应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0732_09

一类间接控制系统的绝对稳定性问题

赵洪涌[1,2], 滕志东[2]

(1 四川大学数学学院, 成都 610064; 2 新疆大学 数学系, 乌鲁木齐 830046)

(叶庆凯推荐)

摘要: 利用厄米特二次型和若当标准形理论研究了一般间接控制系统的绝对稳定性问题, 给出了绝对稳定性的代数形式的判别准则 所得到的结果是新的和有用的

关 键 词: 间接控制系统; 绝对稳定性; 厄米特二次型; 若当标准形

中图分类号: O175 13; O231 文献标识码: A

引 言

考察间接调节的控制系统:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ax + B\ (\ ), \\ &= C^{\mathrm{T}}x + \ (\ ), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 x $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}$, A 为 n n 稳定矩阵, B 和 C 为 n 维向量, 记号 T 表示转置, 为常数, $(\ ): \mathbf{R}$ $\mathbf{R}$ 是连续函数, 且满足条件:

$$(\ ) > 0 \quad (\quad \mathbf{R}, \quad 0) \tag{2}$$

许多专家广泛研究了系统(1) 的绝对稳定性问题, S. Lefschetz[1] 讨论了一般情形的绝对稳定性问题, 给出了一个充分的判别准则 廖晓昕[2], 裘晓钢和舒仲周[3] 对第二标准型的控制系统[4]:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= - \ x_i + \ , (i = 1, 2, \ , n), \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j - \ - f(\ ), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

进行了广泛的研究, 给出了一系列充分的和必要的绝对稳定性的判别准则 我们看到系统(3) 实际上就是系统(1) 的一类特殊情形:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= - \ x_i + \quad (i = 1, 2 \ , n), \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j - \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

的直接推广 最近张继业和舒仲周[5] 利用降维的方法研究了系统(3), 给出了一个总结性的结果

根据线性代数理论我们知道, 任何一个 n n 矩阵 A 都存在非奇异矩阵 S, 使得

收稿日期: 1998_12_31; 修订日期: 2000_01_25
作者简介: 赵洪涌(1967~), 博士, 讲师.

$$A^{*} = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \quad , A_r), \tag{5}$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} {}_i & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & {}_i & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & {}_i \end{pmatrix}_{n_i \quad n_i} \qquad (i = 1, 2, \quad , r), \tag{6}$$

这里 $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, $n_i \quad 1$, ${}_i$ 为A 的一个特征值, A^{*} 称为 A 的若当标准形　因此文献[2, 3, 5] 中的工作只是对矩阵 A 的一类特殊的若当标准形: 即 $r = n$ 和 $n_i = 1$, 研究了系统(3) 的绝对稳定性问题　此外张维[6] 对一个特殊的若当标准形:

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2), \tag{7}$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad A_2 = \mathrm{diag}(\ , \ , \quad , \ )$$

利用 Popov 频率准则[7, 8] 讨论了直接调节控制系统:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ax + B\ (\ ), \\ &= c^{\mathrm{T}} x \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

的绝对稳定性问题

受文献[5, 6] 的启发, 本文对一般情形的若当标准形(5) 和(6), 从而也就相当于对一般情形的系统(1), 讨论绝对稳定性问题　首先我们利用厄米特二次型理论给出一个一般性的判别准则, 然后对形如(6) 的若当块给出一个代数形式的判别条件　所得到的判别准则容易验证, 从而使用方便, 这样就从比较全面的角度研究了系统(1) 的绝对稳定性问题

1　预备引理

为了下面叙述及证明上的方便, 本节引入几个引理和记号

引理 1　设 $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$ 为厄米特矩阵、Q_{11} 为正定的, 则 Q 为正定的充分必要条件为 $Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12}$ 正定

