文章编号: 1000_0887(2000) 05_0495_06

转动相对论系统的 Lie 对称性和守恒量*

傅景礼， 陈向炜， 罗绍凯

(商丘师范学院 数学力学与数学物理研究所, 河南商丘 476000)

(林宗池推荐)

摘要: 研究转动相对论性完整与非完整力学系统的 Lie 对称性和守恒量• 定义转动相对论力学系统的无限小变换生成元, 利用微分方程在无限小变换下的不变性, 建立转动相对论性力学系统的 Lie 对称确定方程, 得到结构方程和守恒量的形式, 并给出应用实例•

关 键 词: 转动系统; 相对论; 分析力学; Lie 对称; 守恒量; 微分方程
中图分类号: O316; O410 文献标识码: A

引 言

1979 年 R. Bengtsson 和 S. Frauendorf 精确测量 14 种核子的自旋转速最大值, 结果表明各核子的自旋转速最大值各不相等[1]• 随着科学技术的进步, 越来越多的实验现象与高速转动问题有关, 爱因斯坦的相对论理论和经典力学的转动理论已不适用, 近年来建立的相对论性分析力学理论也不适用[2~5]• M. Carmeli 于 1985 年建立了转动相对论力学理论[6~9], 最近罗绍凯建立了转动系统的相对论分析力学理论[10], 并给出了相对论转动力学系统的 Noether 理论• 众所周知, 狭义相对论的建立使人们认识到对称性原理与物理规律之间存在紧密的联系, 而量子力学、量子场论、原子核物理等近代物理的发展又表明, 对称性原理已深入到微观物理领域, 成为探索微观粒子运动规律的重要原理之一• 物理系统具有对称性和守恒量的分析, 在物理学众多领域都十分重要• 寻求系统守恒量的近代方法是 Noether 方法和 Lie 方法[11~13]• Lie 方法引入力学研究领域始于 70 年代末 Lutzky 等人的工作[14], 近年来 Lie 方法研究取得一些结果[15]• 本文将 Lie 方法引入转动相对论系统, 给出系统的 Lie 对称性确定方程、结构方程和守恒量的形式, 并举例说明结果的应用•

1 转动相对论系统的动力学方程

1. 完整约束条件下转动相对论动力学方程

研究 N 个物体构成的力学系统, M_i 为第 i 个物体受到的外力对 Oz 轴之矩, I_{0i} 为经典转动惯量, $\theta_i(q_s, t)$ 为相对于 S 系的角坐标, Γ_i 为极限角速度, 在理想约束条件下, 转动相对论力学系统的 D' Alembert 原理为[10]

* 收稿日期: 1998_08_06; 修订日期: 2000_01_00
基金项目: 国家自然科学基金(19972010) 和河南省自然科学基金资助课题(934060800, 984053100)
作者简介: 傅景礼(1955~), 男, 副教授, 研究方向: 一般力学, 发表论文 30 余篇.

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-M_i\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i\dot{\theta}_i)\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}\right]\delta q_s=0,\quad I_i=I_{0i}/\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2},\tag{1}$$

q_s 为广义坐标, 对于只受 k 个完整约束的系统, δq_s 彼此独立, 则可得到转动相对论完整系统的 Lagrange 方程为[10]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T^*}{\partial q_s}=Q_s,\quad Q_s=\sum_{i=1}^{N}M_i\frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

其中

$$T^*=\sum_{i=1}^{N}I_{0i}\Gamma_i^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}\right),\tag{3}$$

为转动相对论系统的广义动能函数• Q_s 为广义力, 将其分为有势和非有势两部分, $Q_s=-\dfrac{\partial V}{\partial q_s}+Q_s'$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=Q_s'\qquad(s=1,2,-,n),\tag{4}$$

$L^*=T^*-V$ 为系统的广义 Lagrange 函数• 假设方程非奇异, 即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0\qquad(s,k=1,2,\cdots,n),\tag{5}$$

则方程(4) 可展开为显式, 记作

$$\ddot{q}_s=h_s(t,q,\dot{q})\qquad(s=1,2,\cdots,n)•\tag{6}$$

2. 非完整约束条件下转动相对论动力学方程

若系统除受有 k 个完整约束外, 还受有 r 个一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,r;\ s=1,2,\cdots,n),\tag{7}$$

且满足 ¶Ä¶ 定义

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,r),\tag{8}$$

则可得到转动相对论非完整系统的 Routh 方程[10]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=Q_s'+\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n),\tag{9}$$

这里 $L^*=T^*-V$ 为系统的 Lagrange 函数, Q_s' 为非保守广义力, λ_β 为约束乘子• 在运动方程积分之前可先求出约束乘子 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)$• 于是方程(9) 为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=Q_s'+\Lambda_s,\\&\Lambda_s=\Lambda_s(t,q,\dot{q})=\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)•\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

方程(10) 为与非完整系统(7)、(9) 相应的完整系统的运动方程, (7)、(9) 的解可在式(10) 的解中找到, 只需加上非完整约束条件(7) 的限制• 假设方程非奇异, 即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0\qquad(s,k=1,2,\cdots,n),\tag{11}$$

