

文章编号: 1000-0887(2000)06-0561-12

时间空间均为二阶的新型 NND 差分格式^{*}

吴望一¹, 蔡庆东²

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 北京大学 湍流研究国家重点实验室, 北京 100871)

(本刊编委吴望一来稿)

摘要: 张涵信的研究表明, 为了避免激波前后差分解的波动, 在差分格式的改型方程中三阶导数的系数在激波上游必须是正的, 而在激波下游则必须是负的. 据此提出了一种新型的无波动、无自由参数耗散性的差分格式, 它对时间和空间都是二阶的. 证明了此格式是 TVD 的, 而且是推广的二阶 $\tilde{A}\tilde{M}\tilde{A}^3$ 格式. 在处理有激波的流场时, 此格式是 Lax-Wendroff 格式的改进和推广.

给出了若干算例, 计算结果表明, 此格式不仅无波动, 而且具有形式紧凑、应用方便、分辨率高、稳定性准则中的 Courant 数较大的优点.

关键词: 新型 NND 差分格式; 欧拉方程

中图分类号: O354.5; O241.3 文献标识码: A

引 言

在计算 Euler 方程或 NS 方程时, Lax-Wendroff 格式和 MacCormack 格式被公认为是较好的二阶格式. 但是当流场中包含激波时在激波两侧会出现解的波动和振荡, 而且有时还会出现非物理解. 因此如何能构造一种格式它既保留了这两种格式的优点, 同时又克服它们的缺点就成为大家关心的一个问题. 最近张涵信^{[1],[2]}通过对一维模型方程的线化分析和对一维非线性 NS 方程的数值研究发现, 在激波附近产生振荡的现象与改型方程中三阶导数项的系数密切相关. 如果选取一种格式使该系数在激波上游取正值, 在激波下游取负值, 则激波上下游都满足熵增条件, 激波附近的虚假波动可完全消除. 根据这样的原则, 他利用中心格式和二阶迎风格式构造了一类无波动、无自由参数、耗散性的差分格式, 即 NND 差分格式. 本文根据同样的原则, 提出采用 Lax-Wendroff 格式和迎风 Warming-Beam 格式的组合构造出另一类新型无波动、无自由参数、对时间和空间均为二阶的耗散性差分格式. 文中还证明了此新型 NND 格式是 TVD 的, 而且是推广的二阶 $\tilde{A}\tilde{M}\tilde{A}^3$ 格式. 我们的格式是张涵信^[2]提出的 NND 差分格式的补充和延伸. 若干算例表明, 本文提出的格式不仅应用方便、无波动, 而且具有精度和分辨率高、稳定性准则中的 Courant 数可以取得较大的优点.

1 新型 NND 二阶差分格式

考虑一维模型方程

* 收稿日期: 1999_04_06; 修订日期: 1999_12_08

作者简介: 吴望一(1933~), 男, 浙江镇海人, 教授, 博导, 发表论文 82 篇; 蔡庆东(1968~), 男, 吉林松沅人, 副教授.

全国第五届计算流体力学会议报告论文

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

设 $f = au$, 其中特征值 a 是常数, 于是 $a = \partial f / \partial u$.

写出方程 (1) 的 Lax_Wendroff 格式和迎风 Warming_Beam 格式及其相应的改型方程^[3]

Lax_Wendroff 格式 (简称 LW 格式)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{a \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \quad (2)$$

这是一个时间及空间均为二阶精度的格式, 其改型方程为:

$$u_t + au_x = -a \frac{(\Delta x)^2}{6} (1 - c^2) u_{xxx} - \frac{(\Delta x)^4}{8 \Delta t} c^2 (1 - c^2) u_{xxxx}, \quad (3)$$

式中 $c = a \Delta t / \Delta x$ 是 Courant 数, u 的下标表示 u 对它的偏导数.

迎风 Warming_Beam 格式 (简称 WB 格式)

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{a \Delta t}{\Delta x} - 1 \right\} (u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) & a > 0, \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{1}{2} \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{a \Delta t}{\Delta x} + 1 \right\} (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n) & a < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这也是一个空间及时间均为二阶精度的格式, 其改型方程为

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= \frac{a(\Delta x)^2}{6} (1 - |c|)(2 - |c|) u_{xxx} - \\ &\frac{(\Delta x)^4}{8 \Delta t} |c| (1 - |c|)^2 (2 - |c|) u_{xxxx}. \end{aligned} \quad (5)$$

分析改型方程 (3) 和 (5) 中三阶导数项和四阶导数项的系数的符号我们有表 1 的结果.

表 1

	LW 格式		WB 格式	
	u_{xxx} 的符号	u_{xxxx} 的符号	u_{xxx} 的符号	u_{xxxx} 的符号
$a > 0$	-	-	+	-
$a < 0$	+	-	-	-

根据文[1]、[2]的研究, 为了构造无波动的差分格式, 其改型方程右边三阶导数的系数在激波上游区必须是正的, 而在激波下游区则必须是负的. 同时四阶耗散项的系数必须是负的. 因为 Warming, Hyett^[4] 等人曾证明, 格式稳定的必要条件为 $(-l)^{l-1} C_{2l} > 0$, 式中 C_{2l} 是改型方程右边偶次项系数. 由此不难理解对二阶格式具有四阶导数的系数必须是负的. 根据表 1 的结果我们可以构造出以下满足上述全部要求的二阶差分格式.