这个引理是实矩阵情形的直接推广, 证明也是完全类似的, 这里省略

引理 2　设 A 为 $n \quad n$ 稳定复矩阵、G 为 $n \quad n$ 正定厄米特矩阵, 则存在唯一的 $n \quad n$ 正定厄米特矩阵 H, 使得:

$$HA + A^{\mathrm{T}}H = - G \tag{9}$$

这个引理也是实矩阵情形的直接推广, 可以按照实矩阵情形类似地证明, 证明方法之一在文献[7] 中给出, 这里省略

引入记号:

$$b_{ij}^{(0)} = j - i + 2,\ b_{ij}^{(m)} = \sum_{k=i-1}^{i-1} b_{kj}^{(m-1)} + b_{j-1j}^{(m-1)},\ i, j = 1, 2, \quad , n,\ i \quad j,\ m = 1, 2,$$

我们有:

引理 3　对任何整数 $m \quad 0$, $b_{i-1j}^{(m)} = b_{ij+1}^{(m)}$, $b_{ij}^{(m+1)} = b_{i+1j}^{(m+1)} + b_{ij+1}^{(m)}$

证明 采用归纳法, 当 $m=0$ 时, $b_{i-j}^{(0)}=j-i+3$, $b_{ij+1}^{(0)}=j-i+3$, 所以 $b_{i-1j}^{(0)}=b_{ij+1}^{(0)}$, 假设当 $m=k$ 时 $b_{i-1j}^{(k)}=b_{ij+1}^{(k)}$ 成立, 当 $m=k+1$ 时,

$$b_{i-1j}^{(k+1)}=\sum_{p=i-2}^{j-1} b_{pj}^{(k)}+b_{j-1j}^{(k)}=b_{i-2j}^{(k)}+\cdots+b_{j-1j}^{(k)}+b_{j-1j}^{(k)},$$

$$b_{ij+1}^{(k+1)}=\sum_{p=i-1}^{j} b_{pj+1}^{(k)}+b_{ij+1}^{(k)}=b_{i-1j+2}^{(k)}+\cdots+b_{jj+1}^{(k)}+b_{jj+1}^{(k)},$$

因为 $b_{i-2j}^{(k)}=b_{i-1j+1}^{(k)}$, $b_{i-1j}^{(k)}=b_{ij+1}^{(k)}$, $\cdots$, $b_{j-1j}^{(k)}=b_{jj+1}^{(k)}$,

所以必有 $b_{i-1j}^{(k+1)}=b_{ij+1}^{(k+1)}$, 因此 $b_{i-1j}^{(m)}=b_{ij+1}^{(m)}$ 对一切 $m\geq 0$ 成立

又因为 $b_{ij}^{(m+1)}=\sum_{p=i-1}^{j-1} b_{pj}^{(m)}+b_{j-1j}^{(m)}$, $b_{i+1j}^{(m+1)}=\sum_{p=}^{j-1} b_{pj}^{(m)}+b_{j-1j}^{(m)}$,

所以 $b_{ij}^{(m+1)}-b_{i+1j}^{(m+1)}=b_{i-1j}^{(m)}$

由于 $b_{i-1j}^{(m)}=b_{ij+1}^{(m)}$,

故必有 $b_{ij}^{(m+1)}=b_{i+1j}^{(m+1)}+b_{ij+1}^{(m)}$ 引理证毕

对任何的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 当 $i\leq j$ 时定义:

$$h_{ij}=(-1)^{j-i+3}\sum_{k=0}^{n-j} b_{ij}^{(k-1)}\ {}_{j+k}/(2\ )^{j-i+2k+1} \qquad (10)$$

这里规定 $b_{ij}^{(-1)}=1$ 当 $i>j$ 时定义 $h_{ij}=h_{ji}$, 这里 ${}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 ≥ 0 都是实数

我们有:

引理 4 对任何的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 有

$$2h_{ij}+h_{ij+1}+h_{i+1j}=\begin{cases}-\ {}_i & (i=j),\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \qquad (11)$$

