应用数学和力学,第21卷 第4期(2000年4月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号:1000-0887(2000)04-0342-06

关于构造数学物理中非线性发展方程组孤波解的一种新算法*

闫振亚， 张鸿庆

(大连理工大学 数学科学研究所,大连 116024)

摘要： 根据改进的 sine-cosine 法和吴文俊消元法,给出了一种构造非线性发展方程组孤波解的新算法. 这种算法比已知的双曲函数法有更好的结论,并且在使用的过程中更简单. 借助于 MATHEMATICA 软件,这一算法能够在计算机上实现.

关 键 词： 非线性发展方程组； sine-cosine 法； 吴文俊消元法； 孤波解

中图分类号： O175 **文献标识码：** A

引 言

求解非线性方程(组)一直是数学家和物理学家很感兴趣的课题,特别是求非线性方程(组)的孤波解在理论上和实际应用中都具有重要价值. 最近,Yan[1]直接从著名的 sine-Gordon 方程获得一个变换,进而提出了求非线性波方程精确解的所谓 sine-cosine 法. 但是他仅仅把它用于求解单个的非线性方程,并没有用于解非线性方程组.

我们试图在本文对 sine-cosine 法进行改进, 并且用于构造非线性发展方程组的孤波解,结果获得了更多的孤波解. 借助于 MATHEMATICA 和吴消元法,这种算法可以在计算机上实现.

这一算法的核心思想为:对于给定的非线性发展方程组

$$u_t - F(u, v, u_x, v_x, \cdots) = 0, \tag{1}$$

$$v_t - G(u, v, u_x, v_x, \cdots) = 0, \tag{2}$$

通过使用行波变换,设(1)和(2)有如下形式解

$$u(x, t) = \phi(\alpha),\ v(x, t) = \theta(\alpha),\ \alpha = kx - \lambda t + c, \tag{3}$$

其中 k、λ 为待定常数,c 为任意常数,ϕ、θ 为关于α 的待定函数． 将(1) 和(2) 中的 u、v 用(3)式代替,得

$$\phi' - F_1(\phi, \theta, \phi', \theta', \cdots) = 0, \tag{4}$$

$$\theta' - G_1(\phi, \theta, \phi', \theta', \cdots) = 0, \tag{5}$$

其中“′”表示 $d/d\alpha$. 设(4) 和(5) 有如下形式解

$$\phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \cos^{i-1}\omega(A_i\cos\omega + B_i\sin\omega) + A_0, \tag{6}$$

---

* **收稿日期：** 1998-11-10; **修订日期：** 1999-10-15
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(19572022);国家攀登计划项目资助课题
作者简介： 闫振亚(1974～),男,河南上蔡人,博士.

$$\theta(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} \cos^{j-1}\omega(a_j\cos\omega + b_j\sin\omega) + a_0, \tag{7}$$

且 $$d\omega/d\alpha = \sin\omega, \tag{8}$$

其中 $A_0, A_i, B_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 和 $a_0, a_j, b_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 为待定常数．

步骤 1 分别对(1)和(2)中的最高阶线性偏导数项及最高阶非线性项进行平衡，得到 m，n 的值.

步骤 2 将(6)～(8)分别代入(4)和(5)中，得到关于 $\sin\omega\cos^p\omega, \cos^{p+1}\omega(p = 0,1,2,\cdots)$ 的两个多项式方程．借助 MATHEMATICA，这步可以在计算机上实现．

步骤 3 令步骤 2 所得方程中的常数项及 $\sin\omega, \cos\omega, \sin\omega\cos\omega, \cos^2\omega, \cdots$ 的系数为零，得到关于未知数 $k, \lambda, A_0, A_i, B_i(i = 1,2,\cdots,n), a_0, a_j, b_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 的一个代数方程组．

步骤 4 用吴消元法[2,3]，可以在计算机上求解此代数方程组，然后结合(3)～(8)，得系统(2)和(1)的孤波解.

我们用这种算法考虑两个例子，第一个为二维长水波 Whitham-Broer 近似方程组

$$u_t + H_x + H_y + uu_x + uu_y + \sigma_1 u_{xx} + \sigma_2 u_{yy} = 0, \tag{9}$$

$$H_t + Hu_x + Hu_y + uH_x + uH_y - \sigma_1 H_{xx} - \sigma_2 H_{yy} = 0, \tag{10}$$

其中 σ_1, σ_2 为常数．第二个为二维耦合 MKdV 方程.