在激波上游区:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{a \Delta t}{\Delta x} - 1 \right\} (u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) & a > 0, \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{a \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) & a < 0; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在激波下游区:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{a \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) & a > 0, \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{1}{2} \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{a \Delta t}{\Delta x} + 1 \right\} (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n) & a < 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

为了将此格式写成统一的紧凑格式,需要解决 $a > 0, a < 0$ 如何区分以及激波上下游如何区分的问题。

引进

$$a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|) \text{ 及 } a^- = \frac{1}{2}(a - |a|),$$

于是 $a = a^+ + a^-$ 。

当 $a > 0$ 时只有 $a^+ \neq 0, a^- = 0$ 。当 $a < 0$ 时只有 $a^- \neq 0, a^+ = 0$ 。对于任一 $a \neq 0, a^+, a^-$ 两者只有一个不为零。其次引入 $f^+ = a^+ u, f^- = a^- u$, 于是

$$f = f^+ + f^-。$$

(1) 式可写成

$$u_i + f_x^+ + f_x^- = 0。$$

现在(6)及(7)式可写为

在激波上游区:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -\frac{f_{i+1}^+ - f_i^+}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left[\frac{a^+ \Delta t}{\Delta x} - 1 \right] \frac{f_i^+ - 2f_{i-1}^+ + f_{i-2}^+}{\Delta x} - \\ & \frac{f_{i+1}^- - f_i^-}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{a^- \Delta t}{\Delta x} \frac{f_{i+1}^- - 2f_i^- + f_{i-1}^-}{\Delta x}; \end{aligned} \quad (8)$$

在激波下游区:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -\frac{f_{i+1}^+ - f_i^+}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{a^+ \Delta t}{\Delta x} \frac{f_{i+1}^+ - 2f_i^+ + f_{i-1}^+}{\Delta x} - \\ & \frac{f_{i+1}^- - f_i^-}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left[\frac{a^- \Delta t}{\Delta x} + 1 \right] \frac{f_{i+2}^- - 2f_{i+1}^- + f_i^-}{\Delta x}。 \end{aligned} \quad (9)$$

容易验证(8)式和(9)式可改写为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} (h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n); \quad (10a)$$

式中

$$h_{i+1/2} = f_{i+L/2}^+ + f_{i+R/2}^-; \quad (10b)$$

$$f_{i+L/2}^+ = \begin{cases} f_i^+ + \frac{1}{2}(1 - c^+) \Delta f_{i-1/2}^+ & \text{上游区,} \\ f_i^+ + \frac{1}{2}(1 - c^+) \Delta f_{i+1/2}^+ & \text{下游区;} \end{cases} \quad (10c)$$

$$f_{i+R/2}^- = \begin{cases} f_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 + c^-) \Delta f_{i+1/2}^- & \text{上游区,} \\ f_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 + c^-) \Delta f_{i+3/2}^- & \text{下游区;} \end{cases} \quad (10d)$$

$$\Delta f_{i+1/2}^\pm = f_{i+1}^\pm - f_i^\pm, \quad (10e)$$

$$c^\pm = \frac{a^\pm \Delta t}{\Delta x}。 \quad (10f)$$

根据激波的性质,物理量是单调变化的,因此 $\Delta u_{i-1/2}$ 的符号与 $\Delta u_{i+1/2}$ 的符号相同,而且在激波上游区有 $|\Delta u_{i-1/2}| < |\Delta u_{i+1/2}|$, 在激波下游区有 $|\Delta u_{i+1/2}| < |\Delta u_{i-1/2}|$ 。根据 $f = au$, 推出

在激波上游区: $|\Delta f_{i-1/2}| < |\Delta f_{i+1/2}|$,

在激波下游区: $|\Delta f_{i+1/2}| < |\Delta f_{i-1/2}|$ 。

这样根据 $|\Delta f_{i-1/2}|$ 和 $|\Delta f_{i+1/2}|$ 的大小就能判断出是在激波上游区或是激波下游区。引进符号 $\min \text{mod}(x, y)$ 。定义为: 1) 当 x, y 同号时, 取 x, y 中绝对值最小的那个元素。2) 当 x, y 异号时取零值。现在(10)式可写成下列紧凑的形式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n), \quad (11a)$$

$$h_{i+1/2} = f_{i+L/2}^+ + f_{i+R/2}^-, \quad (11b)$$

$$f_{i+L/2}^+ = f_i^+ + \frac{1}{2}(1 - c^+) \min \text{mod}(\Delta f_{i-1/2}^+, \Delta f_{i+1/2}^+), \quad (11c)$$

$$f_{i+R/2}^- = f_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 + c^-) \min \text{mod}(\Delta f_{i+1/2}^-, \Delta f_{i+3/2}^-), \quad (11d)$$

$$\Delta f_{i+1/2}^\pm = f_{i+1}^\pm - f_i^\pm, \quad c^\pm = \frac{a^\pm \Delta t}{\Delta x}. \quad (11e)$$

