应用数学和力学, 第 21 卷 第 8 期(2000 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0861_09

模糊密度随机变量的数学描述*

吕恩琳, 钟佑明

(重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(张汝清推荐)

摘要: 研究了由于概率密度函数的模糊性而引起的模糊概率随机变量问题• 给出了区间密度函数、模糊密度函数、模糊密度随机变量及其分布函数和模糊密度随机变量的模糊数学期望、模糊方差等基本概念及定义和计算方法, 并证明了有关定理•

关 键 词: 模糊集; 随机变量; 数字特征
中图分类号: O159 文献标识码: A

引 言

在连续随机变量问题中, 概率密度函数完全刻画了随机变量, 但要得到准确的概率密度函数不是一件容易的事• 在数据不充分, 概率密度函数不能完全确定的情况下, 用模糊值函数来描述概率密度函数将更具有实际意义, 并称此模糊值函数为模糊概率密度函数, 相应的随机变量称为模糊密度随机变量• 本文研究由于概率密度函数的模糊性而引起的模糊概率随机变量问题• 建立了具有模糊密度的随机变量及其分布函数的定义和基本性质, 在此基础上进一步研究了模糊密度随机变量的模糊数学期望、模糊方差的定义和计算方法•

1 模糊密度随机变量

定义 1.1 设 $I(x) = [I_1(x), I_2(x)]$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的区间值函数[1] 且 $I(x) \geqslant 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则称 $I(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的区间概率密度函数, 简称 IPD 函数, 记为 IPD$I(x)$• 又若存在函数 $p(x) \in I(x)$,

$$\text{s.t.} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

则称 $I(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上合理的区间概率密度函数, 简称合理的 IPD 函数•

定理 1.1 $I(x)$ 是合理的当且仅当

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1•$$

定义 1.2 设 $I(x) = (I(x), L(x,t), U(x,t))$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上模糊值函数[1] 且 $I(x) \geqslant 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则称 $I(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的模糊概率密度函数, 简称 FPD 函数, 记

* 收稿日期: 1999_09_03; 修订日期: 2000_04_26
作者简介: 吕恩琳(1947—) , 男, 江苏如东人, 教授, 硕士, 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员, 研究方向: 模糊优化设计.

为FPD$I(x)$• 又若对 $\forall \lambda \in [0,1]$, $I_\lambda(x)$ 均是合理的, 则称 $I(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上合理的模糊概率密度函数, 简称合理的 FPD 函数•

定理 1.2 FPD$I(x)$ 是合理的当且仅当 ker$I(x)$ 是合理的•

定义 1.3 设 $\xi(\omega)$ 是随机变量, $I(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上合理的 IPD 函数, 若 ξ 的分布函数可表示为函数

$$F(x) = Q(\xi< x) = \left\{\int_{-\infty}^{x} p(y)\mathrm{d}y \mid p(y) \in I(y),\ y \in (-\infty,+\infty) \text{ 且} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y)\mathrm{d}y = 1\right\}, \tag{1}$$

则称 ξ 为具有区间密度的区间概率随机变量, 简称 ID 随机变量, 记为 IDξ, 此时 $F(x)$、$I(x)$ 分别称为 ξ 的区间值分布函数和区间密度函数(或区间密度)•

定义 1.4 设 $\xi(\omega)$ 是随机变量, $I(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上合理的 FPD 函数, 若 ξ 的分布函数可表示为函数

$$F(x) = Q(\xi< x) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda F_\lambda(x), \tag{2}$$

其中

$$F_\lambda(x) \triangleq Q_\lambda(\xi< x) = \left\{\int_{-\infty}^{x} p(y)\mathrm{d}y \mid p(y) \in I_\lambda(y),\ y \in (-\infty,+\infty) \text{ 且} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y)\mathrm{d}y = 1\right\},$$

则称 ξ 为具有模糊密度的模糊概率随机变量, 简称 FD 的随机变量, 记为 FDξ, 此时 $F(x)$、$I(y)$ 分别称为 ξ 的模糊值分布函数和模糊密度函数(或模糊密度)•