证明 设 $i<j$, 因为 $b_{ij}^{(0)}=b_{i+1j}^{(0)}+1$, 根据引理 3 又得到 $b_{ij}^{(1)}=b_{i+1j}^{(1)}+b_{ij+1}^{(0)}$, $\cdots$, $b_{ij}^{(k)}=b_{i+1j}^{(k)}+b_{ij+1}^{(k-1)}$, $\cdots$, $b_{ij}^{(n-j-1)}=b_{i+1j}^{(n-j-1)}+b_{ij+1}^{(n-j-2)}$, 这样根据 h_{ij}, h_{i+1j}, h_{ij+1} 的表达式(10) 经过详细计算得到:

$$2h_{ij}+h_{i+1j}+h_{ij+1}=0$$

设 $i>j$, 因为 $h_{ij}=h_{ji}$, $h_{ij+1}=h_{j+1i}$, $h_{i+1j}=h_{ji+1}$, 由于 $2h_{ji}+h_{j+1i}+h_{ji+1}=0$, 所以

$$2h_{ij}+h_{i+1j}+h_{ij+1}=0$$

设 $i=j$, 则 $b_{ii}^{(0)}=2$, 根据引理 3 又得到

$$b_{ii}^{(1)}=2b_{ii-1}^{(0)},\ b_{ii}^{(2)}=2b_{ii+1}^{(1)},\ \cdots,\ b_{ii}^{(n-i-1)}=2b_{ii+1}^{(n-i-2)},$$

这样由 h_{ii}, h_{ii+1}, 的表达式(10) 经过详细计算得到:

$$2h_{ii}+h_{i+1i}+h_{ii+1}=-\ {}_i$$

引理证毕

对任何的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 定义:

$$a_{ij}^{(0)}=\begin{cases}1 & (i\leq j),\\ 0 & (i>j),\end{cases}\qquad a_{ij}^{(1)}=\begin{cases}b_{ij}^{(0)} & (i\leq j),\\ 1 & (i=j+1),\\ 0 & (i>j+1)\end{cases}$$

和

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} b_{ij}^{(m-1)} & (i = j), \\ b_{ji}^{(m-k)} & (i = j + k - 1; k = 2, 3, \quad , m) \\ 1 & (i = j + m, m = 1, 2, \quad) \\ 0 & (i > j + m) \end{cases}$$

定义 $h_{ij} = (-1)^{j-i+3} \sum_{k=0}^{n-j} a_{ij}^{(k)} \quad _{j+k} / (2 \quad)^{j-i+2k+1} \quad (i, j = 1, 2, \quad , n)$

我们有:

引理 5　对任何蹬 $i, j = 1, 2, \quad , n$, 都有: $h_{ij} = h_{ji}$

证明　当 $i \quad j$ 时, 由 h_{ij}, $a_{ij}^{(m)}$ 和 h_{ji} 的表达式显然有 $h_{ij} = h_{ji}$

当 $i > j$ 时, 不妨设 $i = j + l \quad l \quad \{1, 2, \quad , n - j\}$, 显然有 $a_{j+lj}^{(k)} = 0 (k = 0, 1, \quad , l - 1)$, $a_{j+lj}^{(l)} = 1$, $a_{j+lj}^{(l+1)} = b_{jj+l}^{(0)}$, $\quad$, $a_{j+lj}^{(n-j)} = b_{jj+l}^{(n-j-1-l)}$,

因此:

$$h_{ij} = (-1)^{j-l} \sum_{k=0}^{n-j-l} b_{jj+l}^{(k-1)} \quad _{j+l+k} / (2 \quad)^{l+2k+1},$$

这里规定 $b_{jj+l}^{(-1)} = 1$, 另一方面我们又有:

$$h_{ij} = h_{jj+l} = (-1)^{l+3} \sum_{k=0}^{n-j-l} b_{jj+l}^{(k-1)} \quad _{j+l+k} / (2 \quad)^{l+2k+1},$$

所以 $h_{ij} = h_{ji}$　引理证毕

2　一 般 情 形

考察一般间接调节系统(1), 设存在一个非奇异 $n \quad n$ 矩阵 $\boldsymbol{S}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^* \quad \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^*, \boldsymbol{A}_2^*, \quad , \boldsymbol{A}_r^*), \tag{12}$$