1 方程(9)和(10)的孤波解

在研究水波的过程中，Whitham 和 Broer[4,5]发现长水波近似方程组

$$u_t - uu_x - v_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0, \tag{11}$$

$$v_t - (uv)_x - \frac{1}{2}v_{xx} = 0, \tag{12}$$

方程(11)和(12)的对称及守恒律已有人研究[6,7]．在这部分，我们考虑方程(9)和(10)，它们是方程(11)和(12)在二维空间的推广.

设 $$u(x,y,t) = \phi(\alpha),\ H(x,y,t) = \theta(\alpha),\ \alpha = kx + ly - vt + c, \tag{13}$$

其中 k, l, v 为待定常数，c 为任意常数．

将(13)分别代入(9)和(10)，得

$$-v\phi' + (k + l)(\phi\phi' + \theta') + (\sigma_1 k^2 + \sigma_2 l^2)\phi'' = 0, \tag{14}$$

$$-v\theta' + (k + l)(\theta\phi)' - (\sigma_1 k^2 + \sigma_2 l^2)\theta'' = 0, \tag{15}$$

其中"$'$"表示 $d/d\alpha$．由引言部分的步骤 1，设方程(14)和(15)有如下形式的解

$$\phi(\alpha) = a_0 + a_1\cos\omega + b_1\sin\omega, \tag{16}$$

$$\theta(\alpha) = A_0 + A_1\cos\omega + B_1\sin\omega + A_2\cos^2\omega + B_2\sin\omega\cos\omega, \tag{17}$$

其中 $a_0, a_1, b_1, A_0, A_1, A_2, B_1, B_2$ 为待定常数．

借助 MATHEMATICA 或者 MAPLE 软件，从(8)、(16)、(17)中，得到关于 ω 的函数 ϕ'、θ'、$\phi\phi'$、$(\theta\phi)'$、ϕ''、θ''，然后将其分别代入(14)和(15)中，得

$$\begin{aligned}
-v\phi' &+ (k + l)(\phi\phi' + \theta') + (\sigma_1 k^2 + \sigma_2 l^2)\phi'' = -v(-a_1 + b_1\sin\omega\cos\omega + a_1\cos^2\omega) + \\
&(k + l)[-a_0a_1 - a_1b_1\sin\omega + (b_1^2 - a_1^2)\cos\omega + a_0b_1\sin\omega\cos\omega + a_0a_1\cos^2\omega + \\
&2a_1b_1\sin\omega\cos^2\omega + (a_1^2 - b_1^2)\cos^3\omega + B_1\sin\omega\cos\omega - A_1 - 2A_2\cos\omega - \\
&B_2\sin\omega + A_1\cos^2\omega + 2B_2\sin\omega\cos^2\omega + 2A_2\cos^3\omega] + (\sigma_1 k^2 + \sigma_2 l^2)(-b_1\sin\omega -
\end{aligned}$$

$$2a_1\cos\omega + 2b_1\sin\omega\cos^2\omega + 2a_1\cos^3\omega) = 0, \tag{18}$$

$$-v\theta' + (k+l)(\theta\phi)' - (\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)\theta'' = -v(-A_1 - 2A_2\cos\omega - B_2\sin\omega + B_1\sin\omega\cos\omega + A_1\cos^2\omega + 2B_2\sin\omega\cos^2\omega + 2A_2\cos^3\omega) + (k+l)[-(b_1B_2 + a_0A_1 + a_1A_0) - (a_0B_2 + a_1B_1 + b_1A_1)\sin\omega + 2(b_1B_1 - a_1A_1 - a_0A_2)\cos\omega + (b_1A_0 + a_0B_1 - 2b_1A_2 - 2a_1B_2)\sin\omega\cos\omega + (4b_1B_2 - 3a_1A_2 + a_0A_1 + a_1A_0)\cos^2\omega + 2(b_1A_1 + a_1B_1 + a_0B_2)\sin\omega\cos^2\omega + 2(a_1A_1 + a_0A_2 - b_1B_1)\cos^3\omega + 3(b_1A_2 + a_1B_2)\sin\omega\cos^3\omega + 3(a_1A_2 - b_1B_2)\cos^4\omega] - (\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)(2A_2 - B_1\sin\omega - 2A_1\cos\omega - 5B_2\sin\omega\cos\omega - 8A_2\cos^2\omega + 2B_1\sin\omega\cos^2\omega + 2A_1\cos^3\omega + 6B_2\sin\omega\cos^3\omega + 6A_2\cos^4\omega) = 0. \tag{19}$$