应该指出, 格式(11)在激波上下游是不波动的, 但在激波附近的个别点上由于不满足熵增条件有可能出现波动。为了抑制这种振荡, 我们给 $\min \text{mod}(x, y)$ 加上了第二个性质。

当(11c)和(11d)式中的 c^+ 和 c^- 取零值时, 本格式变为张涵信^[2]的NND格式。

可以容易地将上述格式推广到一维不定常方程组中去, 考虑

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

或写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$, 为简单起见假设 \mathbf{A} 是常数矩阵。如果考虑的是一维 Euler 方程, 则

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u)^T, \quad E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2},$$

其中 p, ρ, u, E 分别是流体的压力、密度、速度和内能。

设矩阵 \mathbf{A} 可写为

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \Lambda \mathbf{R}, \quad (14)$$

其中 Λ 为特征对角线矩阵, 其表达式为

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (15)$$

λ 为 \mathbf{A} 的特征值。将 \mathbf{A} 的表达式(14)代入(13)式并乘以 \mathbf{R} 得

$$\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \Lambda \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

引进

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} \mathbf{U} = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)})^T, \quad (17)$$

并考虑到 \mathbf{R} 是常向量, 由(16)式推出

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w^{(l)}}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

或写作

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

式中

$$\mathbf{T} = \Lambda \mathbf{W}. \quad (20)$$

令

$$\lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}^+ + \lambda_{\pm}^-, \quad \lambda_{\pm}^{\pm} = (\lambda_{\pm} \pm \lambda_{\pm 1})/2, \quad (21)$$

并引进

$$\Lambda^{\pm} = \text{diag}(\lambda_{\pm 1}^{\pm}, \lambda_{\pm 2}^{\pm}, \dots, \lambda_{\pm m}^{\pm}), \quad (22)$$

$$\mathbf{A}^{\pm} = \mathbf{R}^{-1} \Lambda^{\pm} \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}^{\pm} = \mathbf{A}^{\pm} \mathbf{U}, \quad \mathbf{T}^{\pm} = \Lambda^{\pm} \mathbf{W}, \quad (23)$$

则

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-, \quad (24a)$$

$$\mathbf{T} = \Lambda^+ \mathbf{W} + \Lambda^- \mathbf{W} = \mathbf{T}^+ + \mathbf{T}^-, \quad (24b)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}(\Lambda^+ + \Lambda^-) \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{A}^+ \mathbf{U} + \mathbf{A}^- \mathbf{U} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-, \quad (24c)$$

$$\mathbf{F}^{\pm} = \mathbf{R}^{-1} \Lambda^{\pm} \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1} \Lambda^{\pm} \mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{T}^{\pm}. \quad (24d)$$

现在(18),(19)可写为

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}^+}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}^-}{\partial x} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial w^{(l)}}{\partial t} + (\lambda_{\pm 1}^+ + \lambda_{\pm 1}^-) \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (26)$$

对 $w^{(l)}$ 满足的标量方程(26) 写出本格式(11) 并缩并成向量形式有

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} = - \frac{1}{\Delta x} (G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n),$$

$$G_{i+1/2} = T_{i+1/2}^+ + T_{i+1/2}^-,$$

$$T_{i+1/2}^+ = T_i^+ + \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_c^+) \min \text{mod}(\Delta T_{i-1/2}^+, \Delta T_{i+1/2}^+),$$

$$T_{i+1/2}^- = T_{i+1}^- - \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_c^-) \min \text{mod}(\Delta T_{i+1/2}^-, \Delta T_{i+3/2}^-),$$

$$\Delta T_{i+1/2}^{\pm} = T_{i+1}^{\pm} - T_i^{\pm}, \quad \mathbf{A}_c^{\pm} = \frac{\Lambda^{\pm} \Delta t}{\Delta x}, \quad \mathbf{I}: \text{单位矩阵}.$$

将以上各式乘以 \mathbf{R}^{-1} , 并注意到(17)、(24d) 式及 $\mathbf{H} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}$, 得方程组(12) 的无波动、无自由参数耗散性二阶差分格式是:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = - \frac{1}{\Delta x} (H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n), \quad (27a)$$

其中

$$H_{i+1/2} = F_{i+1/2}^+ + F_{i+1/2}^-, \quad (27b)$$

$$F_{i+1/2}^+ = F_i^+ + \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_c^+) \min \text{mod}(\Delta F_{i-1/2}^+, \Delta F_{i+1/2}^+), \quad (27c)$$

$$F_{i+1/2}^- = F_{i+1}^- - \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_c^-) \min \text{mod}(\Delta F_{i+1/2}^-, \Delta F_{i+3/2}^-), \quad (27d)$$

$$\Delta F_{i+1/2}^{\pm} = F_{i+1}^{\pm} - F_i^{\pm}, \quad \mathbf{A}_c^{\pm} = \frac{\Lambda^{\pm} \Delta t}{\Delta x}. \quad (27e)$$

对于一维 NS 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x},$$

粘性项 $\partial \mathbf{F}_v / \partial x$ 采用二阶中心格式计算, 其他处理和 Euler 方程相同.