为简便计, 今后均以含 π 的式子如 $\pi(x)$、$\pi(x)$ 等记区间密度和模糊密度, 并以

$$F(x) = Q(\xi< x) = \int_{-\infty}^{x} \pi(y)\mathrm{d}y$$

表示式子(1), 以

$$F(x) = Q(\xi< x) = \int_{-\infty}^{x} \pi(y)\mathrm{d}y$$

表示式子(2), 即用含 π 的式子表示封闭运算•

定理 1.3 若 ξ 是 ID 随机变量, $\pi(x)$、$F(x)$ 分别是区间密度和分布函数, $\pi(x) = [p_1(x), p_2(x)]$, 在 $x \in (-\infty,+\infty)$ 上可积[1], 则

$$F(x) = \left[\max\left(\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y,\ 1-\int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y\right), \min\left(1-\int_{x}^{\infty} p_1(y)\mathrm{d}y,\ \int_{-\infty}^{x} p_2(y)\mathrm{d}y\right)\right]• \tag{3}$$

证明 设 $F(x) = [F^-(x), F^+(x)]$, 首先证明

$$F^-(x) = \max\left(\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y, 1-\int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y\right)•$$

当 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y \geqslant 1$

时,

$$\max\left(\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y,\ 1-\int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y\right) = \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y•$$

因为 $\pi(y) = [p_1(y), p_2(y)]$

是合理的, 所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(y)\mathrm{d}y \leqslant 1 \text{ 即 } \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} p_1(y)\mathrm{d}y \leqslant 1,$$

从而有

$$\int_{x}^{+\infty} p_1(y)\mathrm{d}y \leqslant 1 - \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y.$$

令 $$h(z) = \int_{x}^{+\infty} [p_1(y) + z(p_2(y) - p_1(y))]\mathrm{d}y,$$

则 $$h(0) \leqslant 1 - \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y \leqslant h(1).$$

因为 $h(z)$ 连续, 所以存在 z_0 使得

$$h(z_0) = 1 - \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y$$

即 $$\int_{x}^{+\infty} [p_1(y) + z_0(p_2(y) - p_1(y))]\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y = 1, \qquad (0 \leqslant z_0 \leqslant 1).$$

而 $p(y) \in \pi(y)$, 其中

$$p(y) = \begin{cases} p_1(y), & \text{当 } y \leqslant x \text{ 时}, \\ p_1(y) + z_0(p_2(y) - p_1(y)), & \text{当 } y \geqslant x \text{ 时}, \end{cases}$$

所以 $$\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y \in F(x). \tag{4}$$

又对 $$\forall \int_{-\infty}^{x} p(y)\mathrm{d}y \in F(x),$$

当 $y \leqslant x$ 时, 都有 $p(y) \geqslant p_1(y)$, 所以有

$$\int_{-\infty}^{x} p(y)\mathrm{d}y \geqslant \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y, \tag{5}$$

从而有

$$F^{-}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y = \max\left(\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y,\ 1 - \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y\right).$$

当 $$\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y \leqslant 1 \text{ 时},$$

$$\max\left(\int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y,\ 1 - \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y\right) = 1 - \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y.$$

因为 $$\pi(y) = [p_1(y), p_2(y)]$$

是合理的, 所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y \geqslant 1 \text{ 即 } \int_{-\infty}^{x} p_2(y)\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y \geqslant 1,$$

从而有

$$1 - \int_{-\infty}^{x} p_2(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_{x}^{+\infty} p_2(y)\mathrm{d}y \leqslant 1 - \int_{-\infty}^{x} p_1(y)\mathrm{d}y.$$