其中每个 $\boldsymbol{A}_i^*$ 为 $n_i \quad n_i$ 矩阵, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, $n_i \quad 1$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 稳定, 故每个 $\boldsymbol{A}_i^*$ 也稳定　在(12) 式中 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 但如果 $\boldsymbol{S}$ 为复矩阵, 则每个 $\boldsymbol{A}_i^*$ 可以是复矩阵, 对于系统(1) 选取 Lurie 型 Liapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}, \quad) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \quad _0 \quad (s)ds \tag{13}$$

这里 $\boldsymbol{H}$ 为 $n \quad n$ 厄米特矩阵, $\quad > 0$ 为常数, 都是待定的　因为 $\boldsymbol{H}$ 可以写成 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + i\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 为实矩阵, 根据厄米特矩阵的性质, 对任何 $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^n$, 得到 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x}$, 因此对任何 $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^n$, $\quad \mathbf{R}$, $V(\boldsymbol{x}, \quad)$ 是实数, 求全导数得到

$$V(\boldsymbol{x}, \quad) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \quad (\quad) - \quad (\quad)\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \quad ^2(\quad), \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{H}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2} \quad \boldsymbol{C}$, $\quad = - \quad$, 令:

$$S(\boldsymbol{x}, \quad) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \quad - \quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \quad ^2$$

容易验证 $S(\boldsymbol{x}, \quad)$ 是 $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^n$, $\quad \mathbf{R}$ 的实二次型　将 $S(\boldsymbol{x}, \quad)$ 扩充为厄米特二次型:

$$R(\boldsymbol{z}, \quad) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H})\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \quad - \quad ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} - \quad ^{\mathrm{T}} \quad , \tag{15}$$

这里 $\boldsymbol{z} \quad \mathbf{C}^n$, $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ 为复数向量 $\boldsymbol{z}$ 的共轭转置, $\quad \mathbf{C}$, $\quad ^{\mathrm{T}}$ 为 $\quad$ 的共轭复数, 显然我们有: 如果厄米特二次型 $R(\boldsymbol{z}, \quad)$ 对 $\boldsymbol{z} \quad \mathbf{C}^n$, $\quad \mathbf{C}$ 负定, 则实二次型 $S(\boldsymbol{x}, \quad)$ 对 $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{R}^n$, $\quad \mathbf{R}$ 也负定　在(15) 式中引入线性变换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}$, 这里矩阵 S 由(12) 式确定, $\boldsymbol{u} \quad \mathbf{C}^n$, 则我们有:

$$R(z, \ ) = R(u, \ ) =$$
$$u^{T}(H^{*}A^{*} + A^{*T}H^{*})u - u^{T}d^{*} \quad - \quad {}^{T}d^{*T}u - \quad {}^{T} \ , \tag{16}$$

其中 $A^{*} = S^{-1}AS, H^{*} = S^{T}HS, d^{*} = S^{T}d = - H^{*}B^{*} - \frac{1}{2}C^{*}, B^{8} = S^{-1}B, C^{*} = S^{-1}C$ 显然如果 S 是复矩阵, 则 d^{*}, B^{*} 和 C^{*} 都可以是复数向量

因为 A^{*} 具有(12) 式, 故我们选取

$$H^{*} = \mathrm{diag}(H_1^{*}, H_2^{*}, \ \ , H_r^{*})$$

其中每个 H_i^{*} 为 $n_i \quad n_i$ 的厄米特矩阵, 计算得到:

$$H^{*}A^{*} + A^{*T}H^{*} =$$
$$\mathrm{diag}(H_1^{*}A_1^{*} + A_1^{*T}H_1^{*}, H_2^{*}A_2^{*} + A_2^{*T}H_2^{*}, \ \ , H_r^{*}A_r^{*} + A_r^{*T}H_r^{*})$$

由于每个 A_i^{*} 是稳定的, 故对每一个正定 $n_i \quad n_i$ 厄米特矩阵 G_i^{*}, 由引理 2 得知, 存在唯一的正定 $n_i \quad n_i$ 厄米特矩阵 H_i^{*}, 使得 $H_i^{*}A_i^{*} + A_i^{*T}H_i^{*} = - G_i^{*}$, 因此

$$H^{*}A^{*} + A^{*T}H^{*} = \mathrm{diag}(- G_1^{*}, - G_2^{*}, \ \ , - G_r^{*}) \tag{17}$$