处理三维 Euler 方程和 NS 方程, 可采用算子分裂法. 将其分裂为三个“一维方程”, 然后对每一个一维方程写出相应的 NND 差分格式.

2 本格式与 $\hat{\Delta}\mu\hat{\Delta}\hat{\Delta}^3$ 格式的关系

对一维 Euler 方程而言, 本节将证明由(27) 式给出的新格式事实上就是推广的时间和空间都是二阶的 $\hat{\Delta}\mu\hat{\Delta}\hat{\Delta}^3$ 格式.

考虑方程(12)、(13) 式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (28)$$

其中 $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$, 设 \mathbf{A} 为常量, 有

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{U}. \quad (29)$$

将(28) 对 t 及 x 积分, 积分上下限分别为 $t_n, t_n + \Delta t$ 和 $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$, 于是

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dt dx = 0. \quad (30)$$

引进

$$U_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U dx \quad (31)$$

及

$$H_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} F_{i+1/2} dt, \quad (32)$$

(30) 式变为

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n). \quad (33)$$

U 在区间 $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ 中是变化的, 将其展成 Taylor 级数

$$U = U_0 + \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_i (x - x_i) + \dots \quad (34)$$

现在用(34) 式前两项来表示, 即研究 U 的二级近似. 此时 U_i 等于 U 在 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 的中点即 x_i 上的项, 于是

$$U_i = U_i. \quad (35)$$

同样的, 取 F 的二级近似

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^n + \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_i^n (t - t_n),$$

则 $H_{i+1/2}^n$ 等于 $F_{i+1/2}$ 在 $[t_n, t_n + \Delta t]$ 的中点上的值, 于是

$$H_{i+1/2}^n = F_{i+1/2}^{t_n + \Delta t/2}. \quad (36)$$

现在(33) 式可改写为

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n), \quad (37)$$

式中 $H_{i+1/2}^n = F_{i+1/2}^{t_n + \Delta t/2}$. 下面推导 $F_{i+1/2}^{t_n + \Delta t/2}$ 的表达式.

将方程(28) 变换成(36)、(37) 式

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w^{(l)}}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (38)$$

利用特征线方法解方程(38). 过 $(x_{i+1/2}, t_n + \Delta t/2)$ 作正特征线和负特征线, 分别与 $t = t_n$ 交于 $(x_{i+L/2}, t_n)$ 及 $(x_{i+R/2}, t_n)$. 它们与 $(x_{i+1/2}, t_n)$ 之间的距离为 $\lambda_+ \Delta t/2$ 及 $-\lambda_- \Delta t/2$, 如图 1.

根据特征线上关系式有

$$w^{(l)} = \begin{cases} w_{i+L/2}^{(l)} & \text{正特征线上,} \\ w_{i+R/2}^{(l)} & \text{负特征线上.} \end{cases} \quad (39)$$

考虑到(24a)式及(39)式,下式成立

$$\Delta W = \Lambda^+ W_{i+L/2}^n + \Lambda^- W_{i+R/2}^n \quad (40)$$

以 R^{-1} 乘(40)式并注意到(24d)式有

$$F_{i+1/2}^{t+\Delta t/2} = F_{i+L/2}^+ + F_{i+R/2}^- \quad (41)$$

在 U 的 Taylor 展式取两项的情况下, F 的表达式为

$$F_{i+L/2}^+ = F_i^n + \left(\frac{\partial F^+}{\partial x} \right)_i \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Lambda^+ \Delta t}{2} \right), \quad (42)$$

$$F_{i+R/2}^- = F_{i+1}^n - \left(\frac{\partial F^-}{\partial x} \right)_{i+1} \left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Lambda^- \Delta t}{2} \right), \quad (43)$$

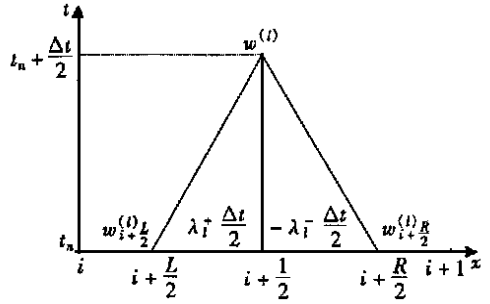


图 1

式中的 $(\partial F^+ / \partial x)_i$ 有后差 $(F_i - F_{i-1}) / \Delta x$ 及前差 $(F_{i+1} - F_i) / \Delta x$ 两种算法。从物理意义上考虑,在这两个表达式中,应选用绝对值小的那一个。于是

$$\left(\frac{\partial F^+}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \min \text{mod}(\Delta F_{i-1/2}^+, \Delta F_{i+1/2}^+),$$

$$\left(\frac{\partial F^-}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{1}{\Delta x} \min \text{mod}(\Delta F_{i+1/2}^-, \Delta F_{i+3/2}^-).$$