令 $$h'(z) = 1 - \int_{-\infty}^{x} [p_1(y) + z(p_2(y) - p_1(y))]\mathrm{d}y$$

则 $$h'(1) \leqslant \int_{-\infty}^{x} p_2(y)\mathrm{d}y \leqslant h'(0).$$

因为 $h'(z)$ 连续, 所以存在 z_0' 使得

$$h'(z_0') = \int_{-\infty}^{x} p_2(y)\mathrm{d}y,$$

即 $$\int_{-\infty}^{x}[p_1(y)+z_0'(p_2(y)-p_1(y))]\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{x}p_2(y)\mathrm{d}y=1,\qquad(0\leqslant z_0'\leqslant 1),$$
而 $p'(y)\in\pi(y)$, 其中
$$p'(y)=\begin{cases}p_1(y)+z_0'(p_2(y)-p_1(y)), & \text{当 } y\leqslant x \text{ 时},\\ p_2(y), & \text{当 } y\geqslant x \text{ 时},\end{cases}$$
所以 $$\int_{-\infty}^{x}[p_1(y)+z_0'(p_2(y)-p_1(y))]\mathrm{d}y\in F(x),$$
从而 $$1-\int_{x}^{+\infty}p_2(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x}[p_1(y)+z_0'(p_2(y)-p_1(y))]\mathrm{d}y\in F(x)\cdot\tag{6}$$
又对 $\forall$ 使 $\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y\in F(x)$
的 $p(y)$ 有 $p(y)\leqslant p_2(y)$
且 $$\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y+\int_{x}^{+\infty}p(y)\mathrm{d}y=1,$$
所以
$$1-\int_{x}^{+\infty}p_2(y)\mathrm{d}y\leqslant 1-\int_{x}^{+\infty}p(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y,\tag{7}$$
$$F^-(x)=1-\int_{x}^{+\infty}p_2(y)\mathrm{d}y=\max\left(\int_{-\infty}^{x}p_1(y)\mathrm{d}y,1-\int_{x}^{+\infty}p_2(y)\mathrm{d}y\right)\cdot$$
综上所述, 总有
$$F^-(x)=\max\left(\int_{-\infty}^{x}p_1(y)\mathrm{d}y,\ 1-\int_{x}^{+\infty}p_2(y)\mathrm{d}y\right)\cdot\tag{8}$$
同理可证
$$F^+(x)=\min\left(1-\int_{x}^{\infty}p_1(y)\mathrm{d}y,\ \int_{-\infty}^{x}p_2(y)\mathrm{d}y\right)\cdot$$
证毕·

定义 1.5　设 ξ 是 ID 随机变量, $\pi(x)$ 是区间密度, $x\in(-\infty,+\infty)$, $A=\{x_1\leqslant\xi<x_2\}\in\mathscr{A}(\Omega)$, 则定义
$$Q(A)=Q(\{x_1\leqslant\xi<x_2\})=\int_{x_1}^{x_2}\pi(y)\mathrm{d}y\tag{9}$$
为事件 A 的区间概率·

定义 1.6　设 ξ 是 FD 随机变量, $\pi(x)$ 是模糊密度, $x\in(-\infty,+\infty)$, $A=\{x_1\leqslant\xi<x_2\}\in\mathscr{A}(\Omega)$, 则定义
$$Q(A)=Q(\{x_1\leqslant\xi<x_2\})=\int_{x_1}^{x_2}\pi(y)\mathrm{d}y=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda Q_\lambda(A)\tag{10}$$
为事件 A 的模糊概率, 其中
$$Q_\lambda(A)=\int_{x_1}^{x_2}\pi_\lambda(y)\mathrm{d}y\cdot$$

定理 1.4　若 ξ 是 ID 随机变量, $\pi(x)$、$F(x)$ 分别是区间密度和分布函数, $\pi(x)=[p_1(x),p_2(x)]$, 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上可积, 则
$$Q(\{x_1\leqslant\xi<x_2\})=\left[\max\left(\int_{x_1}^{x_2}p_1(y)\mathrm{d}y,\ 1-\int_{-\infty}^{x_1}p_2(y)\mathrm{d}y-\int_{x_2}^{+\infty}p_2(y)\mathrm{d}y\right),\right.$$
$$\left.\min\left(\int_{x_1}^{x_2}p_2(y)\mathrm{d}y,\ 1-\int_{-\infty}^{x_1}p_1(y)\mathrm{d}y-\int_{x_2}^{+\infty}p_1(y)\mathrm{d}y\right)\right]\cdot\tag{11}$$

证明过程类似定理 1. 3, 这里从略•

2 模糊密度随机变量的数学期望

定义 2. 1 若 ξ 是具有区间密度的随机变量,

$\pi(x) = [p_1(x), p_2(x)], x \in (-\infty, +\infty)$ 是区间密度且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| [p_1(x), p_2(x)] \mathrm{d}x < \infty,$$