分解向量:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_r \end{pmatrix}, \ B^{*} = \begin{pmatrix} B_1^{*} \\ B_2^{*} \\ \\ B_r^{*} \end{pmatrix}, \ C^{*} = \begin{pmatrix} C_1^{*} \\ C_2^{*} \\ \\ C_r^{*} \end{pmatrix}, \ d^{*} = \begin{pmatrix} d_1^{*} \\ d_2^{*} \\ \\ d_r^{*} \end{pmatrix}$$

以及常数 $\ = \ _1 + \ _2 + \ \ + \ _r$, 其中 u_i, B_i^{*}, C_i^{*} 和 d_i^{*} 都是 n_i 维向量, 经过计算得到 $d_i^{*} = - H_i^{*}B_i^{*} - \frac{1}{2}C_i^{*}$, 因此计算(16) 式我们最终得到:

$$R(u, \ ) = - \sum_{i=1}^{r}(u_i^{T}G_i^{*}u_i + u_i^{T}d_i^{*} \quad + \quad {}^{T}d_i^{*T}u_i + \quad _i \ {}^{T}) =$$
$$- \sum_{i=1}^{r}R_i(u_i, \ ), \tag{18}$$

其中

$$R_i(u_i, \ ) = (u_i^{T} \quad {}^{T})\begin{pmatrix} G_i^{*} & d_i^{*} \\ d_i^{*T} & _i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ \\ \end{pmatrix}$$

由引理 1 得知厄米特二次型 $R_i(u_i, \ )$ 正定的充要条件为 $_i > d_i^{*T}G_i^{*-1}d_i^{*}$ 这样由(18) 式得到当 $_i > d_i^{*T}G_i^{*-1}d_i^{*}$ $(i = 1, 2, \ \ , r)$ 时厄米特二次型 $R(z, \ )$ 是负定的 由于每个 H_i^{*} 正定, 故 H^{*} 也正定, 因为 $H = (S^{T})^{-1}H^{*}S^{-1}$, 所以 H 是正定的厄米特矩阵, 因此 Liapunov 函数 $V(x, \ )$ 正定 我们有结论如下:

定理 1 设矩阵 A 稳定, 存在非奇异矩阵 S 使得 $S^{-1}AS$ 具有(12) 式, 如果存在常数 $\ > 0$ 和正定厄米特矩阵 G_i^{*} 使得 $_i > d_i^{*T}G_i^{*-1}d_i^{*}$ $(i = 1, 2, \ \ , r)$, 则系统(1) 对一切满足条件(2) 的函数 $(\ )$ 是绝对稳定的

由若当标准形理论, 一定存在非奇异的矩阵 S 使得(12) 中的每一个 A_i^{*} 为 $n_i \quad n_i$ 若当块 (6), 因此我们有:

推论 1 设矩阵 A 稳定, 每个 A_i^{*} 为 $n_i \quad n_i$ 若当块, 如果存在常数 $\ > 0$ 和正定厄米特矩阵 G_i^{*} 使得

$$_i > d_i^{*\,T} G_i^{*\,-1} d_i^* \ (i = 1, 2, \quad , r) \tag{19}$$

则系统(1) 对一切满足条件(2) 的函数 ( ) 是绝对稳定的

从推论1 我们看到, 若对每一个若当块 A_i^* 通过估计不等式(19) 能够得到代数形式的判别式, 则我们也就得到了系统(1) 的代数形式的绝对稳定性的判别准则

3　若当块情形

本节的目的是对若当块 A_i^* 给出不等式(19) 的估计方法, 不失一般性我们直接假定系统(1) 中的矩阵 A 就是一个 $n\quad n$ 若当块, 即

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & & & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & \end{pmatrix}$$

其中, Re = < 0, 向量 $B = (b_1, b_2, \quad , b_n)^T$, $C = (c_1, c_2, \quad , c_n)^T$ 是复数向量, 为实数

