文章编号: 1000_0887(2000) 05_0459_09

Banach 空间非线性二阶微分积分方程初值问题的单调迭代方法*

陈芳启, 陈予恕

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 利用单调迭代方法及 Mönch 不动点定理,研究了 Banach 空间中混合单调二阶微分积分方程初值问题的耦合最小最大拟解及解的存在性,给出了耦合最小最大拟解及解的存在定理.

关 键 词: 微分积分方程; Kuratowski 非紧性测度; 耦合下上拟解; 单调迭代方法
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

在文[1]中,郭大钧建立了 Banach 空间中 Volterra 型一阶微分积分方程初值问题极值解的存在性定理. 本文我们讨论 Banach 空间 E 中二阶微分积分方程初值问题(IVP):

$$\left.\begin{array}{l} u''= F(t, u, u, u', Tu) \qquad (\forall t \in J), \\ u(0) = x_0,\ u'(0) = x_1, \end{array}\right\} \tag{1}$$

这里 $J = [0, d]\,(d > 0)$, $x_0, x_1 \in E$, $F \in C(J \times E \times E \times E \times E, E)$, 且

$$(Tx)(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)\mathrm{d}s \qquad (\forall t \in J), \tag{2}$$

$k \in C(\Omega, R^+)$, $\Omega = \{(t, s): 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant d\}$. 由于 F 中含有导数项 u', 故[1~2]中使用的方法在这里不适用. 本文应用单调迭代方法及 Mönch 不动点定理建立了 IVP(1) 的若干耦合最小最大拟解及解的存在定理.

设 P 是 Banach 空间 E 中的锥,这样 P 在 E 中诱导了半序: $x \leqslant y$ 当且仅当 $y - x \in P$. 我们说锥 P 是正规的, 若存在一个正数 N_1 使得: $\theta \leqslant x \leqslant y$ 蕴含 $\|x\| \leqslant N_1\|y\|$, 这里 θ 是 E 中零元素; 称锥 P 是正则的, 若 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y$ 蕴含: 存在 $x \in E$, 满足: $\|x_n - x\| \to 0$(当 $n \to \infty$), 有关锥的详细理论可参见[3].

1 预备知识

在文中, α 表示 Kuratowski 非紧性测度, $\|\cdot\|_C$ 表示空间 $C(J, E)$ 的上确界范数, 对 $D \subset C(J, E)$, 记 $D(t) = \{x(t): x \in D\} \subset E\ (t \in J)$.

* 收稿日期: 1999_01_23; 修订日期: 1999_10_18
基金项目: 国家自然科学基金资助(19672043),国家教委博士点专项基金资助
作者简介: 陈芳启(1963~),博士,现从事博士后工作,已发表论文30余篇.

定义　设 $u_0, v_0 \in C^2(J, E)$, $u_0(t) \leqslant v_0(t)$, $u_0'(t) \leqslant v_0'(t)$ $(\forall t \in J)$, 我们称 u_0, v_0 是 IVP(1) 的耦合下上拟解, 如果下列不等式成立

$$\left.\begin{aligned} &u_0''(t) \leqslant F(t, u_0(t), v_0(t), u_0'(t), (Tu_0)(t)) \qquad (\forall t \in J), \\ &u_0(0) \leqslant x_0,\ u_0'(0) \leqslant x_1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &v_0''(t) \geqslant F(t, v_0(t), u_0(t), v_0'(t), (Tv_0)(t)) \qquad (\forall t \in J), \\ &v_0(0) \geqslant x_0,\ v_0'(0) \geqslant x_1 . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

如果(3)、(4) 式中等号成立, 则称 u_0, v_0 是 IVP(1) 的耦合拟解.

显然, 如果 u_0, v_0 是耦合拟解且 $u_0 = v_0$, 则 u_0 就是 IVP(1) 的解.