将之代入(42)、(43)式得

$$F_{i+L/2}^+ = F_i^n + \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_c^+) \min \text{mod}(\Delta F_{i-1/2}^+, \Delta F_{i+1/2}^+), \quad (44)$$

$$F_{i+R/2}^- = F_{i+1}^n - \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_c^-) \min \text{mod}(\Delta F_{i+1/2}^-, \Delta F_{i+3/2}^-), \quad (45)$$

这里

$$\mathbf{A}_c^\pm = \frac{\Lambda^\pm \Delta t}{\Delta x}. \quad (46)$$

不难看出, (37)、(41)、(44)、(45)、(46) 式就是(27)式,因此新格式可以看作是推广的二阶 $\Lambda \mu \Lambda$ 格式。

3 稳定性条件及总变差

由于 LW 格式的稳定性条件是 $c \leq 1$, 而 WB 格式的稳定性条件是 $c \leq 2$ 。因此本格式的稳定性条件是

$$c \leq 1 \quad \text{即} \quad \frac{|a| \Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (47)$$

根据定义,总变差为

$$TV^n = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| = \sum_i |\Delta u_{i+1/2}^n|. \quad (48)$$

引进

$$S_{i+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{若 } \Delta u_{i+1/2} \geq 0, \\ -1 & \text{若 } \Delta u_{i+1/2} < 0, \end{cases} \quad (49)$$

则(48)式可写为

$$TV^n = \sum_i S_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2}^n,$$

$$\left(\frac{\partial TV}{\partial t}\right)^n = \sum_i S_{i+1/2} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}\right)^n - \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^n \right]. \quad (50)$$

由(11a)、(11b)、(11c)及(11d),有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^n &= -\frac{1}{\Delta x} (h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2}^{+n} + f_{i+1/2}^{-n} - f_{i-1/2}^{+n} - f_{i-1/2}^{-n}) = \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left[f_i^{+n} + \frac{1}{2}(1-c^+) \min \operatorname{mod}(\Delta f_{i-1/2}^{+n}, \Delta f_{i+1/2}^{+n}) - \right. \\ &\quad \left. f_{i-1}^{+n} - \frac{1}{2}(1-c^+) \min \operatorname{mod}(\Delta f_{i-3/2}^{+n}, \Delta f_{i-1/2}^{+n}) + \right. \\ &\quad \left. f_{i+1}^{-n} - \frac{1}{2}(1+c^-) \min \operatorname{mod}(\Delta f_{i+1/2}^{-n}, \Delta f_{i+3/2}^{-n}) - \right. \\ &\quad \left. f_i^{-n} + \frac{1}{2}(1+c^-) \min \operatorname{mod}(\Delta f_{i-1/2}^{-n}, \Delta f_{i+1/2}^{-n}) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$\min \operatorname{mod}(\Delta f_{i-1/2}^{+n}, \Delta f_{i+1/2}^{+n})$ 意指取两者绝对值为小的那个元素. 若令

$$\min \operatorname{mod}(\Delta f_{i-1/2}^{+n}, \Delta f_{i+1/2}^{+n}) = k \Delta f_{i-1/2}^{+n},$$

则当 $|\Delta f_{i-1/2}^{+n}| < |\Delta f_{i+1/2}^{+n}|$ 时 $k = 1$, 而当 $|\Delta f_{i+1/2}^{+n}| < |\Delta f_{i-1/2}^{+n}|$ 时,

$$\min \operatorname{mod}(\Delta f_{i-1/2}^{+n}, \Delta f_{i+1/2}^{+n}) = \Delta f_{i+1/2}^{+n} = k \Delta f_{i-1/2}^{+n}.$$

考虑到 $\Delta f_{i-1/2}^{+n}, \Delta f_{i+1/2}^{+n}$ 同号, 我们有 $0 \leq k \leq 1$. 注意到以上事实, (51) 式可写为:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n &= -\frac{1}{\Delta x} (\Delta f_{i-1/2}^{+n} + \Delta f_{i+1/2}^{-n}) - \frac{k_1}{2\Delta x} (1-c^+) \Delta f_{i-1/2}^{+n} + \frac{k_2}{2\Delta x} (1-c^+) \Delta f_{i-1/2}^{+n} + \\ &\quad \frac{k_3}{2\Delta x} (1+c^-) \Delta f_{i+1/2}^{-n} - \frac{k_4}{2\Delta x} (1+c^-) \Delta f_{i+1/2}^{-n}, \end{aligned} \quad (52)$$