设 G 为给定的 $n\quad n$ 正定厄米特矩阵, H 为满足:

$$HA + A^T H = - G \tag{20}$$

的 $n\quad n$ 正定厄米特矩阵, 设 > 0 为常数, 令 $d = - HB - \frac{1}{2} C$, 则不等式(19) 变为

$$- \quad > d^T G^{-1} d \tag{21}$$

选取 $G = \mathrm{diag}(\ _1, \ _2, \quad , \ _n)$, 且 $_i > 0 (i = 1, 2, \quad , n)$, 令 $H = (h_{ij})$ 为 $n\quad n$ 实对称矩阵详细计算(20) 式我们得到

$$2h_{ij} + h_{i+1\,j} + h_{i\,j+1} = \begin{cases} - \ _i & (i = j), \\ 0 & (i \quad j), \end{cases} \tag{22}$$

$(i, j = 1, 2, \quad , n)$, 并规定当 $k > n$ 时 $h_{ik} = h_{ki} = 0$, 根据引理4 和5 得到满足(22) 式的 h_{ij} 为:

$$h_{ij} = (-1)^{j-j+3} \sum_{k=0}^{n-j} a_{ij}^{(k)} \ _{j+k} / (2\ )^{j-i+2k+1} \tag{23}$$

根据引理2 得知满足(20) 式的厄米特矩阵 H 就是所有元素由(23) 式所表示的矩阵 $H = (h_{ij})$, 并且是实的　设 $d = (d_1, d_2, \quad , d_n)^T$, 通过计算得到:

$$d_i = - \sum_{j=1}^{n} h_{ji} b_j - \frac{1}{2} c_i \qquad (i = 1, 2, \quad , n) \tag{24}$$

因此

$$d^T G^{-1} d = \sum_{i=1}^{n} d_i \bar{d}_i \ _i^{-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ji} b_j + \frac{1}{2} c_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ji} \bar{b}_j + \frac{1}{2} \bar{c}_i \right) \ _i^{-1}$$

对任何的 $i \quad \{1, 2, \quad , n\}$ 从 h_{ji} 的表达式(23) 得到 $d_i \bar{d}_i \ _i^{-1}$ 只依赖于 $_i, A_{i+1}, , , A_n$, 因此可以令:

$$f(A_i, A_{i+1}, , , A_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ji} b_j + \frac{1}{2} A c_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ji} \bar{b}_j + \frac{1}{2} A \bar{c}_i \right) A_i^{-1} \# \tag{25}$$

下面考虑 $f(A_i, A_{i+1}, , , A_n)$ 的极值问题, 设

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-j+3} a_{ji}^{(0)} b_j/(2L)^{i-j+1}. \tag{26}$$

计算得到

$$E_1 = -b_1/2L,\quad 2LE_i = -(E_{i-1}+b_i) \qquad (i=2,3,\cdots,n). \tag{27}$$

为了明确起见，我们将问题分成三种情形：

a) $E_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

b) $E_i = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

c) 存在 $i, j \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得 $E_i \neq 0,\ E_j = 0$. 情形c) 比较复杂，我们将另文详细讨论. 对于情形a)，当 $i=n$ 时，计算得到

$$f(A_n) = \left(A_nE_n + \frac{1}{2}Ac_n\right)\left(A_nE_n + \frac{1}{2}Ac_n\right)A_n^{-1}. \tag{28}$$

由导数 $f'(A_n) = 0$ 得到极值点为 $A_n^* = \frac{A}{2}|c_n||E_n|^{-1}$，而极小值为

$$f_n(A) = \min f(A_n) = A_n^*|E_n + |E_n|\cdot c_n\cdot|c_n|^{-1}|^2. \tag{29}$$

当 $i = n-1$ 时，计算得到

$$f(A_{n-1}, A_n^*) = \left(A_{n-1}E_{n-1} + M_{n-1}\right)\left(A_{n-1}E_{n-1} + M_{n-1}\right)A_{n-1}^{-1}. \tag{30}$$