分别令(18)中常数项及 $\sin\omega,\cos\omega,\sin\omega\cos\omega,\cdots,\cos^3\omega$ 的系数和(19)中常数项及 $\sin\omega,\cos\omega,\sin\omega\cos\omega,\cdots,\cos^4\omega$ 的系数为零,得到关于 $k,l,v,a_0,a_1,b_1,A_0,A_1,A_2,B_1,B_2$ 的超定方程组

$$a_1v - (k+l)(a_0a_1 + A_1) = 0, \tag{20}$$

$$-(k+l)(a_1b_1 + B_2) - (\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)b_1 = 0, \tag{21}$$

$$(k+l)(b_1^2 - a_1^2 - 2A_2) - 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)a_1 = 0, \tag{22}$$

$$-b_1v + (k+l)(a_0b_1 + B_1) = 0, \tag{23}$$

$$-a_1v + (k+l)(a_0a_1 + A_1) = 0, \tag{24}$$

$$(k+l)(2a_1b_1 + 2B_2) + 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)b_1 = 0, \tag{25}$$

$$(k+l)(a_1^2 - b_1^2 + 2A_2) + 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)a_1 = 0, \tag{26}$$

$$A_1v - (k+l)(b_1B_2 + a_0A_1 + a_1A_0) - 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)A_2 = 0, \tag{27}$$

$$B_2v - (k+l)(a_0B_2 + a_1B_1 + b_1A_1) + (\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)B_1 = 0, \tag{28}$$

$$2A_2v + 2(k+l)(b_1B_1 - a_1A_1 - a_0A_2) + 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)A_1 = 0, \tag{29}$$

$$-B_1v + (k+l)(b_1A_0 + a_0B_1 - 2b_1A_2 - 2a_1B_2) + 5(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)B_2 = 0, \tag{30}$$

$$-A_1v + (k+l)(4b_1B_2 - 3a_1A_2 + a_0A_1 + a_1A_0) + 8(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)A_2 = 0, \tag{31}$$

$$-2B_2v + 2(k+l)(b_1A_1 + a_1B_1 + a_0B_2) - 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)B_1 = 0, \tag{32}$$

$$-2A_2v + 2(k+l)(a_1A_1 + a_0A_2 - b_1B_1) - 2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)A_1 = 0, \tag{33}$$

$$3(k+l)(b_1A_2 + a_1B_2) - 6(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)B_2 = 0, \tag{34}$$

$$3(k+l)(a_1A_2 - b_1B_2) - 6(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)A_2 = 0. \tag{35}$$

用手算来解代数方程组(20)~(35)是很难的,但是吴方法为我们提供了一种容易求解非线性代数方程组的方法. 用这种方法,在计算机上易得

情况 1

$$b_1 = A_1 = B_1 = B_2 = 0,\ a_0 = \frac{v}{k+l}.$$

$$a_1 = \frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)}{k+l},\ A_2 = -A_0 = \frac{4(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2};$$

情况 2

$$A_1 = B_1 = 0,\ a_0 = \frac{v}{k+l},\ b_1 = \mathrm{i}\beta_1a_1,\ B_2 = \mathrm{i}\beta_2A_2,$$

$$a_1 = \frac{\sigma_1k^2+\sigma_2l^2}{k+l},\ A_0 = \frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)}{(k+l)^2},\ A_2 = -\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2};$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, $\beta_1^2=\beta_2^2=\beta_1\beta_2=1$.

对于方程(8),通过变量分离并且积分,易得

$$\sin\omega(\alpha)=\left.\frac{2N\exp(\pm\alpha)}{1+N^2\exp(\pm 2\alpha)}\right|_{N=1}=\operatorname{sech}\alpha, \tag{36}$$

或者

$$\cos\omega(\alpha)=\left.\frac{1-N^2\exp(\pm 2\alpha)}{1+N^2\exp(\pm 2\alpha)}\right|_{N=1}=\mp\tanh\alpha. \tag{37}$$

因此,由(13)~(17)、(36)、(37)并结合情况 1、2,得

(ⅰ)方程(9)和(10)的扭状和钟状的孤波解

$$u(x,y,t)=\mp\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)}{k+l}\tanh(kx+ly-vt+c)+\frac{v}{k+l},$$

$$H(x,y,t)=\frac{4(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2}\operatorname{sech}^2(kx+ly-vt+c),$$

这是已知的孤波解.