我们列出本文定理证明中需要使用的若干已知结果

引理 1[4]　设 $D \subset C(J, E)$ 是有界的, 且 D 中函数在 J 上等度连续, 则

$$\alpha(D) = \sup_{t \in J} \alpha(D(t)).$$

引理 2[5]　设 $D = \{x_n\} \subset L^1(J, E)$, 存在 $g \in L^1(J, R^+)$ 使得对一切 $x_n \in D$, $\|x_n(t)\| \leqslant g(t)$, a.e. $t \in J$ 成立, 则

$$\alpha\left(\left\{\int_0^t x_n(s)\,\mathrm{d}s : n \in N\right\}\right) \leqslant 2\int_0^t \alpha(D(s))\,\mathrm{d}s \qquad (\forall t \in J).$$

引理 3[6]　(Mönch 不动点定理)　设 E 是 Banach 空间, $D \subset E$ 闭凸集, $A: D \to D$ 连续, 且满足: 对某一 $x \in D$, 由 $C \subset D$ 可数, $C = \overline{\mathrm{co}}(\{x\} \cup A(C))$ 蕴含 C 是相对紧的, 则 A 在 D 中有不动点.

2　主 要 结 果

为方便计, 首先列出本文使用的条件

H$_1$)　存在 $u_0, v_0 \in C^2(J, E)$, u_0, v_0 是 IVP(1) 的耦合下上拟解, 即(3), (4) 式成立.

H$_2$)　存在非负常数 M, N 使得对 $\forall t \in J$,

$$F(t, x_1, x_2, y, z) - F(t, x_1, x_2, y, z) \geqslant M(x_1 - x_1) - N(y - y)$$

这里
$$u_0(t) \leqslant x_1 \leqslant x_1 \leqslant v_0(t),\ u_0(t) \leqslant x_2 \leqslant x_2 \leqslant v_0(t)$$
$$u_0'(t) \leqslant y \leqslant y \leqslant v_0'(t),\ (Tu_0)(t) \leqslant z \leqslant z \leqslant (Tv_0)(t),$$

H$_3$)　F 在 $J \times E \times E \times E \times E$ 的任何有界子集上是有界的, 且存在 $g_i \in C(J, R^+)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 使得

$$\alpha(F(t, U_1, U_2, U_3, U_4)) \leqslant \sum_{i=1}^{4} g_i(t)\,\alpha(U_i)$$
$$(\forall \text{ 有界集 } U_i \subset E,\ i = 1, 2, 3, 4).$$

在下面, 我们记 $[u_0, v_0] = \{u \in C(J, E): u_0(t) \leqslant u(t) \leqslant v_0(t),\ t \in J\}$,

$$[u_0, v_0] \times [u_0', v_0'] = \{(u, u') \in C(J, E) \times C(J, E): u_0(t) \leqslant u(t) \leqslant v_0(t),\ u_0'(t) \leqslant u'(t) \leqslant v_0'(t),\ t \in J\}.$$

定理 1　设 P 是正规锥, 条件 H$_1$) ~ H$_3$) 成立, 则 IVP(1) 在 $[u_0, v_0]$ 中有解 x^* 和耦合最小最大拟解 u^*, v^*, $u^* \leqslant v^*$; 进一步, 存在单调序列 $\{u_n\}, \{v_n\} \subset C^2(J, E)$ 分别收敛于耦合最小最大拟解 u^*, v^*.　这里耦合拟解 u^*, v^* 的最小最大性是指: 若 $u, v \in C^2(J, E)$, $u(t) \leqslant v(t)$ $(t \in J)$ 是 IVP(1) 的任一耦合拟解, 适合 $(u, u') \in [u_0, v_0] \times [u_0', v_0']$, $(v, v') \in [u_0, v_0]$

$\times [u_0', v_0']$ 则有

$$u_0(t) \leqslant u_1(t) \leqslant \cdots \leqslant u_n(t) \leqslant \cdots \leqslant u^*(t) \leqslant u(t) \leqslant v(t) \leqslant v^*(t) \leqslant \cdots \leqslant v_n(t) \leqslant \cdots \leqslant v_1(t) \leqslant v_0(t) \qquad (\forall t \in J), \tag{5}$$

证明 证明分五步完成

1) 对 $\forall(\eta_i, \eta_i') \in [u_0, v_0] \times [u_0', v_0'] (i = 1, 2)$, 考虑 Banach 空间 E 中线性微分方程初值问题

$$u'' = F(t, \eta_1, \eta_2, \eta_1', T\eta_1) + M(u - \eta_1) - N(u' - \eta_1'), \; u(0) = x_0, \; u'(0) = x_1, \tag{6}$$