其中 $M_{n-1} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j+2}a_{jn-1}^{(1)}A_n^* b_j/(2L)^{n-j+2} + \frac{1}{2}Ac_{n-1}$. 由导数 $f'(A_{n-1}, A_n^*) = 0$ 得到极值点为 $A_{n-1}^* = |M_{n-1}||E_{n-1}|^{-1}$，而极小值为

$$f_{n-1}(A) = \min f(A_{n-1}, A_n^*) = A_{n-1}^*|E_{n-1} + |E_{n-1}|\cdot M_{n-1}\cdot|M_{n-1}|^{-1}|^2. \tag{31}$$

一般地设 $A_n^*, A_{n-1}^*, \cdots, A_{i-1}^*$ 和 $f_n(A), f_{n-1}(A), \cdots, f_{i-1}(A)$ 已经求得，令：

$$M_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i-j+3}\sum_{k=1}^{n-i} a_{ji}^{(k)} A_{i+k}^* b_j/(2L)^{i-j+2k+1} + \frac{1}{2}Ac_i. \tag{32}$$

并且 $M_n = \frac{1}{2}Ac_n$，计算得到：

$$f(A_i, A_{i+1}^*, \cdots, A_i^*) = (A_iE_i + M_i)(A_iE_i + M_i)A_i^{-1}. \tag{33}$$

由导数 $f'(A_i, A_{i+1}^*, \cdots, A_n^*) = 0$ 得到极值点为 $A_i^* = |M_i||E_i|^{-1}$，而极小值为

$$\begin{aligned} f_i(A) &= \min f(A_i, A_{i+1}^*, \cdots, A_n^*) = \\ &A_i^*|E_i + |E_i|\cdot M_i\cdot|M_i|^{-1}|^2. \end{aligned} \tag{34}$$

这样我们最终求到了极值点 $A_1^*, A_2^*, \cdots, A_n^*$ 和极小值 $f_1(A), f_2(A), \cdots, f_n(A)$，并且对任何 $A>0$ 有：

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{d} = \sum_{i=1}^{n} d_id_iA_i^{-1} \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(A).$$

现在叙述下面的结论.

定理2 设 $E_i \neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，并且存在常数 $A>0$ 使得 $-AQ > \sum_{i=1}^{n} f_i(A)$，则系统(1)对一切满足条件(2)的函数 $U(R)$ 是绝对稳定的.

证明 因为由 $-AQ > \sum_{i=1}^{n} f_i(A)$，$f_i(A) = \min f(A_i, A_{i+1}^*, \cdots, A_n^*)$ 和 $f(A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n) = d_id_iA_i^{-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$，得知存在常数 $A_i > 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$-\ AQ > \ \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{d} = \underset{i=1}{\overset{n}{E}} d_i d_i A_i^{-1} \#$$

因此由定理1 和推论 1 得知定理 2 的结论成立, 定理证毕#

注1 在上面的计算中, 表达式 M_i 可以为零, 此时公式 $\min f(A_i, A_{i+1}^*, , , A_n^*) = A_i^* E_i + | E_i | \# M_i \# | M_i |^{-1} |^2$ 仍然是有意义的, 不难得到, 此时 $\min f(A_i, A_{i+1}^*, , , A_n^*) = 0\#$

对于情形 b), 经过计算得到 $b_i = 0(i = 1, 2, , , n)$, 从而系统(1) 变为

$$\left.\begin{aligned} &\hat{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \\ &R = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + QU(\boldsymbol{R})\# \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

我们有结论如下

定理 3 设 $E_i = 0(i = 1, 2, , , n)$, 并且 $Q < 0$, 则系统(1) 对一切满足条件(2) 的函数 $U(\boldsymbol{R})$ 是绝对稳定的#

定理 3 的证明是简单的, 下面考察几类特殊情况, 不妨设常数 $A = 1\#$

例 1 在系统(1) 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS} = \mathrm{diag}(K_1, K_2, , , K_n) < 0$, 即在(12) 式中 $r = n$, $\boldsymbol{A}_i^* = K_i(i = 1, 2, , , n)\#$ 按本节上面的方法对每个 $\boldsymbol{A}_i^* = A_i$ 计算得到 $E_1 = -\ b_i/2K_i$, $M_1 = \dfrac{1}{2}c_i$, $A_1^* = | M_1 | | E_1 |^{-1}$ 和

$$\min f(A_1) = A_1^* \ | E_1 + | E_1 | \# M_1 \# | M_1 |^{-1} |^2 = \begin{cases} -\ b_i c_i / K_i & (b_i c_i > 0), \\ 0 & (b_i c_i [\ 0), \end{cases}$$

