应用数学和力学,第 21 卷 第 4 期(2000 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2000)04-0348-05

具有稠密临界轨道和预不动临界轨道的单峰映射的丰富性*

曹永罗[1], 王兰宇[2]

(1. 苏州大学 数学系,苏州 215006; 2. 中国科学院 数学研究所,北京 100080)

(刘曾荣推荐)

摘要: 证明了对于实二次族在参数空间存在正 Lebesgue 测度集合 E,使得 E 中几乎所有的参数,相应的映射在不变测度的支集上具有稠密的临界轨道;还证明了 E 中存在稠密集合使得相应映射的临界轨道进入它的反向不动点.

关 键 词: 单峰映射; 二次族; 不变测度

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A

引 言

一维动力系统的一个主要问题就是研究区间映射的吸引子——吸引子的分类与结构. 按照 Milnor 关于吸引子的定义[1],如果 f 是具有负的 Schwarz 导数的单峰映射,由 Guckenheimer 的定理[2],f 的拓扑吸引子是传递的且是下述三种情形之一:

1. f 具有周期吸引子.

2. f 具有螺线管吸引子:f 是无限可重正化的并且临界点的轨道的闭包是一个 Cantor 集.

3. f 是有限可重正化的并且 f 的吸引子是有限个传递区间的并.

3a. $\omega(c)$ 恰是传递区间的并.

3b. $\omega(c)$ 是一个 Cantor 集.

根据 Blokh 和 Lyubich 的文[3],吸引子的度量分类与它的拓扑分类除去情形 3b 外都是一致的. 对于情形 3b,不同的 f 可以有非常不同的动力学性质:f 具有绝对连续不变测度,见[4];f 具有吸收 Cantor 吸引子,见[5].

一维动力系统的另一个重要问题是研究具有某种拓扑或度量性质的系统在参数空间的丰富性. Jakobson 于 1981 年[6]证明了对于实二次族 $f_a(x) = 1 - ax^2$,在参数空间存在正 Lebesgue 测度集合 E 使得 E 中的映射具有绝对连续的不变测度. Benedicks 和 Carleson 也用不同方法证明了这一结论[7]. 众所周知,如果 f 具有绝对连续的不变测度,那么 f 的吸引子属于情形 3a,即有限个传递区间的并. 因此具有第三种情形吸引子的系统在参数空间是丰富的(具有正 Lebesgue 测度),但是人们不清楚具有 3a 情形或 3b 情形的吸引子的系统是否在参数空间具有

* 收稿日期: 1998-11-20; 修订日期: 1999-10-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19501030)
作者简介: 曹永罗(1967~),江苏东台人,副教授,博士.

丰富性.

本文将考虑二次族 $f_a(x) = 1 - ax^2$ 中 3a 情形吸引子的丰富性,得到以下结果:

设 E 为 Benedicks, Carleson 和 Mora, Viana 在 $a = 2$ 附近构造的正 Lebesgue 测度集合,见[8]、[9].

定理 A 设 f_a 与 E 如上定义. 存在集合 $E_0 \subset E$ 并且 $m(E_0) = m(E)$,使得对任何 $a \in E_0$, $\{f_a^n(1)\}_{n\geqslant 0}$ 在 $[f_a^2(0), 1]$ 中稠密.

定理 B 设 f_a 同上,令

$$E_1 = \{a \mid a \in [0,2], f_a^i(1) = p_a \text{ 对于某个 } i \geqslant 0\}.$$

则 E_1 满足 $E \subset \bar{E}_1$,这里 p_a 是 f_a 的反向不动点.

从定理 A 和定理 B 的证明中可以看出,对于 Thieullen、Tresser 和 Young[10] 等考虑的单峰映射的通有单参数族来讲,定理 A 和定理 B 的结论仍然成立. 在本节的最后,我们提出以下猜测:

猜测 设

$$M = \{a \in [0,2] \mid f_a \text{ 具有绝对连续不变测度 } \mu_a\},$$

则存在集合 $M_0 \subset M$ 且 $m(M_0) = m(M)$,使得 $\{f_a^n(1)\}_{n\geqslant 0}$ 在 μ_a 的支集中稠密, $\forall\, a \in M_0$.

上述定义和记号都可以在文献[11]中找到.