容易验证下列结论成立:

a) 线性初值问题 IVP(6) 在 $C^2(J, E)$ 中有唯一解•

b) $u \in C^2(J, E)$ 是 IVP(6) 的解, 当且仅当 $u \in C^1(J, E)$ 是下列积分方程的解

$$u(t) = x_0 + tx_1 + \int_0^t (t - s)[F(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \eta_1'(s), (T\eta_1)(s)) + M(u(s) - \eta_1(s)) - N(u'(s) - \eta_1'(s))] \mathrm{d}s \qquad (t \in J)• \tag{7}$$

即

$$u(t) = (1 + Nt)x_0 + tx_1 + \int_0^t (t - s)[F(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \eta_1'(s), (T\eta_1)(s)) - M\eta_1(s) + N\eta_1'(s)] \mathrm{d}s + \int_0^t [M(t - s) - N] u(s) \mathrm{d}s \qquad (t \in J)• \tag{8}$$

微分(8)式得

$$u'(t) = Nx_0 + x_1 + \int_0^t F(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \eta_1'(s), (T\eta_1)(s)) - M\eta_1(s) + N\eta_1'(s)] \mathrm{d}s - Nu(t) + M\int_0^t u(s) \mathrm{d}s \qquad (t \in J)• \tag{9}$$

在这部分, 我们证明: 对 $\forall(\eta_i, \eta_i') \in [u_0, v_0] \times [u_0', v_0'] (i = 1, 2)$, IVP(6) 的唯一解 $u \in C^2(J, E)$ 满足

$$u_0(t) \leqslant u(t) \leqslant v_0(t), \; u_0'(t) \leqslant u'(t) \leqslant v_0'(t) \qquad (t \in J)• \tag{10}$$

令 $x = u - v_0$, 由(6), H1), H2) 得

$$\begin{aligned} x'' = u'' - v_0'' \leqslant\; & F(t, \eta_1, \eta_2, \eta_1', T\eta_1) + M(u - \eta_1) - N(u' - \eta_1') - F(t, v_0, u_0, v_0', Tv_0) = \\ & -[F(t, v_0, u_0, v_0', Tv_0) - F(t, \eta_1, \eta_2, \eta_1', T\eta_1)] + M(u - \eta_1) - N(u' - \eta_1') \leqslant \\ & -M(v_0 - \eta_1) + N(v_0' - \eta_1') + M(u - \eta_1) - \\ & N(u' - \eta_1') = M(u - v_0) - N(u' - v_0') = \\ & Mx - Nx'• \end{aligned} \tag{11}$$

且

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= u(0) - v_0(0) \leqslant x_0 - x_0 = \theta, \\ x'(\theta) &= u'(0) - v_0'(0) \leqslant x_1 - x_1 = \theta• \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

对 $\forall g \in P^*$, 令 $p(t) = g(x(t)), t \in J$, 则 $p \in C^2(J, R)$ 且 $p'(t) = g(x'(t)), p''(t) = g(x''(t))$• 由(11), (12) 式可得

$$p''(t) \leqslant Mp(t) - Np'(t) \quad (t \in J), \text{且 } p(0) \leqslant 0, \; p'(0) \leqslant 0• \tag{13}$$

再由[7, p28, 例 4.1]得, $p(t) \leqslant 0, p'(t) \leqslant 0, \forall t \in J$• 因此 $x(t) \leqslant \theta, x'(t) \leqslant \theta, \forall t \in J,$

即

$$u(t)\leqslant v_0(t),\qquad u'(t)\leqslant v_0'(t)\qquad(\forall t\in J)\cdot$$

类似可证

$$u_0(t)\leqslant u(t),\ u_0'(t)\leqslant u'(t)\qquad(\forall t\in J)\cdot$$

于是有

$$u_0(t)\leqslant u(t)\leqslant v_0(t),\ u_0'(t)\leqslant u'(t)\leqslant v_0'(t)\quad(t\in J)\cdot$$