则称 ξ 的数学区间期望(或期望区间) 存在, 且

$$\mathrm{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\pi(x)\,\mathrm{d}x = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x \mid p(x) \in \pi(x), \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1\right\}\bullet \tag{12}$$

定义 2. 2 若 ξ 是模糊密度随机变量,

$$I(x) = (I(x), L(x, t), U(x, t)), \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

是模糊密度, 且对 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 均有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| I_\lambda(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

则称 ξ 的模糊数学期望(或模糊期望) 存在, 且

$$\mathrm{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\pi(x)\,\mathrm{d}x = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \mathrm{E}_\lambda \xi, \tag{13}$$

其中 $\mathrm{E}_\lambda\xi \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x\pi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x\bullet$

定理 2. 1 若 ξ 是 ID 随机变量, 区间密度 $\pi(x) = [p_1(x), p_2(x)], x \in [a, b]$ 连续, 则存在 $h_1, h_2 \in [a, b]$, s. t.

$$\int_a^{h_1} p_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = 1, \int_a^{h_2} p_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_2}^b p_2(x)\,\mathrm{d}x = 1\bullet \tag{14}$$

证明 令

$$f(y) = \int_a^y p_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^b p_1(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 $f(y)$ 连续, 因为

$$\pi(x) = [p_1(x), p_2(x)]$$

是合理的, 所以

$$f(a) = \int_a^b p_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1, \ f(b) = \int_a^b p_2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1,$$

$$\exists h_1 \in [a, b], \text{s. t.} f(h_1) = 1 \text{ 即 } \int_a^{h_1} p_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = 1\bullet$$

同理可证:

$$\exists h_2 \in [a, b], \text{s. t.} \int_a^{h_2} p_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_2}^b p_2(x)\,\mathrm{d}x = 1\bullet$$

证毕•

定理 2. 2 若 ξ 是 ID 随机变量, 区间密度 $\pi(x) = [p_1(x), p_2(x)], x \in [a, b]$ 连续, $h_1, h_2 \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^{h_1} p_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = 1, \int_a^{h_2} p_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_2}^b p_2(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

则

$$\mathrm{E}\xi = \left[\int_a^{h_1} xp_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp_1(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_a^{h_2} xp_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_2}^b xp_2(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{15}$$

证明 设 $E\xi = [\mathrm{E}\xi^-, \mathrm{E}\xi^+]$,

因为

$$\int_a^{h_1} p_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = 1,\ p(x) = \begin{cases} p_2(x), & a \leqslant x \leqslant h_1 \\ p_1(x), & h_1 \leqslant x \leqslant b \end{cases} \in \pi(x),$$

所以 $\displaystyle\int_a^{h_1} xp_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp_1(x)\,\mathrm{d}x \in \mathrm{E}\xi.$

对 $\forall \displaystyle\int_a^b xp(x)\,\mathrm{d}x \in \mathrm{E}\xi$, 则

$$\begin{aligned}
\int_a^b xp(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{h_1} xp(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp(x)\,\mathrm{d}x = \\
&\int_a^{h_1} xp_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{h_1} x[p_2(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x + \\
&\int_{h_1}^b x[p(x) - p_1(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp_1(x)\,\mathrm{d}x = \\
&\left(\int_{h_1}^b x[p(x) - p_1(x)]\,\mathrm{d}x - \int_a^{h_1} x[p_2(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x\right) + \\
&\left(\int_a^{h_1} xp_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp_1(x)\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

因为 $\displaystyle\int_a^{h_1} p_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b p_1(x)\,\mathrm{d}x = 1,\ \int_a^{h_1} p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b p(x)\,\mathrm{d}x = 1,$

所以

$$\int_a^{h_1} [p_2(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b [p_1(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\int_{h_1}^b x[p(x) - p_1(x)]\,\mathrm{d}x - \int_a^{h_1} x[p_2(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant \\
&\quad h_1\int_{h_1}^b [p(x) - p_1(x)]\,\mathrm{d}x - h_1\int_a^{h_1} [p_2(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x = \\
&\quad -h_1\left\{\int_a^{h_1} [p_2(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b [p_1(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x\right\} = 0,
\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\int_a^b xp(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^{h_1} xp_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp_1(x)\,\mathrm{d}x,$

从而

$$\mathrm{E}\xi^- = \int_a^{h_1} xp_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_1}^b xp_1(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

同理可证

$$\mathrm{E}\xi^+ = \int_a^{h_2} xp_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h_2}^b xp_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证毕.