式中

$$0 \leq k_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (53)$$

现在(52)式变为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = -\frac{1}{\Delta x} \alpha \Delta f_{i-1/2}^{+n} - \frac{1}{\Delta x} \beta \Delta f_{i+1/2}^{-n}, \quad (54)$$

其中

$$\alpha = \left[1 - \frac{1-c^+}{2} (k_2 - k_1) \right], \quad \beta = \left[1 - \frac{1+c^-}{2} (k_3 - k_4) \right] = \left[1 - \frac{1-c^+}{2} (k_3 - k_4) \right]. \quad (55)$$

根据稳定性条件(47)式有 $0 \leq c^+ \leq 1$, 由此易知

$$\alpha \geq 1/2, \quad \beta \geq 1/2.$$

另一方面(54)式也可写为:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = -\alpha_{i-1/2} \Delta u_{i-1/2}^n + \beta_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2}^n, \quad (56)$$

其中

$$\alpha_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta x} \frac{f_i^{+n} - f_{i-1}^{+n}}{u_i^n - u_{i-1}^n} \alpha, \quad \beta_{i+1/2} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{f_{i+1}^{-n} - f_i^{-n}}{u_{i+1}^n - u_i^n} \beta.$$

因为

$$\frac{\partial f^+}{\partial u} = a^+ \geq 0, \quad \frac{\partial f^-}{\partial u} = a^- \leq 0,$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_i^{+n} - f_{i-1}^{+n}}{u_i^n - u_{i-1}^n} \geq 0, & \quad \alpha_{i-1/2} \geq 0, \\ \frac{f_{i+1}^- - f_i^-}{u_{i+1}^n - u_i^n} \leq 0, & \quad \beta_{i+1/2} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

将(56)式代入(50)式得

$$\left(\frac{\partial TV}{\partial t}\right)^n = \sum_i S_{i+1/2} [-\alpha_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2}^n + \beta_{i+3/2} \Delta u_{i+3/2}^n + \alpha_{i-1/2} \Delta u_{i-1/2}^n - \beta_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2}^n] \cdot$$

重新编号整理后得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial TV}{\partial t}\right)^n &= \sum_i [-S_{i+1/2} \alpha_{i+1/2} + S_{i-1/2} \beta_{i+1/2} + S_{i+3/2} \alpha_{i+1/2} - S_{i+1/2} \beta_{i+1/2}] \Delta u_{i+1/2}^n = \\ &= - \sum_i \gamma_{i+1/2} |\Delta u_{i+1/2}^n| \cdot \end{aligned} \quad (58)$$

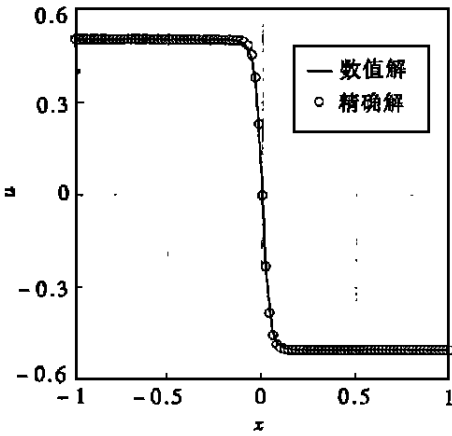


图 2

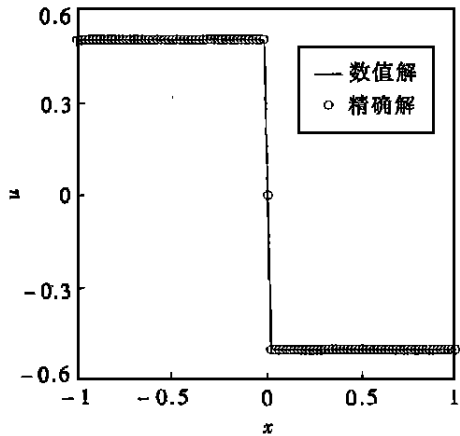


图 3

这里利用了(49)式, 式中

$$\gamma_{i+1/2} = \alpha_{i+1/2} \left[1 - \frac{S_{i+3/2}}{S_{i+1/2}} \right] + \beta_{i+1/2} \left[1 - \frac{S_{i-1/2}}{S_{i+1/2}} \right] \cdot$$

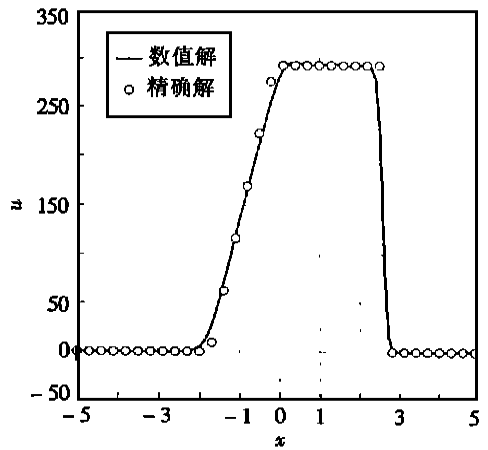
根据(49)及(57)式不难看出 $\gamma_{i+1/2} \geq 0$, 于是由(58)式得