1 参数集合 E 的性质

本节我们将给出参数集合 E 的一些性质,这里 E 是 Benedicks, Carleson[8] 和 Mora, Viana[9] 在参数空间构造的集合. 这些性质很强地依赖于 E 的构造. 由于 E 的构造相当复杂,我们仅陈述以下引理,证明可参见[8] 和[9].

引理 1 设 $f_a(x) = 1 - ax^2$,任意给定充分小的 $\delta > 0$,存在 $\varepsilon_0(\delta) > 0$ 和正 Lebesgue 测度参数集合 $E \subset [2 - \varepsilon_0, 2]$ 使得对于任意 $a \in E$,都存在一个无穷上升数列 $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和一个无穷下降的参数区间序列 $\{\omega_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 满足

(i) $a \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \omega_{n_i}$, $|\omega_{n_i}| \to 0$, 当 $i \to \infty$ 时.

(ii) $|f_{\omega_{n_i}}^{n_i}(1)| > \delta^{1/2}$.

(iii) 存在常数 $A > 1$ 使得

$$A^{-1} \leqslant \left| \frac{\partial f_{a_1}^{n_i}(1)}{\partial a} \bigg/ \frac{\partial f_{a_2}^{n_i}(1)}{\partial a} \right| \leqslant A,$$

对于任意 $a_1, a_2 \in \omega_{n_i}$ 都成立.

注记 文献[8]和[9]证明了对任何 $a \in E$, f_a 在临界值处具有正 Liapunov 指数,从而 f_a 具有绝对连续不变测度.

2 定理 A 和定理 B 的证明

本节将证明定理 A 和定理 B,它们的证明依赖于第 1 节中描述的参数集合 E 的性质. 首先阐述几个基本引理.

引理 2 对于 $f_2(x) = 1 - 2x^2$,它的反向不动点 p_2 的原象在 $[-1,1]$ 中稠密.

上述引理是一个简单事实，下面给出证明的细节.

证明　考虑帐蓬映射

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 若 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 2-2x, & 若 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

设 p 为 T_2 的反向不动点并且记

$$P = \{x \in [0,1] \mid 存在某个 n \geqslant 0 使得 T_2^n(x) = p\}$$

为 p 的所有原象构成的集合．我们将证明 P 在$[0,1]$中稠密．

注意到 0 是 T_2 的反向不动点，容易看出 P 中存在点列$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$满足

$$T_2^i(x_i) = p,\ \lim_{i\to\infty} x_i = 0,$$

断言 P 在$[0,1]$中稠密．事实上，对于任何$[0,1]$中的区间 J，由于 T_2 是分段线性扩张的，故存在 $m \geqslant 0$ 使得 $1/2 \in T_2^m(J)$，因此 $0 \in T_2^{m+2}(J)$ 并且可以找到 $x_i \in T_2^{m+2}(J)$，这说明 $P \cap J \neq \emptyset$．

现在利用 T_2 和 f_2 间的共轭就可导出引理 2 的证明．

引理 3　设 $f_a(x) = 1 - ax^2$，给定 $\delta > 0$，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $N > 0$ 使得对于任何 $a \in [2-\varepsilon, 2]$ 和区间 $J \subset [-1,1]$，如果 $|J| \geqslant 2\delta$，则 J 至少包含集合$\{f_a^{-i}(p_a)\}_{0 \leqslant i \leqslant N}$中的一个点，进一步，

$$|f_a^{-i}(p_a) - f_2^{-i}(p_2)| \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant i \leqslant N.$$

其中 p_a 为 f_a 的反向不动点．

证明　由引理 2，$\{f_2^{-n}(p_2)\}_{n \geqslant 0}$ 在$[-1,1]$中稠密．可以找到 $N \geqslant 0$ 使得对于任意长度大于 δ 的区间，它至少包含集合$\{f_2^{-i}(p_2)\}_{0 \leqslant i \leqslant N}$中的一个点．因为 p_2 是 f_2 的反向不动点，若 $\varepsilon > 0$ 充分小，则对于任何 $a \in [2-\varepsilon, 2]$，f_a 的反向不动点 p_a 为 p_2 的延拓．利用映射关于参数的连续依赖性可以选取 ε 充分小使得对任何 $a \in [2-\varepsilon, 2]$，有

$$|f_a^{-i}(p_a) - f_2^{-i}(p_2)| \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant i \leqslant N,$$

其中 $f_a^{-i}(p_a)$ 是 $f_2^{-i}(p_2)$ 的延拓．

下面完成引理的证明．对于 $a \in [2-\varepsilon, 2]$，$J \subset [-1,1]$ 为长度大于 2δ 的区间，上面证明了存在点 $f_2^{-j}(p_2) \in J$，$0 \leqslant j \leqslant N$，于是由 ε 的选取，存在点 $f_a^{-j}(p_a)$ 为 $f_2^{-j}(p_2)$ 的延拓，它属于 J．

注记　如果 J 接近$[-1,1]$的边界，上述证明需要稍作改动，这里从略．

下面证明定理 A 和定理 B.