在这里 $b_i, c_i(i = 1, 2, , , n)$ 都为实数# 因此不等式(19) 变为

$$B_i > \begin{cases} -\ b_i c_i / K_i, & (b_i c_i > 0), \\ 0 & (b_i c_i [\ 0), \end{cases}$$

并且 $-\ Q = \underset{i=1}{\overset{n}{E}} B_i > -\ \underset{i I\ I}{E} b_i c_i / K_i$, 这里 $I = \left\{ i \mid b_i c_i > 0 \right\}\#$ 我们有:

推论 2 设在(12) 式中 $\boldsymbol{A}^* = \mathrm{diag}(K_1, K_2, , , K_n) < \boldsymbol{0}$, 则当 $Q < \underset{i I\ I}{E} b_i c_i / K_i$ 时系统(1) 对一切满足条件(2) 的函数 $U(\boldsymbol{R})$ 是绝对稳定的#

例 2 在系统(1) 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS} = \mathrm{diag}(K_1, K_2, , , K_n)$, 且 $\mathrm{Re}K_i = L_i < 0\#$ 按上面同样的方法计算得到 $E_1 = -\ b_i/2L_i$, $M_1 = \dfrac{1}{2}c_i$, $A_1^* = | M_1 | | E_1 |^{-1}$ 和 $\min f(A_1) = A_1^* \ | E_1 + | E_1 | \# | M_1 \# | M_1 |^{-1} |^2 = -\ 4(\mathrm{Im}\sqrt{b_i c_i})^2 / L_i$, 这里 b_i, $c_i(i = 1, 2, , , n)$ 都为复数# 不等式(19) 变为 $B_i > -\ 4(\mathrm{Im}\sqrt{b_i c_i})^2 / L_i$, 并且 $-\ Q = \underset{i=1}{\overset{n}{E}} B_i > -\ \underset{i=1}{\overset{n}{E}} 4(\mathrm{Im}\sqrt{b_i c_i})^2 / L_i$, 我们有

推论 3 设在(12) 式中 $A^* = \mathrm{diag}(K_1, K_2, , , K_n)$, 且 $\mathrm{Re}K_i = L_i < 0$, 则当 $Q < \underset{i=1}{\overset{n}{E}} 4(\mathrm{Im}\sqrt{b_i c_i})^2 / L_i$ 时系统(1) 对一切满足条件(2) 的函数 $U(R)$ 是绝对稳定的#

[参 考 文 献]

[1] Lefsohetz S. Stability of Nonlinear Control Systems[M]. New York_London: Acad Press, 1965.
[2] 廖晓昕. 关于控制系统绝对稳定性准侧[J]. 应用数学和力学, 1982, **3**(2): 235~247.
[3] 裘晓钢, 舒仲周. 控制系统第二标准型的绝对稳定性[J]. 应用数学和力学, 1986, **7**(9): 785~800.
[4] 列托夫 A M. 非线性调节系统的稳定性[M]. 李惠译. 北京: 科学出版社, 1959.
[5] 张继业, 舒仲周. 直接控制系统绝对稳定性充要准则[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(3): 245~251.
[6] 张维, Luvie 型直接控制系统的绝对稳定性准则[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(10): 909~920.
[7] 谢惠民. 绝对稳定性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

On the Absolute Stability of a Class of Inditrect Control Systems

Zhao Hongyong[1,2], Teng Zhidong[2]
(1 College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R china;
2 Department of Mathematics, Xinjiang University, Br mqi 830046, P R China)

Abstract: The absolute stability of a class of indirect control systems by applying the theory of Hermitian quadratic form and Jordan normal form was studied. The algebraic formal criteria for the absolute stability are established, and these results are new and useful.

Key words: indirect control system; absolute stability; Hermitian quadratic form; Jordan normal form