则方程(10) 可展开为显式, 记作

$$\ddot{q}_s=q_s(t,q,\dot{q})\qquad(s=1,2,\cdots,n)•\tag{12}$$

2 转动相对论系统的确定方程

1. 转动相对论性完整系统的确定方程

取无限小单参数变换群

$$t^{*} = t + \Delta t, \quad q_s^{*} = q_s + \Delta q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{13}$$

或写成形式

$$t^{*} = t + \varepsilon \xi_0(t, q, \dot{q}), \quad q_s^{*} = q_s + \varepsilon \xi_s(t, q, \dot{q}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{14}$$

其中 ε 为小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小变换的生成元或生成函数. 引入无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{15}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n} (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{16}$$

它的二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^{n} [(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s \dot{\xi}_0] \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{17}$$

Lie 方法的基本思想是使微分方程(6)在变换(14)下保持不变. 当且仅当

$$X^{(2)}[\ddot{q}_s - h_s(t, q, \dot{q})] = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{18}$$

如果

$$\ddot{q}_s = h_s(t, q, \dot{q}), \tag{19}$$

则有

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_s = X^{(1)}(h_s) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{20}$$

方程(20)就是在无限小变换(14)下生成元 ξ_0, ξ_s $(s = 1, 2, \cdots, n)$ 应满足的微分方程, 称为确定方程. 如果 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(20), 那么相应的变换就是转动相对论性完整系统的 Lie 对称变换.

2. 转动相对论性非完整系统的确定方程

对于转动相对论性非完整系统, 类似于转动相对论性完整系统的讨论可得到, 在无限小变换(14)下方程(12)保持不变的条件归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 g_s = X^{(1)}(g_s) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{21}$$

如果无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程(21), 那么相应完整系统的无限小变换是 Lie 对称的.

对于非完整系统, 其约束方程(7)在无限小变换(14)下也必须保持不变, 因约束方程(7)为一阶方程, 则

$$X^{(1)}[f_\beta(t, q, \dot{q})] = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, n). \tag{22}$$

方程(22)称为限制方程, 它是非完整约束对 Lie 对称的限制.

如果无限小变换生成元 ξ_0、ξ_s 既满足确定方程(21), 又满足限制方程(22), 称转动相对论性非完整系统(7)、(9)的无限小变换是 Lie 对称的.

3 转动相对论性系统的结构方程和守恒量

1. 转动相对论性完整系统的结构方程和守恒量

定理 1 对于满足确定方程(20)的无限小变换生成元 ξ_0、ξ_s, 如果存在满足

$$X^{(1)}(L^*) + L^*\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n} Q'_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{23}$$

的函数 $G = G(t, q, \dot{q})$, 则转动相对论性完整系统存在对应于Lie对称性的守恒量

$$I = L^*\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} + G = \mathrm{const}. \tag{24}$$

证明 $$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L^*\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\Big] + \dot{G} =$$

$$L^*\dot{\xi}_0 + \left(\frac{\partial L^*}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial q_s}\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} +$$

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} - X^{(1)}(L^*) - L^*\dot{\xi}_0 - \sum_{s=1}^{n}Q'_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) =$$

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L^*}{\partial q_s} - Q'_s\right) = 0.$$

方程(23)称为转动相对论性完整系统的结构方程. 由结构方程可求得 $\dot{G}$, 进而有可能求得系统的规范函数 G 和守恒量.

2. 转动相对论性非完整系统的结构方程和守恒量

我们先研究相应转动相对论性完整系统(10)的结构方程和守恒量.

定理2 对于满足确定方程(21)的无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在满足

$$X^{(1)}(L^*) + L^*\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{25}$$

的函数 $G = G(t, q, \dot{q})$, 则相应转动相对论性完整系统(10)存在对应于Lie对称性的守恒量.

$$I = L^*\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} + G = \mathrm{const}. \tag{26}$$

证明 同定理1. 方程(25)称为相应转动相对论性完整系统(10)的结构方程. 由结构方程(25)可求出 $\dot{G}$, 进而有可能找到系统的规范函数 G 和守恒量.

再研究转动相对论性非完整系统的守恒量. 转动相对论性非完整系统的守恒量可在相应完整转动系统的Lie对称性守恒量中找到, 只要施加非完整约束对无限小变换生成元的限制方程(22), 于是有

定理3 对于满足确定方程(21)和限制方程(22)的无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s, 如果满足结构方程(25), 则转动相对论性非完整系统(7)、(9) 存在对应于Lie对称性的守恒量, 仍由(26)式给出.

3. 转动相对论系统的Killing方程

由结构方程(23)、(25)可求出 $\dot{G}$, 但不一定能找到规范函数 $G = G(t, q, \dot{q})$, 这说明, 运动方程的对称性并不直接给出守恒量.

将结构方程(23)展开, 并分出含 $\ddot{q}$ 和不含 $\ddot{q}$ 的项得到

$$\left.\begin{aligned}
&\left(L^* - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),\\
&\frac{\partial L^*}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial L^*}{\partial q_s} + \left(L^* - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) +\\
&\quad\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k - \sum_{s=1}^{n}Q'_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

此式即是与结构方程(23)式相应的广义 Killing 方程. 如果方程(27)有解, 则可求得规范函数 $G = G(t, q, \dot{q})$.