$$\left(\frac{\partial TV}{\partial t}\right)^n \leq 0$$

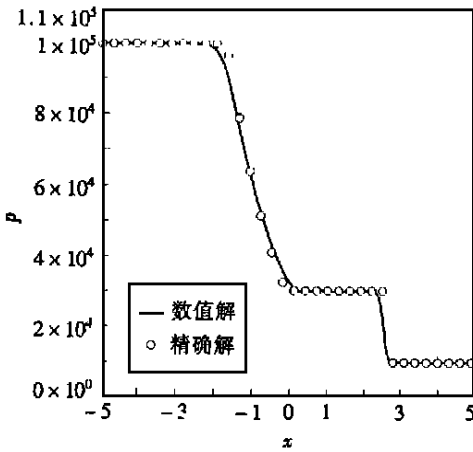
此式说明本文提出的二阶差分格式总变差是不增的(TVD)。众所周知, TVD 格式能抑制解在激波处的波动。

4 计算实例

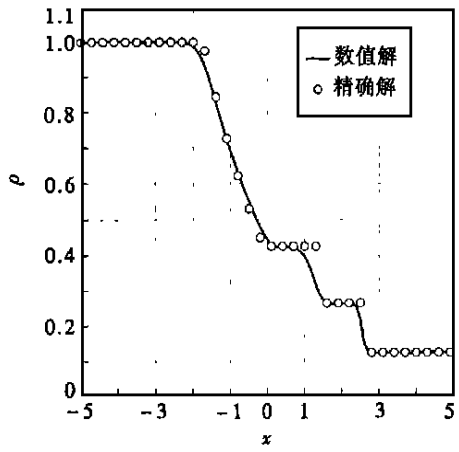
4.1 Burger 方程的计算



(a)



(b)



(c)

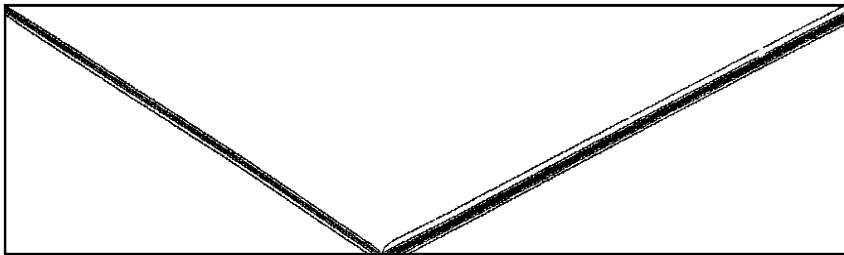
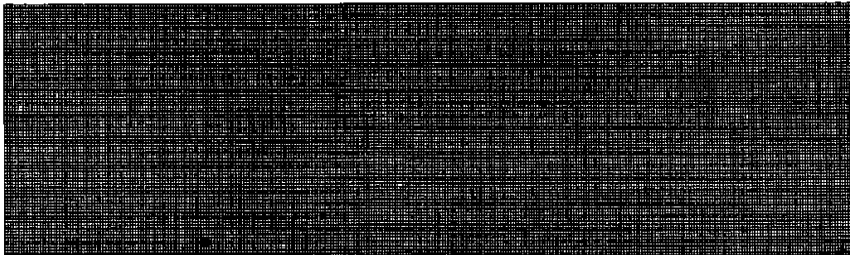
图 4

一维 Burger 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

边界条件和初始条件为

$$u(t, -1) = 0.5, \quad u(t, 1) = -0.5, \quad u(0, x) = -x/2$$



$$IL = 321, JL = 81, M_\infty = 2.90$$

图 5

图 2, 图 3 分别给出 $\mu = 10^{-4}$ 和 $\mu = 10^{-2}$ 的计算结果。实线是数值解。带圈的是精确解。可以看出数值解与精确解符合得很好。解无波动。当 $\mu = 10^{-4}$ 时, 激波仅跨过一个网格点, 分辨率高。应该指出, 本格式的结果与文[2]中提出的 NND 格式的计算结果几乎重合, 但我们的格式能算到 Courant 数等于 1 左右, 而文[2]中提出的 NND 格式当时间导数项取一阶差分格式时只能算到 $c = 0.6$ 左右, 超过它解就开始振荡了。

4.2 激波管内流动的数值计算

控制方程为一维不定常可压缩流的欧拉方程 (13), 初始条件为:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & x \leq 0, \\ U_R & x > 0, \end{cases}$$

其中 $U_L = (1, 0, 2.5 \times 10^5)^T$, $U_R = (0.125, 0, 2.5 \times 10^4)^T$.

采用本文提出的 NND 格式计算了激波管内流动. 图 4 显示了计算所得的速度分布, 压力分布和密度分布. 和准确解相比符合得很好. 此格式所得的结果和张涵信格式^[2]计算的结果几乎重合. 本格式的最大 Courant 数约为 0.95, 较张涵信格式的对应值 0.4 左右为大.