2)　对 $(\eta_i,\eta_i')\in[u_0,v_0]\times[u_0',u_0'](i=1,2)$, 令

$$A((\eta_1,\eta_1'),(\eta_2,\eta_2'))=(u,u')\cdot\tag{14}$$

这里 u 是 IVP(6) 的唯一解· 在这部分, 我们证明

i) $(u_0,u_0')\leqslant A((u_0,u_0'),(v_0,v_0')),A((v_0,v_0'),(u_0,u_0'))\leqslant(v_0,v_0')\cdot$

ii) 若 $(\xi,\xi'),(\eta_i,\eta_i')\in[u_0,v_0]\times[u_0',v_0'](i=1,2)$, $\eta_1\leqslant\eta_2$, $\eta_1'\leqslant\eta_2'$, 则:

$$A((\eta_1,\eta_1'),(\xi,\xi'))\leqslant A((\eta_2,\eta_2'),(\xi,\xi')),$$
$$A((\xi,\xi'),(\eta_2,\eta_2'))\leqslant A((\xi,\xi'),(\eta_1,\eta_1'))\cdot$$

iii) $A:[u_0,v_0]\times[u_0',v_0']\times[u_0,v_0]\times[u_0',v_0']\to[u_0,v_0]\times[u_0',v_0']$ 是连续的·

要证明 i), 令 $x=v_0-v_0$, 这里 v_0 是 $\eta_1=v_0$, $\eta_2=u_0$ 时 IVP(6) 的唯一解· 据 A 的定义有 $A((v_0,v_0'),(u_0,u_0'))=(v_0,v_0')\cdot$ 再由(6), H_1) 得

$$x''=v_0''-v_0''\leqslant F(t,v_0,u_0,v_0',Tv_0)+M(v_0-v_0)-$$
$$N(v_0'-v_0')-F(t,v_0,u_0,v_0',Tv_0)=Mx-Nx',$$

且

$$x(0)=v_0(0)-v_0(0)\leqslant x_0-x_0=\theta,$$
$$x'(0)=v_0'(0)-v_0'(0)\leqslant x_1-x_1=\theta\cdot$$

用 1) 中同样的方法, 我们能得到 $x(t)\leqslant\theta$, $x'(t)\leqslant\theta$, $t\in J$, 即 $(v_0,v_0')\leqslant(v_0,v_0')$, 于是

$$A((v_0,v_0'),(u_0,u_0'))\leqslant(v_0,v_0')\cdot$$

类似地, 我们可证明

$$(u_0,u_0')\leqslant A((u_0,u_0'),(v_0,v_0'))\cdot$$

要证 ii), 设 $(\xi,\xi'),(\eta_i,\eta_i')\in[u_0,v_0]\times[u_0',v_0'](i=1,2)$, $\eta_1\leqslant\eta_2$, $\eta_1'\leqslant\eta_2'$, 令 $x=u_1-u_2$, 这里 $(u_i,u_i')=A((\eta_i,\eta_i'),(\xi,\xi'))\cdot$ 由(6) 式及 H_2) 容易看出

$$x''=u_1''-u_2''=F(t,\eta_1,\xi,\eta_1',T\eta_1)+M(u_1-\eta_1)-N(u_1'-\eta_1')-$$
$$F(t,\eta_2,\xi,\eta_2',T\eta_2)+M(u_2-\eta_2)-N(u_2'-\eta_2')=$$
$$-[F(t,\eta_2,\xi,\eta_2',T\eta_2)-F(t,\eta_1,\xi,\eta_1',T\eta_1)]+$$
$$M(u_1-u_2)+M(\eta_2-\eta_1)-N(u_1'-u_2')-N(\eta_2'-\eta_1')\leqslant Mx-Nx'\cdot$$

及 $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, 再用 1) 中同样的方法可证得, $x(t)\leqslant\theta$, $x'(t)\leqslant\theta$, $t\in J\cdot$ 即 $(u_1,u_1')\leqslant(u_2,u_2')$, 因此,

$$A((\eta_1,\eta_1'),(\xi,\xi'))\leqslant A((\eta_2,\eta_2'),(\xi,\xi'))$$

类似可证

$$A((\xi,\xi'),(\eta_2,\eta_2'))\leqslant A((\xi,\xi'),(\eta_1,\eta_1'))\cdot$$

要证 iii), 我们记 $A((\eta_1,\eta_1'),(\eta_2,\eta_2'))=(u,u')$, 其中 u, u' 分别由(8), (9) 式给出, 令

$$A^{(1)}((\eta_1, \eta_1'), (\eta_2, \eta_2')) = (1 + Nt)x_0 + tx_1 + \int_0^t (t - s)[F(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \eta_1'(s), (T\eta_1)(s)) - M\eta_1(s) + N\eta_1'(s)]\,ds,$$

$$A^{(2)}((\eta_1, \eta_1'), (\eta_2, \eta_2')) = Nx_0 + x_1 + \int_0^t [F(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \eta_1'(s), (T\eta_1)(s)) - M\eta_1(s) + N\eta_1'(s)]\,ds \cdot$$

