

文章编号: 1000-0887(2000) 06\_0590\_07

# 正交各向异性功能梯度材料 型 裂纹尖端动态应力场

李春雨<sup>1</sup>, 邹振祝<sup>2</sup>, 段祝平<sup>3</sup>

(1 石家庄铁道学院 建筑工程系, 石家庄 050043; 2 石家庄铁道学院 交通工程系, 石家庄 050043;  
3 中国科学院力学研究所 非线性连续介质力学实验室, 北京 100080)

(本刊编委段祝平来稿)

**摘要:** 研究了无限大正交各向异性功能梯度材料 Griffith 裂纹受反平面剪切冲击作用的问题。材料两个方向的剪切模量假定为成比例按特定梯度变化。通过采用积分变换\_对偶积分方程方法, 获得了裂纹尖端动态应力场。动态应力强度因子计算结果显示: 增加剪切模量梯度或增加垂直于裂纹面方向的剪切模量可以抑制动态应力强度因子的幅值。

**关键词:** 各向异性材料; 功能梯度材料; 动态应力强度因子; 裂纹; 冲击

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A

## 引 言

近几年来, 功能梯度材料的研究受到极大关注。从应用力学的观点来看, 功能梯度材料是非均匀体, 其非均匀性对材料的力学性能有很大影响, 特别是当功能梯度材料构件带有某些缺陷时。目前, 已经有很多有关材料非均匀性影响的研究<sup>[1~3]</sup>。但是, 这些研究大多主要集中在静态断裂问题, 有关功能梯度材料动态断裂力学问题的报导很少<sup>[4]</sup>。而事实上, 功能梯度材料制造的结构构件不可避免地要受到是变荷载的作用。因此, 研究这类构件的动态断裂特性对于深入理解功能梯度材料构件的破坏机理是十分必要的。

另一方面, 目前大多数有关功能梯度材料裂纹问题的求解均假设材料为各向同性弹性体。但是, 根据功能梯度材料的制备工艺特点, 功能梯度材料很少是各向同性的。例如, 采用等离子喷射技术通常导致横向强化结构, 而采用物理气相沉降技术通常得到纵向强化结构<sup>[5]</sup>。因此, 在力学分析中有必要考虑功能梯度材料的各向异性特征。最近, Ozturk 和 Erdogan 研究了非均匀正交介质中的 型静态裂纹问题<sup>[5]</sup>。他们采用指数模型, 应用奇异积分方程技术求解。

本文, 我们采用积分变换\_对偶积分方程方法, 研究了内有限尺寸裂纹的无限大功能梯度材料反平面冲击响应问题。主要目的是导出功能梯度材料裂纹尖端动态应力场, 并考察材料非均匀性以及正交性对动态应力强度因子的影响。

收稿日期: 1999\_01\_18; 修订日期: 1999\_12\_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772029); 国家自然科学基金资助重大项目(19891180)

作者简介: 李春雨(1965~), 男, 辽宁凌源人, 副教授, 博士。

## 1 材料物性参数模型

由于数学上的困难,对于冲击荷载下的非均匀材料,为了进行切实可行的分析,有必要做一简化。目前,已经提出并得以广泛应用的描述剪切模量变化的模型,如  $\mu_x(y) = \mu_0 \exp(\alpha y)^{[1-3]}$  和  $\mu_x(y) = \mu_0(1 + c|y|)^{[6]}$  等,都因为存在求解常微分方程方面的困难而不能应用于动力响应问题。经过深入思考,我们发现应用下述模型可解决这一问题。

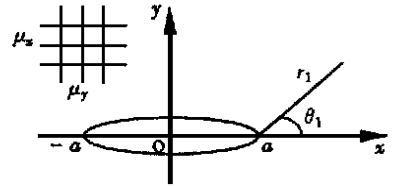
考虑如图 1 所示的无限大功能梯度材料,我们假设  $x$  和  $y$  坐标轴为正交主轴,剪切模量  $\mu_x$  和  $\mu_y$  仅是坐标  $y$  的函数,并且  $\mu_x$  和  $\mu_y$  按比例变化,即

$$\mu_x(y) = (\mu_x)_0(1 + |y|)^2, \quad (1)$$

$$\mu_y(y) = (\mu_y)_0(1 + |y|)^2, \quad (2)$$

其中  $\mu_0$  为常数( $\mu_0 > 0$ ),  $(\mu_x)_0$  和  $(\mu_y)_0$  为  $y = 0$  处剪切模量。