定理 A 的证明　对于充分小的 $\delta > 0$，$E \subset [2-\varepsilon, 2]$ 为满足引理 1 的正 Lebesgue 测度集合．假设存在集合 $E_1 \subset E$ 且 $m(E_1) > 0$ 使得对于任意的 $a \in E_1$，$\{f_a^n(1)\}_{n \geqslant 0}$ 在$[f_a^2(0), 1]$中不稠密．由于 $f_a[0,1] = [f_a^2(0), 1]$，我们有$\{f_a^n(1)\}_{n \geqslant 0}$ 在$[0,1]$中不稠密．

选取区间$[0,1]$的可数基$\{U_n\}_{n \geqslant 0}$．如果$\{f_a^n(1)\}_{n \geqslant 0}$ 在$[0,1]$中不稠密，由于$\{U_n\}_{n \geqslant 0}$是可数的并且 $m(E_1) > 0$，存在某个 U_q 使得集合

$$E' = \{a \mid a \in E_1, \{f_a^n(1)\}_{n \geqslant 0} \cap U_q = \emptyset\}$$

具有正 Lebesgue 测度.

选取 E' 的稠密点 a_0，利用第 1 节中 E 的性质知存在无穷数列 n_k 和无穷下降序列 ω_{n_k} 使得

$$a_0 \in \omega_{n_k}, \qquad |\omega_{n_k}| \to 0$$

并且

$$|f^{n_k}_{\omega_{n_k}}(1)| > \delta^{1/2} \gg 2\delta .$$

应用引理 3, $f^{n_k}_{\omega_{n_k}}(1)$ 至少包含集合 $\{f_{a_0}^{-i}(p_{a_0})\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 中的一个点 $f_{a_0}^{-j}(p_{a_0})$. 这里 $0 \leqslant j \leqslant N$. 再次应用引理 3,我们知道

$$|f_a^{-j}(p_a) - f_2^{-j}(p_2)| \leqslant \delta$$

对于一切 $a \in \omega_{n_k} \subset [2-\epsilon, 2]$ 都成立. 利用 $f_a(x)$ 关于参数的连续依赖性,存在 $a' \in \omega_{n_k}$ 使得

$$f^{n_k}_{a'}(1) = f_{a'}^{-j}(p_{a'}) .$$

因此

$$f^{n_k+j}_{a'}(1) = p_{a'} .$$

由于当 l 趋于 $+\infty$ 时, $f_{a'}^{-l}U_q$ 包含一个收敛到 $p_{a'}$ 的分支,可以找到适当的 l_0 和 $d > 0$ 满足

$$\mathrm{Length}(f^{n_k+j+l_0}_{\omega_{n_k}}(1) \cap U_q) > d,$$

其中 l_0 和 d 不依赖于 n_k. 因此存在子区间 $\omega'_{n_k} \subset \omega_{n_k}$ 使得

$$f^{n_k+j+l_0}_{\omega'_{n_k}}(1) \subset U_q$$

并且 $\mathrm{Length}\,(f^{n_k+j+l_0}_{\omega'_{n_k}}(1)) > d$. 从而 $\omega'_{n_k} \cap E' = \emptyset$.

因为 l_0 的选取不依赖于 n_k 和 j,存在不依赖于 n_k 的常数 $c(d) > 0$ 使得

$$\mathrm{Length}(f^{n_k}_{\omega'_{n_k}}(1)) > c(d) > 0 .$$

另一方面,由引理 1 知当 n_k 趋于 $+\infty$ 时, $|\omega_{n_k}|$ 趋于 0,并且

$$\frac{|\omega'_{n_k}|}{|\omega_{n_k}|} \geqslant A^{-1} \frac{|f^{n_k}_{\omega'_{n_k}}(1)|}{|f^{n_k}_{\omega_{n_k}}(1)|} \geqslant A^{-1}c(d) > 0 .$$

于是 $|\omega'_{n_k}| / |\omega_{n_k}| \geqslant A^{-1}c(d) > 0$ 与 a_0 是 E' 的稠密点矛盾. 我们完成了定理 A 的证明.