由通常方法, 我们能够证明: $A^{(i)}(i = 1, 2)$ 在范数 $\|\cdot\|_C$ 下关于 $\eta_1, \eta_1', \eta_2', \eta_2, \eta_2'$ 是连续的, 证明过程从略, 详细可参见[8]•

据(8)式, 结合算子 $A^{(1)}$ 的连续性及线性 Volterra 积分方程的解关于初值的连续依赖性可得, u 在范数 $\|\cdot\|_C$ 下关于 $\eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2'$ 是连续的• 注意(9) 式, 从 u 及 $A^{(2)}$ 的连续性不难知道 u' 在范数 $\|\cdot\|_C$ 下关于 $\eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2'$ 也是连续的, 从而算子 A 的连续性获证•

令

$$\left.\begin{aligned} (u_n, u_n') &= A((u_{n-1}, u_{n-1}'), (v_{n-1}, v_{n-1}')), \\ (v_n, v_n') &= A((v_{n-1}, v_{n-1}'), (u_{n-1}, u_{n-1}')) \cdot \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

据上面证明的 i), ii), 不难得到

$$(u_0, u_0') \leqslant (u_1, u_1') \leqslant \cdots \leqslant (u_n, u_n') \leqslant \cdots \leqslant (v_n, v_n') \leqslant \cdots \leqslant (v_1, v_1') \leqslant (v_0, v_1') \cdot \tag{16}$$

即

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0 \cdot \tag{17}$$

且

$$u_0' \leqslant u_1' \leqslant \cdots \leqslant u_n' \leqslant \cdots \leqslant v_n' \leqslant \cdots \leqslant v_1' \leqslant v_0' \cdot \tag{18}$$

3) 在这部分, 我们证明存在 $u^*, v^* \in C^1(J, E)$ 满足 $(u_n, u_n') \to (u^*, u^{*\prime}), (v_n, v_n') \to (v^*, v')$•

设 $U = \{u_n\}$, $U' = \{u_n'\}$, $V = \{v_n\}$, $V' = \{v_n'\}$• 由锥 P 的正规性可知, U, U', V, V' 均是 $C(J, E)$ 中的有界集• 据 H_3) 得, 存在常数 $h > 0$ 使得

$$\|F(t, u_{n-1}(t), v_{n-1}(t), u_{n-1}'(t), (Tu_{n-1})(t)) + M(u_n(t) - u_{n-1}(t)) - N(u_n'(t) - u_{n-1}'(t))\| \leqslant h \qquad (t \in J,\ n = 1, 2, \cdots) \cdot \tag{19}$$

由 u_n 的定义和(7) 式, 我们有

$$u_n(t) = x_0 + tx_1 + \int_0^t (t - s)[F(s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s), u_{n-1}'(s), (Tu_{n-1})(s)) + M(u_n(s) - u_{n-1}(s)) - N(u_n'(s) - u_{n-1}'(s))]\,ds \qquad (t \in J) \cdot \tag{20}$$

及

$$u_n(t) = x_1 + \int_0^t [F(s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s), u_{n-1}'(s), (Tu_{n-1})(s)) + M(u_n(s) - u_{n-1}(s)) - N(u_n'(s) - u_{n-1}'(s))]\,ds \qquad (t \in J) \cdot \tag{21}$$

由(20), (21), (19) 式知, U, U' 在 J 上等度连续• 因此 $\alpha(U(t)), \alpha(U'(t))$ 在 J 上是连续的, 由引理 1 得

$$\left.\begin{aligned} \alpha(U) &= \sup_{t \in J} \alpha(U(t)), \\ \alpha(U') &= \sup_{t \in J} \alpha(U'(t)) \cdot \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

同样可得

$$\left.\begin{aligned}\alpha(V) &= \sup_{t\in J}\alpha(V(t)),\\ \alpha(V') &= \sup_{t\in J}\alpha(V'(t))\cdot\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

令 $G = \max\left\{\max_{t\in J} g_i(t),\ i = 1, 2, 3, 4\right\}$, $K = \max_{(t,s)\in\Omega} k(t, s)$, 取常数 $L > 0$ 充分大, 使得

$$\gamma \equiv (d+1)\cdot\left(\frac{6G+4M+4N}{L}+\frac{4KG}{L^2}\right) < 1\cdot\tag{24}$$