对于功能梯度材料的密度,因为其变化幅度一般较小,所以我们假设其为常数。



$$\mu_x(y) = (\mu_x)_0(1 + |y|)^2$$

$$\mu_y(y) = (\mu_y)_0(1 + |y|)^2$$

图 1 正交各向异性功能梯度材料内含有有限长裂纹

## 2 问题的描述

如图 1 所示,假设  $y = 0$  平面有一长为  $2a$  的裂纹,裂纹面受反平面剪切冲击作用。 $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的位移分量分别为  $u_x$ ,  $u_y$  和  $u_z$ 。对于反平面剪切运动,  $u_x$  和  $u_y$  处处为 0,  $u_z$  是  $x$ ,  $y$  和时间  $t$  的函数,即有

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = w(x, y, t) \quad (3)$$

两个非 0 应力分量  $\sigma_{xz}$  和  $\sigma_{yz}$  为

$$\sigma_{xz} = \mu_x \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu_y \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (4)$$

式中  $\mu_x$ 、 $\mu_y$  为剪切模量,并且假设服从式(1)和(2)分布。运动方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu(y)}{\mu_x(y)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu(y)}{\mu_x(y)} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\rho}{\mu_x(y)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

其中  $\nu(y)$  为  $\mu_y(y)$  的导数,  $\rho$  为密度。

假设材料初始静止,在  $t = 0$  时刻,一反平面剪切应力  $\sigma_0$  突加在裂纹面上并保持恒定。因此,边界条件为

$$\sigma_{yz}(x, 0, t) = -\sigma_0 H(t), \quad 0 \leq |x| < a; \quad t > 0, \quad (6a)$$

$$w(x, 0, t) = 0, \quad |x| \leq a; \quad t > 0, \quad (6b)$$

其中  $H(t)$  为 Heaviside 单位阶跃函数。初始条件为 0。

## 3 积分方程的导出

已知函数  $f(t)$  的 Laplace 变换

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad (7a)$$

其反变换

$$f(t) = \frac{1}{2i} \int_{\text{Br}} f^*(p) e^{pt} dp, \quad (7b)$$

其中 Br 代表 Bronwich 积分路径 对式(5)实施 Laplace 变换得

$$\frac{2w^*}{x^2} + \frac{\gamma(y)}{x(y)} \frac{2w^*}{y^2} + \frac{\gamma(y)}{x(y)} \frac{w^*}{y} = \frac{p^2}{x(y)} w^* \quad (8)$$

由于对称性,只需考虑  $x_y$  平面的第一象限 进一步地,引入关于变量  $x$  的 Fourier 余弦变换对,

$$f^c(s) = \int_0 f(x) \cos(sx) dx, \quad (9a)$$

$$f(x) = \int_0 f^c(s) \cos(sx) ds \quad (9b)$$

并令

$$w^*(x, y, p) = \int_0 U(s, y, p) \cos(sx) ds, \quad (10)$$

则由式(8)可得

$$\frac{\gamma(y)}{x(y)} \frac{2U(s, y, p)}{y^2} + \frac{\gamma(y)}{x(y)} \frac{U(s, y, p)}{y} - \left[ s^2 + \frac{p^2}{x(y)} \right] U(s, y, p) = 0 \quad (11)$$

将式(1)和式(2)代入式(11)可得

$$\frac{2U(s, y, p)}{y^2} + \frac{2}{1+y} \frac{U(s, y, p)}{y} - \left[ S^2 + \frac{p^2}{(y)_0(1+y)^2} \right] U(s, y, p) = 0, \quad (12)$$

其中  $S = s \sqrt{(x)_0/(y)_0}$

定义  $X = S(1+y)$ ,  $Y = (1+y)^{1/2} U$ , (13)

则方程(12)可改写为

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{dY}{dX} - \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{X^2} \right] Y = 0, \quad (14)$$

其中  $= \sqrt{1/4 + p^2/(y)_0^2}$  (15)

式(14)是标准的修正 Bessel 微分方程,由其解并考虑  $y$  处的正则条件,方程(12)的解可以表示为

$$U(s, y, p) = A(s, p)(1+y)^{-1/2} K \left[ (1+y) S/ \right], \quad (16)$$

其中  $K(\ )$  是第二类修正 Bessel 函数

将式(16)代入式(10)可得

$$w^*(x, y, p) = \int_0 A(s, p)(1+y)^{-1/2} K \left[ (1+y) \frac{S}{ } \right] \cos(sx) ds \quad (17)$$