以下证明定理 B.

定理 B 的证明　根据 E 的构造,对于任何 $a \in E$,存在无穷下降区间序列 ω_{n_k} 满足

$$a \in \omega_{n_k}, \qquad |\omega_{n_k}| \to 0 .$$

故只须证明 $\omega_{n_k} \cap E_1 \neq \emptyset$. 由引理 1,我们有

$$|f^{n_k}_{\omega_{n_k}}(1)| > \delta^{1/2} \gg 2\delta .$$

应用引理 3, $f^{n_k}_{\omega_{n_k}}(1)$ 至少包含集合 $\{f_a^{-i}(p_a) \mid a \in \omega_{n_k}, 0 \leqslant i \leqslant N\}$ 中的一个点. 再利用 $f_a(x)$ 关于参数的连续依赖性,存在 $a_k \in \omega_{n_k}$ 使得 $f^{n_k}_{a_k}(1) = f_{a_k}^{-i}(p_{a_k})$. 因此 $f^{n_k+i}_{a_k}(1) = p_{a_k}$,并且 $a_k \in E_1$. 由于 n_k 趋于 $+\infty$ 时, $|\omega_{n_k}|$ 趋于 0,我们有 $a_k \to a$. 由 $a \in E$ 的任意性,我们完成了定理 B 的证明.

致谢　作者感谢张芷芬教授长期的鼓励与帮助,第二作者对于井竹君教授的帮助表示感谢.

[参 考 文 献]

[1] Milnor J. On the concept of attractor[J]. *Comm Math Phys*, 1985, **99**(2): 177 ~ 195.

[2] Guckenheimer J. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps[J]. *Comm Math Phys*, 1979, **70**(1): 133 ~ 160.

[3] Blokh A M, Lyubich M Yu. Measurable dynamics of S-unimodal maps of the interval[J]. *Ann Sci École Norm Sup*(4), 1991, **24**(4): 545 ~ 573.

[4] Lyubich M, Milnor J. The unimodal Fibonacci map[J]. *J Amer Math Soc*, 1993, **6**(2): 425 ~ 457.

[5] Bruin H, Keller G, Nowicki T, et al. Wild Cantor attractors exist[J]. *Annals of Mathematics*, 1996, **143**(1): 97 ~ 130.

[6] Jakobson M V. Absolutely continuous invariant measures for one dimensional map[J]. *Comm Math Phys*, 1981, **81**(1): 39 ~ 88.

[7] Benedicks M, Carleson L. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$[J]. *Annals of Mathematics*, 1985, **122**(1): 1 ~ 25.

[8] Benedicks M, Carleson L. The dynamics of the Henon map[J]. *Annals of Mathematics*, 1991, **133**(1): 73 ~ 169.

[9] Mora L. Viana M. Abundance of strange attractors[J]. *Acta Math*, 1993, **170**(1): 1 ~ 63.

[10] Thieullen Ph, Tresser C, Young L S. Positive Liapunov exponents for generic one parameter families of unimodal maps[J]. *C R Acad Sci Paris Sér* Ⅰ *Math*, 1992, **315**(1): 69 ~ 72.

[11] de Melo W, Van Strien S. *One Dimensional Dynamics*[M]. Springer-Verlag, 1993.

Abundance of Unimodal Maps With Dense Critical Orbit and Prefixed Critical Orbit

Cao Yongluo, Wang Lanyu

(1. *Department of Mathematics*, *Suzhou University*, *Suzhou* 215006, *P R China*;

2. *Institute of Mathematics*, *Academia Sinica*, *Beijing* 100080, *P R China*)

Abstract: For the so-called quadratic family, it is proved that, there exists a positive Lebesgue measure set E in the parameter space such that the corresponding map has a dense critical orbit in the support set of the invariant measure for almost all parameters in E; it is also proved that there is a dense set in E such that the critical orbit of the corresponding map enter the reversed fixed point.

Key words: unimodal map; quadratic family; invariant measure