对 $\forall x \in C(J, E)$, 令

$$\| x \|_0 = \sup_{t\in J}\left\{\mathrm{e}^{-Lt}\| x(t) \|\right\}\cdot$$

显然在范数 $\|\cdot\|_0$ 下 $C(J, E)$ 是一Banach空间, 且两范数 $\|\cdot\|_0$ 与 $\|\cdot\|_C$ 是等价的• 在下面, 我们用 α^* 表示具有范数 $\|\cdot\|_0$ 的Banach空间 $C(J, E)$ 中的Kuratowski非紧性测度•

由(20), H_3) 及引理2得, 对 $\forall\ t \in J$,

$$\begin{aligned}
\alpha(U(t)) = {}& \alpha\Bigg(\Bigg\{\int_0^t (t-s)[F(s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s), u'_{n-1}(s), (Tu_{n-1})(s)) + \\
& M(u_n(s) - u_{n-1}(s)) - N(u'_n(s) - u'_{n-1}(s))]\mathrm{d}s : n \geqslant 1\Bigg\}\Bigg) \leqslant \\
& 2d\int_0^t \alpha\left(\left\{F(s, U(s), V(s), U'(s), (TU)(s))\right\}\right)\mathrm{d}s + \\
& 4dM\int_0^t \alpha(U(s))\mathrm{d}s + 4dN\int_0^t \alpha(U'(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
& 2d\int_0^t [g_1(s)\alpha(U(s)) + g_2(s)\alpha(V(s)) + g_3(s)\alpha(U'(s)) + \\
& g_4(s)\alpha((TU)(s))]\mathrm{d}s + 4dM\int_0^t \alpha(U(s))\mathrm{d}s + 4dN\int_0^t \alpha(U'(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
& (2dG + 4dM)\int_0^t \alpha(U(s))\mathrm{d}s + 2dG\int_0^t \alpha(V(s))\mathrm{d}s + \\
& (2dG + 4dN)\int_0^t \alpha(U'(s))\mathrm{d}s + 4dG\int_0^t\int_0^s k(s, \tau)\alpha(U(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \leqslant \\
& (2dG + 4dM)\int_0^t \alpha(\mathrm{e}^{-Ls}U(s))\mathrm{e}^{Ls}\mathrm{d}s + 2dG\int_0^t \alpha(\mathrm{e}^{-Ls}V(s))\mathrm{e}^{Ls}\mathrm{d}s + \\
& (2dG + 4dN)\int_0^t \alpha(\mathrm{e}^{-Ls}U'(s))\mathrm{e}^{Ls}\mathrm{d}s + \\
& 4dGK\int_0^t\int_0^s \alpha(\mathrm{e}^{-L\tau}U(\tau))\mathrm{e}^{L\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \leqslant \\
& \frac{2dG+4dM}{L}\alpha^*(U)\mathrm{e}^{Lt} + \frac{2dG}{L}\alpha^*(V)\mathrm{e}^{Lt} + \\
& \frac{2dG+4dN}{L}\alpha^*(U')\mathrm{e}^{Lt} + \frac{4dGK}{L^2}\alpha^*(U)\mathrm{e}^{Lt}\cdot
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathrm{e}^{-Lt}U(t)) \leqslant {}& \left(\frac{2dG+4dM}{L}+\frac{4dGK}{L^2}\right)\alpha^*(U) + \\
& \frac{2dG}{L}\alpha^*(V) + \frac{2dG+4dN}{L}\alpha^*(U') \leqslant \\
& d\cdot\left(\frac{6G+4M+4N}{L}+\frac{4GK}{L^2}\right)\max\left\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\right\},
\end{aligned}$$

即对 $\forall t \in J$,

$$\alpha^*(U(t)) \leqslant \gamma\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\}.$$

再由(22)式得

$$\alpha^*(U) \leqslant \gamma\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\}.$$

同样可得

$$\alpha^*(U') \leqslant \gamma\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\},$$
$$\alpha^*(V) \leqslant \gamma\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\},$$
$$\alpha^*(V') \leqslant \gamma\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\}.$$

因此有

$$\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\} \leqslant r\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\}.$$