将式(17)代入式(4)中的应力分量  $y_z$ 、 $x_z$  的 Laplace 变换,则有

$$y_z^*(x, y, p) = \gamma(y) \int_0 A(s, p) \left\{ -\frac{1}{2}(1+y)^{-3/2} K \left[ (1+y) \frac{S}{ } \right] + S(1+y)^{-1/2} K \left[ (1+y) \frac{S}{ } \right] \right\} \cos(sx) ds, \quad (18a)$$

$$x_z^*(x, y, p) = -\gamma(x) \int_0 A(s, p)(1+y)^{-1/2} K \left[ (1+y) S/ \right] \sin(sx) s ds \quad (18b)$$

在 Laplace 变换域,边界条件变为

$$z^*(x, 0, p) = -\frac{a}{p}, \quad 0 \leq x < a, \quad (19a)$$

$$w^*(x, 0, p) = 0, \quad x \geq a \quad (19b)$$

由式(17)、(18a)和边界条件(19), 可得一组对偶积分方程

$$\int_0^a B(s, p) \cos(sx) ds = 0, \quad x \geq a, \quad (20a)$$

$$\int_0^a sB(s, p)G(s, p) \cos(sx) ds = \frac{0}{2(\gamma)0p}, \quad 0 \leq x < a, \quad (20b)$$

其中

$$B(s, p) = A(s, p)K\left[\frac{S}{\gamma}\right], \quad (21)$$

$$G(s, p) = \frac{\frac{1}{2}K\left[\frac{S}{\gamma}\right] - sK\left[\frac{S}{\gamma}\right]}{sK\left[\frac{S}{\gamma}\right]} \quad (22)$$

对偶积分方程(20)可以采用 Copson 方法<sup>[7]</sup>求解, 其解为

$$B(s, p) = \frac{0a^2}{2(\gamma)0p} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} z^*(t, p) J_0(st) dt, \quad (23)$$

其中  $J_0$  为 0 阶第一类 Bessel 函数, 函数  $z^*(t, p)$  由如下第二类 Fredholm 积分方程控制

$$z^*(t, p) + \int_0^1 z^*(t, p) M(t, s, p) ds = \sqrt{1-t^2} \quad (24)$$

式(24)中核函数  $M(t, s, p)$  为

$$M(t, s, p) = \int_0^a s [G(s/a, p) - 1] J_0(st) J_0(s) ds, \quad (25)$$

Fredholm 积分方程(24)可以数值求解

#### 4 裂纹尖端动态应力场

对式(23)中  $B(s, p)$  使用分部积分, 则有

$$B(s, p) = \frac{0a}{2(\gamma)0p} \frac{1}{s} \left\{ z^*(1, p) J_1(sa) - \int_0^1 J_1(sa) \frac{d}{ds} [s^{-1/2} z^*(s, p)] ds \right\} \quad (26)$$

由式(26)、(21)和(18), 可得

$$z^*(x, y, p) = \frac{0a}{(\gamma)0} \frac{y}{p} z^*(1, p) \int_0^a \frac{(1+\gamma)^{-1/2} K\left[\frac{(1+\gamma)S}{\gamma}\right]}{K\left[\frac{S}{\gamma}\right]} J_1(sa) \cos(sx) ds + \dots, \quad (27a)$$

$$z^*(x, y, p) = -\frac{0a}{(\gamma)0} \frac{x}{p} z^*(1, p) \int_0^a \frac{(1+\gamma)^{-1/2} K\left[\frac{(1+\gamma)S}{\gamma}\right]}{K\left[\frac{S}{\gamma}\right]} J_1(sa) \sin(sx) ds + \dots, \quad (27b)$$

其中  $\gamma = \sqrt{(x)0/(\gamma)0}$

考虑  $s \rightarrow \infty$  处上述应力表达式中积分发散性, 将积分核较大  $s$  值展开, 并考虑  $x \rightarrow 0$  时  $K(x)$  和  $K'(x)$  的如下渐近特性:

$$K(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} e^{-x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad (28a)$$

$$K(x) = -\sqrt{2x} e^{-x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (28b)$$

我们得到应力的低阶项

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^*(x, y, p) = & -\frac{(\sigma_y)_0}{p} \frac{5^*(1, p)}{p} (1+y)^{-1} \int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(-Sy) \cos(sx) ds + \\ & -\frac{5^*(1, p)}{p} (\sigma_x)_0 (1+y)^{-1} \int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(-Sy) \cos(sx) ds + \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^*(x, y, p) = & -\frac{(\sigma_x)_0}{p} \frac{5^*(1, p)}{p} (1+y)^{-1} \int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(-Sy) \sin(sx) ds + \\ & -\frac{(\sigma_y)_0}{p} \frac{5^*(1, p)}{p} (\sigma_x)_0 (1+y)^{-1} \int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(-Sy) \sin(sx) ds + \end{aligned} \quad (29b)$$

