integral equation, and the singular temperature gradients are exactly obtained. Finally, several typical examples are calculated.

Key words: heat transfer; crack; singular equation; boundary element method; stress intensity factor