再由 $0 \leqslant \gamma < 1$ 知, $\max\{\alpha^*(U), \alpha^*(U'), \alpha^*(V), \alpha^*(V')\} = 0$, 即 $\alpha^*(U) = \alpha^*(U') = \alpha^*(V) = \alpha^*(V') = 0$, 当然也有 $\alpha(U) = \alpha(U') = \alpha(V) = \alpha(V') = 0$. 从而 U, U', V, V' 均为 $C(J, E)$ 中的相对紧集, 于是均有收敛子列. 由(17), (18)式知, $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$, $\{v_n\}$, $\{v_n'\}$ 都是单调序列, 再由锥 P 的正规性不难知道, $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$, $\{v_n\}$, $\{v_n'\}$ 本身均为 $C(J, E)$ 中的收敛序列, 故不难得到, 存在 $u^*, v^* \in C^1(J, E)$, $u^* \leqslant v^*$, 满足 $u_n \to u^*$, $u_n' \to u^{*\prime}$, $v_n \to v^*$, $v_n' \to v^{*\prime}$.

4) 在这部分, 我们证明: u^*, v^* 是 IVP(1) 的耦合最小最大拟解.

在(15)式中, 令 $n \to \infty$ 取极限, 注意到 A 的连续性得:

$$(u^*, u^{*\prime}) = A((u^*, u^{*\prime}), (v^*, v^{*\prime})),$$
$$A((v^*, v^{*\prime}), (u^*, u^{*\prime})) = (v^*, v^{*\prime}).$$

由 A 的定义及(7)式, 我们得到

$$u^*(t) = x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-s)F(s, u^*(s), v^*(s), u^{*\prime}(s), (Tu^*)(s))\mathrm{d}s, \tag{25}$$

$$v^*(t) = x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-s)F(s, v^*(s), u^*(s), v^{*\prime}(s), (Tv^*)(s))\mathrm{d}s. \tag{26}$$

微分(25), (26)式得

$$u^{*\prime}(t) = x_1 + \int_0^t F(s, u^*(s), v^*(s), u^{*\prime}(s), (Tu^*)(s))\mathrm{d}s,$$
$$u^{*\prime\prime}(t) = F(t, u^*(t), v^*(t), u^{*\prime}(t), (Tu^*)(t)).$$

及

$$v^{*\prime}(t) = x_1 + \int_0^t F(s, v^*(s), u^*(s), v^{*\prime}(s), (Tv^*)(s))\mathrm{d}s,$$
$$v^{*\prime\prime}(t) = F(t, v^*(t), u^*(t), v^{*\prime}(t), (Tv^*)(t)).$$

故 $u^*, v^* \in C^2(J, E)$ 且是 IVP(1) 的耦合拟解.

由通常方法, 不难证明: u^*, v^* 是 IVP(1) 在 $[u_0, v_0]$ 中的耦合最小最大拟解.

5) 在这部分, 我们证明 IVP(1) 在 $[u^*, v^*]$ 中有一解 x^*. 事实上, 对 $\forall(\eta, \eta') \in [u^*, v^*] \times [u^{*\prime}, v^{*\prime}]$, 令

$$\bar{A}(\eta, \eta') = A((\eta, \eta'), (\eta, \eta'))$$

显然, 我们只需证明: 存在 $x^* \in [u^*, v^*]$, 满足: $\bar{A}(x^*, x^{*\prime}) = (x^*, x^{*\prime})$ 即可. 由第 2 步中

的 i), ii) 知, 对 $\forall(x,x')\in[u^*,v^*]\times[u^{*'},v^{*'}]$, 有

$$A(x,x')=A((x,x'),(x,x'))\geqslant A((u^*,u^{*'}),(v^*,v^{*'}))=(u^*,u^{*'}),$$

及

$$A(x,x')=A((x,x'),(x,x'))\leqslant A((v^*,v^{*'}),(u^*,u^{*'}))=(v^*,v^{*'})\cdot$$

因此, A 映$[u^*,v^*]\times[u^{*'},v^{*'}]$ 入$[u^*,v^*]\times[u^{*'},v^{*'}]$• 由算子 A 的连续性可知A 也是连续算子•

设$\{(x_n,x_n')\}\subset[u^*,v^*]\times[u^{*'},v^{*'}]$, $(x,x')\in[u^*,v^*]\times[u^{*'},v^{*'}]$ 满足

$$\{(x_n,x_n')\}=\overline{\mathrm{co}}(\{(x,x')\}\cup\{A(x_n,x_n')\})\cdot$$

显然, 我们有

$$\alpha^*(\{x_n\})\leqslant\alpha^*(\{A(x_n,x_n')\}),$$
$$\alpha^*(\{x_n'\})\leqslant\alpha^*(\{A(x_n,x_n')\})\cdot$$