定义复变量  $z_0 = x + iy$ , 则有

$$\int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(iz_0s) ds = -\frac{1}{\sqrt{2r_1a}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}} + O(r_1^0), \quad (30)$$

这里极坐标  $r_1$  和  $\theta_1$  的定义如图 1

注意到(29a) 和(29b) 中的积分为

$$\int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(-Sy) \cos(sx) ds = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(iz_0s) ds \right], \quad (31a)$$

$$\int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(-Sy) \sin(sx) ds = \operatorname{Im} \left[ \int_0^{\infty} J_1(sa) \exp(iz_0s) ds \right], \quad (31b)$$

我们得到裂纹尖端局部应力场

$$\sigma_{yz}^*(r_1, \theta_1, p) = \frac{K^*(p)}{\sqrt{2r_1}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}} \right] + O(r_1^0), \quad (32a)$$

$$\sigma_{xz}^*(r_1, \theta_1, p) = -\frac{K^*(p)}{\sqrt{2Pr_1}} \operatorname{Re} \left[ \frac{iC}{\sqrt{\cos H_1 + iC \sin H_1}} \right] + O(r_1^0) \quad (32b)$$

式(32)中  $K^*(p)$  为动态应力强度因子的 Laplace 变换, 其表达式为

$$K^*(p) = \sqrt{\frac{(L_x)_0}{(L_y)_0}} s_0 \sqrt{Pa} \frac{5^*(1, p)}{p}, \quad (33)$$

其中  $5^*(1, p)$  是  $5^*(N, p)$  在相应裂纹尖端点  $N = 1$  处的值

时间域内的动态应力强度因子由下式求得

$$K^*(t) = \sqrt{\frac{(L_x)_0}{(L_y)_0}} s_0 \sqrt{Pa} \frac{1}{2PQ_{Br}} \int_0^{\infty} \frac{5^*(1, p)}{p} e^{pt} dp \quad (34)$$

## 5 结果和讨论

式(32)所示裂纹尖端附近应力与  $r_1$  和  $H_1$  函数关系表明: 在正交各向异性功能梯度材料中, 裂纹尖端动态应力场同样具有  $r_1$  反平方根的奇异性, 并且关于  $H_1$  的角分布函数也和正交各向异性均匀材料情况<sup>[8]</sup> 完全相同。但是, 式(34)显示正交各向异性功能梯度材料反平面裂纹问题的动态应力强度因子与正交各向异性均匀材料反平面裂纹问题的动态应力强度因子的表达式不同, 前者多了系数  $\sqrt{(L_x)_0/(L_y)_0}$ 。因而, 材料各向异性的影响更大了。

采用 Miller 和 Guy 的数值 Laplace 反演技术<sup>[9]</sup>, 可以获得式 (33) 所表达的动态应力强度因子值。非均匀参数  $Aa$  的正交性参数  $C$  对  $K(t)/S_0\sqrt{Pa}$  的影响如图 2 所示, 其中  $(C_y)_{20} = \sqrt{(L_y)_0}/\sqrt{a}$ 。可以看出: 所有动态应力强度因子曲线都是先达到一个峰值, 然后在静态应力强度因子值附近波动, 并且波幅逐渐衰减; 对于固定的  $C$  值, 当  $Aa$  较大时, 动态应力强度因子值较小; 对于固定的  $Aa$ , 当  $C$  值较大时, 动态应力强度因子值也较大。这意味着不管材料正交性如何, 增加材料剪切模量梯度总是有助于降低动态应力强度因子。同时, 动态应力强度因子的幅值也可以通过增加垂直于裂纹面方向的剪切模量来抑制。