4.3 入射激波平板反射问题

来流 $M_\infty = 2.9$, 激波的入射角为 29° , 计算区域是 $0 < x < 4, 0 < y < 1$. 波后 $y = 1$ 上的边界条件利用斜激波关系式精确得出. 图 5 是网格及等压线分布图. 可见格式无波动, 激波分辨率好. 图 6 是三个不同截面 $y = 0.25, 0.5, 0.75$ 上的压力分布, 与精确解符合得很好.

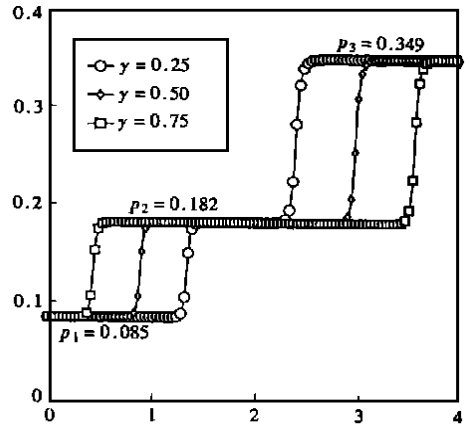
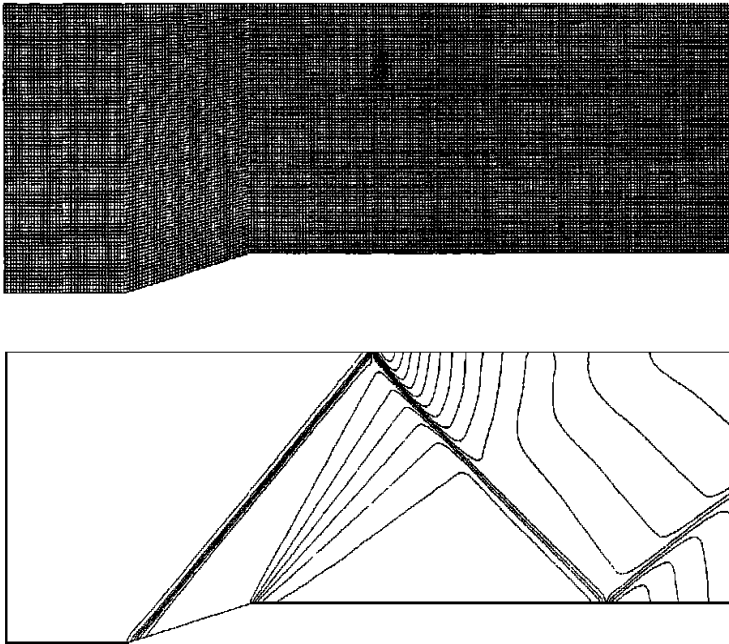


图 6



$IL = 241, JL = 81, M_\infty = 2.00$

图 7

4.4 二维通道内可压缩流体的定常流动

单侧收缩 15° . 来流 $M_\infty = 2.0$. 图 7 是网格及等压线分布图. 可以看出, 整个流场分辨率好, 无数值波动.

本文曾在全国第五届计算流体力学会议上报告过,部分内容在会议论文集中刊出^[5]。作者感谢张涵信院士对本文的支持和讨论。在他的鼓励下,我们将论文全文发表,并增加了若干二维算例。

[参 考 文 献]

- [1] 张涵信. 差分计算中激波上、下解出现波动的探讨[J]. 空气动力学学报, 1984, 2(1): 12~ 19.
- [2] 张涵信. 无波动, 无自然参数的耗散差分格式[J]. 空气动力学学报, 1988, 6(2): 143~ 165.
- [3] Anderson A, Tannehill C, Pletcher H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer [M]. McGraw_Hill Book Company, 1984.
- [4] Warming R P, Hyett B J. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite_difference methods[J]. J Comput Phys, 1974, 14: 159~ 179.
- [5] 吴望一. 新型无波动、无自由参数的二阶 TVD 差分格式[A]. 见: 全国第五届计算流体力学会议论文集[C]. 太平, 1990.

A New NND Difference Scheme of Second Order in Time and Space

Wu Wangyi¹, Cai Qingdong²

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China;

2 State Key Laboratory for Turbulence Research, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: The study by Zhang Hanxin shows that in order to suppress the spurious oscillation at both upstream and downstream of the shock, the coefficient of the third order derivative on the right hand side of the modified equation of the difference scheme must be positive upstream and negative downstream of the shock. According to this principle, a new non_oscillatory, containing no free parameters and dissipative difference scheme of second order both in time and space is proposed. It is proved that this scheme possesses TVD property and is generalized Gudanov scheme of second order. In the presence of the shock wave in the flow field, this scheme is the generalization and improvement of the Lax_Wendroff scheme.

Several numerical examples are given which demonstrate that the proposed scheme is non_oscillatory of high order accuracy and high resolution. It also has the advantages of compact form, greater maximum allowable Courant number and convenient to use.

Key words: new NND difference scheme; Euler equation