由第 4 步证明过程, 不难看出

$$\max\{\alpha^*(\{x_n\}),\alpha^*(\{x_n'\})\}\leqslant\gamma\max\{\alpha^*(\{x_n\}),\alpha^*(\{x_n'\})\}\cdot$$

再由 $0\leqslant\gamma<1$ 得到 $\alpha^*(\{x_n\})=\alpha^*(\{x_n'\})=0$, 于是$\{(x_n,x_n')\}$ 是 $C(J,E)\times C(J,E)$ 中的相对紧集, 由 Mönch 不动点定理(引理 3) 即知 A 在$[u^*,v^*]\times[u^{*'},v^{*'}]$ 中有不动点$(x^*,x^{*'})$, 于是 x^* 就是 IVP(1) 的解, $x^*\in[u_0,v_0]$ 是显然的• 至此定理 1 结论全部得证•

定理 2 设 P 是正则锥, 条件 H$_1$) ~ H$_2$) 成立, 假设 F 在$J\times E\times E\times E\times E$ 的任何有界子集上都是有界的, 则定理 1 结论成立(x^* 的存在性除外)•

证明 除第 5 步外, 其证明几乎与定理 1 证明完全相同• 唯一的差别是: 代替条件 H$_3$), 结论 $\alpha(U(t))=\alpha(U'(t))=\alpha(V(t))=\alpha(V'(t))=0(t\in J)$ 直接由(17), (18) 式及 P 的正则性推出•

注 当 IVP(1) 右端不含第三个变元时, 本文定理 1, 定理 2 给出的耦合最小最大拟解就是通常的最小解、最大解•

致谢 作者感谢郭大钧教授的指导、帮助•

[参 考 文 献]

[1] Guo Dajun. Initial value problems for integrodifferential equations of Volterra type in Banach spaces [J]. J Appl Math Stoch Anal, 1994, **7**(1): 13~ 23.

[2] Guo Dajun, Extreme solutions of nonlinear second order integrodifferential equations in Banach spaces[J]. J Appl Math Stoch Anal, 1995, **8**(3): 319~ 329.

[3] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Boston: Academic Press, 1988.

[4] Guo Dajun, Lakshmikantham V, Liu Xinzhi. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[5] Heinz H P. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector_valued functions[J]. Nonlinear Anal TMA, 1983, **7**(12): 1351~ 1371.

[6] Mönch H. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal TMA, 1980, **4**(5): 985~ 999.

[7] Hartman P. Ordinary Differential Equations [M]. 2nd edition, Boston: Birkhauser, 1982.

[8] 孙经先, 刘立山. Banach 空间混合型微分积分方程的单调迭代方法[J]. 系统科学与数学, 1993, **13**

(2): 160~ 166.

[9] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications[J]. Nonlinear Anal TMA, 1987, **11**(5): 623~ 632.

[10] Guo Dajun, Liu Xinzhi. Extremal solutions of nonlinear impulsive integrodifferential equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, **177**(2): 538~ 552.

[11] Hu Shouchuan, Lakshmikantham V. Periodic boundary value problems for integrodifferential equations of Volterra type[J]. Nonlinear Anal TMA, 1986, **10**(11): 1203~ 1208.

[12] Vaughn R. Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces[J]. Appl Anal, 1978, **7**(2): 337~ 348.

[13] 王伟, 史希福. 三阶常微分方程两点边值问题解的存在性及单调迭代方法[J]. 数学学报, 1992, **35**(2): 213~ 219.

On Monotone Iterative Method for Initial Value Problems of Nonlinear Second Order Integrodifferential Equations in Banach Spaces

Chen Fangqi, Chen Yushu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: Using the monotone iterative method and Mönch fixed point theorem, the existence of solutions and coupled minimal and maximal quasisolutions of initial value problems for mixed monotone second order integrodifferential equations in Banach spaces were studied. Some existence theorems of solutions and coupled minimal and maximal quasisolutions are obtained.

Key words: integrodifferential equations; Kuratowski measure of noncompactness; coupled lower and upper quasisolutions; monotone iterative method