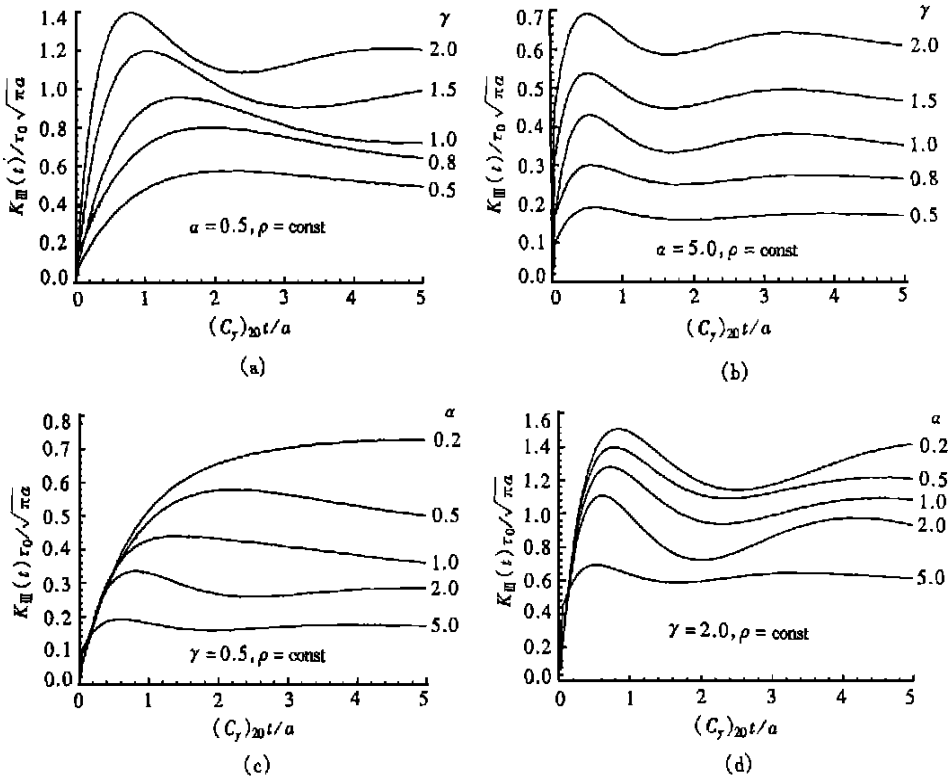


图 2 动态应力强度因子  $K(t)$  与时间的关系

## 6 结 论

本文研究了正交各向异性无限大功能梯度材料 Griffith 裂纹受反平面剪切冲击作用的问题。理论分析结果表明: 正交各向异性功能梯度材料  $\theta$  型裂纹尖端局部动态应力场与相应的正交各向异性均匀材料情况相似。时间域内动态应力强度因子计算结果显示: 材料非均匀性和材料的正交性对功能梯度材料的断裂特性都有相当大的影响。增加剪切模量梯度或增加垂直于裂纹面方向的剪切模量可以抑制动态应力强度因子的幅值。

### [参 考 文 献]

- [1] Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading

ASME Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(4): 823~ 828.

- [2] Konda N, Erdogan F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(4): 533~ 545.
- [3] Erdogan F. Fracture mechanics of functionally graded materials[J]. Composites Engineering, 1995, 5(7): 753~ 770.
- [4] Wang Baolin, Han Jiecai, Du Shanyi. Dynamic fracture mechanics analysis for composite material with material nonhomogeneity in thickness direction[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1998, 11(1): 84~ 93.
- [5] Ozturk M, Erdogan F. Mode I crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium[J]. Int J Eng Sci, 1997, 35(9): 869~ 883.
- [6] Gerasoulis A, Srivastav R P. A Griffith crack problem for a nonhomogeneous medium[J]. Int J Eng Sci, 1980, 18(2): 239~ 247.
- [7] Copson E T. On certain dual integral equations[A]. In: Proceedings Glasgow Mathematical Association, 1961, 5: 19~ 24.
- [8] Sih G C, Chen E P. Mechanics of Fracture 6: Cracks in composite materials[M]. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981.
- [9] Miller M K, Guy W T. Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynomials[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1966, 3(6): 624~ 635.

D y n a m i c S t r e s s F i e l d A r o u n d t h e M o d e I C r a c k  
T i p i n a n O r t h o t r o p i c F u n c t i o n a l l y  
G r a d e d M a t e r i a l

Li Chunyu<sup>1</sup>, Zhou Zhenzhu<sup>2</sup>, Duan Zhuping<sup>3</sup>

( 1 Department of Architectural Engineering, Shijiazhuang Railway  
Institute, Shijiazhuang 050043, P R China;

2 Department of Communication Engineering, Shijiazhuang Railway Institute,  
Shijiazhuang 050043, P R China;

3 LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

Abstract: The problem of a Griffith crack in an unbounded orthotropic functionally graded material subjected to antiplane shear impact was studied. The shear moduli in two directions of the functionally graded material were assumed to vary proportionately as definite gradient. By using integral transforms and dual integral equations, the local dynamic stress field was obtained. The results of dynamic stress intensity factor show that increasing shear modulus gradient of FGM or increasing the shear modulus in direction perpendicular to crack surface can restrain the magnitude of dynamic stress intensity factor.

Key words: anisotropic media; functionally graded materials; dynamic stress intensity factor; crack; impact