3 模糊密度随机变量的方差

定义 3.1 若 ξ 是ID 随机变量, $\pi(x) = [p_1(x), p_2(x)]$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 是区间密度,

$E(\xi)$ 存在, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}x[p_1(x),p_2(x)]\mathrm{d}x\right)^2[p_1(x),p_2(x)]\mathrm{d}x=$$
$$\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\min\left\{\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}xp_1(x)\mathrm{d}x\right)^2,\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}xp_2(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}p_1(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\max\left\{\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}xp_1(x)\mathrm{d}x\right)^2,\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}xp_2(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}p_2(x)\mathrm{d}x\Big]<\infty,$$

则称 ξ 的区间方差(或方差区间) 存在, 且

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}x\pi(x)\mathrm{d}x\right)^2\pi(x)\mathrm{d}x=$$
$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x\right)^2p(x)\mathrm{d}x \mid p(x)\in\pi(x),\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1\right\}. \tag{17}$$

定理 3.1 若 $D\xi$ 存在, 则

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\pi(x)\mathrm{d}x-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x\pi(x)\mathrm{d}x\right)^2=$$
$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x\right)^2 \mid p(x)\in\pi(x),\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1\right\}. \tag{18}$$

定义 3.2 若 ξ 是 FD 随机变量, $I(x)=(I(x),L(x,t),U(x,t)),x\in(-\infty,+\infty)$ 是模糊密度, $E\xi$ 存在, 且对 $\forall\lambda\in[0,1]$

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x\right)^2p(x)\mathrm{d}x \mid p(x)\in\pi_\lambda(x)\right\}<\infty,$$

则称 ξ 的模糊方差存在, 且

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}x\pi(x)\mathrm{d}x\right)^2\pi(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda D_\lambda\xi, \tag{19}$$

其中 $$D_\lambda\xi\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\int_{-\infty}^{+\infty}x\pi_\lambda(x)\mathrm{d}x\right)^2\pi_\lambda(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.2 若 $D\xi$ 存在, 则

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\pi(x)\mathrm{d}x-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x\pi(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

$D\xi$ 的求解依赖于方差区间的求解. 对方差区间, 因为

$$J(p(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

是定义在 $\pi(x)=[p_1(x),p_2(x)],x\in(-\infty,+\infty)$ 上的泛函, 所以求方差区间需要求解泛函优化问题(FOP):

$$\max(\min)\ J(p(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x\right)^2, \tag{20}$$
$$\text{s.t. } p(x)\in D(p(x)), \tag{21}$$
$$D(p(x)):\left\{p(x)\mid p_1(x)\leqslant p(x)\leqslant p_2(x),\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1\right\}. \tag{22}$$

可以证明 $D(p(x))$ 和 $J(p(x))$ 具有下述特殊性质:

(i) $D(p(x))$ 是凸的;

(ii) $J(p(x))$ 是 $D(p(x))$ 上的凹泛函;

(iii) $J(p(x))$ 是加脱可微的[2];

(ⅳ) $\delta J(p(x), h(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x)\mathrm{d}x - 2\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\mathrm{d}x$ 关于 $h(x)$ 是线性的;

(ⅴ) 在 $c[a, b]$ 上定义范数 $\|p(x)\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)|$, 则方差泛函 $J(p(x))$ 是弗雷谢可微的[2]•