将结构方程(25)展开, 并分出含 $\ddot{q}$ 和不含 $\ddot{q}$ 的项, 得到

$$\left.\begin{aligned}
&\left(L^* - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}_k},\\
&\frac{\partial L^*}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial L^*}{\partial q_s} + \left(L^* - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \\
&\quad\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k - \sum_{s=1}^{n}(Q'_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0).
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

此式即是与结构方程(25)式相应的广义 Killing 方程. 如果方程(28)有解, 则可求得规范函数 $G = G(t, q, \dot{q})$.

4 应用实例

设高速转动物体的极限角速度为 Γ, 该系统的 Lagrange 函数为

$$L^* = I_0\Gamma^2\left(1 - \sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}\right) - V. \tag{29}$$

所受非势广义力为 $G_\theta = \dot{\theta}$, $G_\varphi = \dot{\varphi}$, 势能 V 为常数, 取 θ, φ 为广义坐标, 在理想完整约束条件下, 系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{\dot{\theta}}{I_0(1 - \dot{\varphi}^2/\Gamma^2)}\left(1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2\right)^{3/2} = h_1,\\
\ddot{\varphi} &= \frac{\dot{\varphi}}{I_0(1 - \dot{\theta}^2/\Gamma^2)}\left(1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2\right)^{3/2} = h_2.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

确定方程(20)给出为

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\xi}_1 - \dot{\theta}\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_1 &= X^{(1)}(h_1),\\
\ddot{\xi}_2 - \dot{\varphi}\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_2 &= X^{(2)}(h_2).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

方程(31)有如下解

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = c_1, \quad \xi_2 = 0. \tag{32}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = c_2. \tag{33}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = c_1, \quad \xi_2 = c_2. \tag{34}$$

对于以上生成元, 由结构方程(23)可求得规范函数

$$G_1 = -c_1\theta, \quad G_2 = -c_2\varphi, \quad G_3 = -(c_1\theta + c_2\varphi), \tag{35}$$

则该转动相对论系统存在守恒量为

$$I_1 = \frac{I_0\dot{\theta}c_1}{\sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}} - c_1\theta = \text{const}, \tag{36}$$

$$I_2 = \frac{c_2 I_0\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}} - c_2\varphi = \text{const}, \tag{37}$$

$$I_3 = \frac{I_0(c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\varphi})}{\sqrt{1 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)/\Gamma^2}} - (c_1\theta + c_2\varphi) = \text{const}. \tag{38}$$

[参 考 文 献]

[1] Bengtsson R, Frauendorf S. Quasiparticle spectra near the yrast line[J]. Nucler Physics, 1979, **A327**: 139~171.

[2] 罗绍凯. 相对论性分析力学理论[J]. 教材通迅, 1987, (5): 31~34.

[3] 罗绍凯. 相对论非线性非完整系统动力学理论[J]. 上海力学, 1991, **12**(1): 67~70.

[4] Luo Shaokai. Relativistic variational principles and equations of motion high_order nonlinear nonholonomic system[A]. In: Proc ICDVC[C]. Beijing: Peking University Press, 1990, 645~652.

[5] 罗绍凯. 变质量可控力学系统的相对论性变分原理与运动方程[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(7): 645~654.

[6] Carmeli M. Field theory on $R\times S^3$ topology (Ⅰ~Ⅱ)[J]. Foundations of Physics, 1985, **15**(2): 175~185.

[7] Carmeli M. The dynamics of rapidly rotating bodies[J]. Foundations of Physics, 1985, **15**(8): 889~903.

[8] Carmeli M. Field theory on $R\times S^3$ topology (Ⅲ)[J]. Foundations of Physics, 1985, **15**(10): 1019~1029.

[9] Carmeli M. Rotational relativity theory[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1986, **25**(1): 89~94.

[10] 罗绍凯. 转动系统的相对论性分析力学理论[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(1): 43~53.

[11] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993, 244~351.

[12] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 中国科学(A 辑), 1993, **23**(7): 709~717.

[13] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的某些应用[A]. 见: 现代数学和力学(MMM_Ⅶ)[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997, 32~40.

[14] Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phy A Math, 1979, **12**(7): 973~981.

[15] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量[J]. 力学进展, 1993, **23**(3): 360~372.

Lie Symmetries and Conserved Quantities of Rotational Relativistic Systems

Fu Jingli, Chen Xiangwei, Luo Shaokai

(Research Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Shangqiu Teachers College, Shangqiu, Henan 476000, P R China)

Abstract: The Lie symmetries and conserved quantities of the rotational relativistic holonomic and nonholonomic systems were studied. By defining the infinitesimal transformations' generators and by using the invariance of the differential equations under the infinitesimal transformations, the determining equations of Lie symmetries for the rotational ralativistic mechanical systems are established. The structure equations and the forms of conserved quantities are obtained. An example to illustrate the application of the results is given.

Key words: rotational systems; relativity; analytic mechanics; Lie symmetry; conserved quantity; differential equation