(ⅱ)方程(9)和(10)的新孤波解

$$\begin{aligned}u(x,y,t)=&\frac{\sigma_1k^2+\sigma_2l^2}{k+l}(\tanh\alpha+\mathrm{i}\mu\operatorname{sech}\alpha)+\frac{v}{k+l}=\\&\frac{\sigma_1k^2+\sigma_2l^2}{k+l}\exp(\mathrm{i}\mu\omega)+\frac{v}{k+l}=\\&\frac{\sigma_1k^2+\sigma_2l^2}{k+l}\exp\{\mathrm{i}\mu\arcsin[\operatorname{sech}(kx+ly-vt+c)]\}+\\&\frac{v}{k+l}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(x,y,t)=&-\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2}(\cos^2\omega+\mathrm{i}\eta\sin\omega\cos\omega)+\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)}{(k+l)^2}=\\&-\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2}\cos\omega\exp(\mathrm{i}\eta\omega)+\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2}=\\&-\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2}\tanh(kx+ly-vt+c)\times\\&\exp\{\mathrm{i}\eta\arcsin[\operatorname{sech}(kx+ly-vt+c)]\}+\\&\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2},\end{aligned}$$

其中 $\mu\eta=\mu^2=\eta^2=1$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 这是一组复标量场中的解,是扭状和钟状两种孤波解的复线性组合,并且是一种特殊的孤子解. 它们满足:当 $|\alpha|\to\infty$ 时,

$$u(x,y,t)\to\left|\frac{\sigma_1k^2+\sigma_2l^2}{k+l}\right|+\frac{v}{k+l},$$

$$H(x,y,t)\to-\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)^2}{(k+l)^2}+\frac{2(\sigma_1k^2+\sigma_2l^2)}{(k+l)^2}.$$

2 2+1 维耦合 MKdV 方程

对于耦合 MKdV 方程[8]

$$u_t-6\beta uu_xH-6\beta uu_yH+\bar{a}u_{xxx}+\bar{a}u_{yyy}=0, \tag{38}$$

$$H_t - 6\beta HH_x u - 6\beta HH_y u + \bar{\alpha}H_{xxx} + \bar{\alpha}H_{yyy} = 0. \tag{39}$$

设 $u(x,y,t) = \phi(\alpha),\ H(x,y,t) = \theta(\alpha),\ \alpha = k(x + y - \lambda t + c),$ (40)

其中 k、λ 为待定常数,c 为任意常数,$\phi(\alpha)$、$\theta(\alpha)$ 为待定函数. 将(40)代入(38)和(39),得

$$-\lambda\phi' - 12\beta\phi\phi'\theta + 2\bar{\alpha}k^2\phi''' = 0, \tag{41}$$

$$-\lambda\theta' - 12\beta\theta\theta'\phi + 2\bar{\alpha}k^2\theta''' = 0. \tag{42}$$

由引言部分的步骤1,我们设方程(41)和(42)有如下形式解

$$\phi(\alpha) = A_0 + A_1\cos\omega + B_1\sin\omega, \tag{43}$$

$$\theta(\alpha) = a_0 + a_1\cos\omega + b_1\sin\omega, \tag{44}$$

其中 $a_0, a_1, b_1, A_0, A_1, B_1$ 为待定常数,然后借助MATHEMATICA软件,将(43)、(44)及(8)代入(41)和(42),得到一个代数方程组. 用吴消元法解这个方程组,由(40)、(43)、(44)、(36)和(37),得三组孤波解

(i) 方程(38)和(39)的钟状孤波解为

$$u(x,y,t) = A\operatorname{sech}\left[\sqrt{-\frac{\beta}{\bar{\alpha}}}A(x + y + 4\beta A^2 t + c)\right],$$

$$H(x,y,t) = A\operatorname{sech}\left[\sqrt{-\frac{\beta}{\bar{\alpha}}}A(x + y + 4\beta A^2 t + c)\right],$$

其中 A, c 为任意常数.