上述性质将有助于泛函优化问题(FOP)的解决•

下面给出的(FOP)在闭区间上的一种数值解法• 以求(FOP)在闭区间 $[a, b]$ 上的最小值为例, 即求解最优化问题(FOP′):

$$\min J(p(x)) = \int_a^b x^2 p(x)\mathrm{d}x - \left(\int_a^b xp(x)\mathrm{d}x\right)^2, \tag{23}$$

$$\text{s.t. } p(x) \in \mathrm{D}(p(x)): \left\{p(x) \mid p_1(x) \leqslant p(x) \leqslant p_2(x), \int_a^b p(x)\mathrm{d}x = 1\right\}• \tag{24}$$

设 $T_1 = \left\{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\right\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个分割, 又令

$$p^*(x) = \begin{cases} p_1(x) + \lambda_1(p_2(x) - p_1(x)), & x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ p_1(x) + \lambda_2(p_2(x) - p_1(x)), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \quad\cdots\cdots & \\ p_1(x) + \lambda_n(p_2(x) - p_1(x)), & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n, \end{cases}$$

则(FOP′)可化为(FOP′[n]):

$$\min J(p(x)) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2[p_1(x) + \lambda_i(p_2(x) - p_1(x))]\mathrm{d}x - \left(\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} x[p_1(x) + \lambda_i(p_2(x) - p_1(x))]\mathrm{d}x\right)^2, \tag{25}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [p_1(x) + \lambda_i(p_2(x) - p_1(x))]\mathrm{d}x = 1, \quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{26}$$

即(FOP′[n]):

$$\min J(p(x)) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 p_1(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2(p_2(x) - p_1(x))\mathrm{d}x - \left(\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} xp_1(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x(p_2(x) - p_1(x))\mathrm{d}x\right)^2, \tag{27}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_1(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (p_2(x) - p_1(x))\mathrm{d}x = 1, \tag{28}$$

$$0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, n•$$

令

$$a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 p_1(x)\mathrm{d}x, \quad b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2(p_2(x) - p_1(x))\mathrm{d}x,$$

$$c_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} xp_1(x)\mathrm{d}x, \quad d_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x(p_2(x) - p_1(x))\mathrm{d}x,$$

$$e_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_1(x)\mathrm{d}x, \quad f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (p_2(x) - p_1(x))\mathrm{d}x,$$

则又可化为(FOP′[n]):

$$\min J(p(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_i\right)^2, \tag{29}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} e_i + \sum_{i=1}^{n} f_i\lambda_i = 1, \qquad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \ i = 1, 2, \cdots, n\text{.} \tag{30}$$

这是 λ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的二次规划问题, 可按二次规划的方法求解. 设求得的最优值为 m_1.

在 T_1 中再任加一点 x 得新分割 $T_2 = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_k, x, x_{k+1}, \cdots, x_n = b\}$ 和新规划, 仿上处理, 若得最优值 m_2, 则显然有 $m_1 \geqslant m_2$.

依此类推, 得递减数列 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_i \geqslant \cdots \geqslant 0$, 所以数列 $\{m_i\}$ 收敛, 设收敛于 m. 因为对 $[p_1(x), p_2(x)]$ 中任意的可积函数存在 $p^*(x)$ 接近于它 $(n \to \infty)$, 而泛函 $J(p(x))$ 对自变函数又是连续的, 故 m 必为所求最优化问题 (FOP′[n]) 的最优值.

用类似的方法可求(FOP) 的最大值.

4 结　　论

本文主要给出了具有模糊密度的模糊概率随机变量的基本概念和定义; 研究了模糊密度随机变量的数学期望和方差的定义、性质与数值解法. 这些内容在系统的模糊可靠性分析中有重要意义.

[参 考 文 献]

[1] 张跃, 王光远. 模糊随机动力系统理论[M]. 贵阳: 贵州科学技术出版社, 1995, 45—62.

[2] 叶庆凯, 郑应平. 变分法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991, 88—93.

[3] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and System: Theory and Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.

Mathematic Description About Random Variable With Fuzzy Density Function(RVFDF)

LÜ En_ling, ZHONG You_ming

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China)

Abstract: The random variable with fuzzy probability caused by fuzziness of probability density function was studied. The basic concepts/ definitions and calculating methods of the interval/ fuzzy probability density function, the random variable with fuzzy density function(RVFDF) and its distribution function, mathematical expectation and variance are given and some theorems related to the RVFDF are proved.

Key words: fuzzy set; random variable; numerical character