(ii) 方程(38)和(39)的扭状孤波解为

$$u(x,y,t) = B \pm \tanh\left[\sqrt{\frac{\beta}{\bar{\alpha}}}B(x + y + 4\beta B^2 t + c)\right],$$

$$H(x,y,t) = B \pm \tanh\left[\sqrt{\frac{\beta}{\bar{\alpha}}}B(x + y + 4\beta B^2 t + c)\right],$$

其中 B, c 为任意常数.

(iii) 方程(38)和(39)的新孤波解

$$u(x,y,t) = \pm M\tanh\alpha \pm \mathrm{i}M\operatorname{sech}\alpha = M\cos\omega \pm \mathrm{i}M\sin\omega = M\exp(\pm \mathrm{i}\omega) = M\exp\left\{\pm \mathrm{i}\arcsin\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{2\beta M}{\bar{\alpha}}}\left(x + y + \frac{2\beta M^2}{\bar{\alpha}}t + c\right)\right]\right\},$$

$$H(x,y,t) = \pm M\tanh\alpha \pm \mathrm{i}M\operatorname{sech}\alpha = M\cos\omega \pm \mathrm{i}M\sin\omega = M\exp(\pm \mathrm{i}\omega) = M\exp\left\{\pm \mathrm{i}\arcsin\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{2\beta M}{\bar{\alpha}}}\left(x + y + \frac{2\beta M^2}{\bar{\alpha}}t + c\right)\right]\right\},$$

其中 M, c 为任意常数. 这组解为复标量场中的一种,是钟状和扭状两种孤波解的复线性组合,是一种特殊的孤波解. 它们满足:当 $|\alpha| \to \infty$ 时, $|u(x,y,t)| \to |M|$, $|H(x,y,t)| \to |M|$.

总之,利用改进的sine-cosine法并借助于MATHEMATICA软件和吴消元法,我们得到非线性发展方程组更多的孤波解. 这种思路还能运用于求解其他的非线性方程组,如耦合KdV方程、变更Boussinesq方程、耦合标量场方程等. 顺便,我们指出形式解(6)和(7)也能写为

$$\phi(\alpha) = \sum_{i=0}^{n}(A_i\cos i\omega + B_i\sin i\omega), \tag{45}$$

$$\theta(\alpha) = \sum_{j=0}^{m}(a_j\cos j\omega + b_j\sin j\omega). \tag{46}$$

可以证明(45)和(46)与(43)和(44)相比有同样的结论.

[参 考 文 献]

[1] Yan C T. A simple transformation for nonlinear waves[J]. *Phys Lett A*, 1996, **224**(1):77 ~ 84.

[2] Wu W. On zeros of algebraic equations[J]. *Kexue Tongbao*, 1986, **31**(1):1 ~ 5.

[3] Wu W. Polynomial equations-solving and applications[A]. In: Du Dingzhu, Ed. *Algorithm and Computation*[C]. New York: Springer-Verlag, 1994, 1 ~ 6.

[4] Whitham G B. Variational methods and applications to water waves[J]. *Proc Roy Soc London Ser A*, 1967, **229**(1):6 ~ 25.

[5] Broer L T F. Approximate equations for long water waves[J]. *Appl Sci Res*, 1975, **31**(5):377 ~ 395.

[6] Kupershmidt B A. Mathematics of dispersive waves[J]. *Comm Math Phys*, 1985, **99**(1):51 ~ 73.

[7] 范恩贵,张鸿庆. Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程的 Backlund 变换和精确解[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(8):667 ~ 670.

[8] 曹策问. AKNS 族的 Lax 方程组的非线性化[J]. 中国科学, A 辑, 1989, (7):706 ~ 712.

On a New Algorithm of Constructing Solitary Wave Solutions for Systems of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics

Yan Zhenya, Zhang Hongqing

(*Institute of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *P R China*)

Abstract: According to the improved sine-cosine method and Wu-elimination method, a new algorithm to construct solitary wave solutions for systems of nonlinear evolution equations is put forward. The algorithm has some conclusions which are better than what the hyperbolic function method known does and is simpler in use. With the aid of MATHEMATICA, the algorithm can be carried out in computer.

Key words: system of nonlinear evolution equations; sine-cosine method; Wu-elimination method; solitary wave solution