应用数学和力学, 第 21 卷 第 9 期(2000 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 09_0903_06

广义凸空间内的非紧无限最优化和约束对策的平衡*

丁协平

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

摘要: 由应用作者得到的拟平衡问题的一个新的存在性定理, 在没有线性结构的广义凸空间内对非紧无限最优化问题和非紧约束对策问题证明了解的存在性定理• 这些定理改进和推广了最近文献中许多重要结果•

关 键 词: 非紧无限最优化; 非紧约束对策; 拟平衡; 广义凸空间
中图分类号: O224; O225 文献标识码: A

引 言

令 I 是任意(有限或无限) 指标集, 对每一 $i\in I$, X_i 是拓扑空间• 记

$$X=\prod_{i\in I}X_i \quad 和 \quad X^i=\prod_{j\in I,\,j\neq i}X_j•$$

对每一 $x\in X$, x_i 表它的第 i 坐标和 x^i 表 x 在 X^i 上的投影• 记 $x=(x_i,x^i)$•

对每一 $i\in I$, 令 $F_i: X^i\to 2^{X_i}$ 是集值映象和 $f_i: X\to \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ 是函数• 无限最优化问题是求 $\hat{x}=(\hat{x}_i,\hat{x}^i)\in X$ 使得对每一 $i\in I$,

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}_i\in F_i(\hat{x}^i),\\&f_i(\hat{x})=\max_{y_i\in F_i(\hat{x}^i)}f_i(y_i,\hat{x}^i)•\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

此问题已由 Kaczynski 和 Zeidan[1], Park[2], Ding[3, 4] 和其他人在拓扑矢量空间内进行研究• 已经在拓扑矢量空间内的各种不同假设下对有限或无限最优化问题(1) 建立了解的某些存在定理•

如果 I 是局中人的集, 每一局中人 i 有一策略集 X_i, 一个约束对应和一个损失函数 $f_i: X\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$, 一个约策对策 $\Gamma=(X_i, F_i, f_i)$ 由三元组的 (X_i, F_i, f_i) 的族定义• 称点 $\hat{x}\in X$ 是 Γ 的一平衡点如果对每一 $i\in I$,

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}_i\in F_i(\hat{x}^i),\\&f_i(\hat{x})\leqslant f_i(y_i,\hat{x}^i),\ \forall y_i\in F_i(\hat{x}^i),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

如果对每一 $i\in I$ 和对一切 $x^i\in X^i$, $F_i(x^i)=X_i$• 约束对策化归传统的对策 $\Gamma=(X_i,f_i)$ 且

* 收稿日期: 1999_04_30
基金项目: 国家自然科学基金资助(19871059)
作者简介: 丁协平(1938—), 四川自贡人, 教授, 已发表 200 余篇论文, 获省部级奖 6 项.

此对策的平衡点称为 Nash 平衡点•

约策对策问题(2)已被 Aubin 和 Ekeland[5], Ding[3,4], Yuan, Isac, Tan 和 Yu[6] 和其他很多人研究• 在[3~6]中,已在拓扑矢量空间的各种不同假设下建立了某些平衡存在定理•

在本文中, 由使用作者在广义凸空间内得到的拟平衡问题的存在定理, 在没有线性结构的广义凸空间的非紧设置下对无限最优化问题(1)和约束对策问题(2)证明了解的几个存在定理• 这些结果是新的和有趣的,它们改进和推广了文献中许多已知结果到广义凸空间•

1 预备知识

设 X 和 Y 是非空集• 分别用 2^Y 和 $\mathscr{F}(X)$ 表 Y 的一切子集的族和 X 的一切非空有限子集的族• 如果 X 是拓扑空间,称 X 的子集 A 在 X 内是紧开的(或紧闭的) 如果对 X 的任意非空紧子集 K, $A\cap K$ 在 K 内是开(或闭) 的•

下面广义凸(或 G_凸) 空间的概念由 Park 和 Kim[7,8] 引入• 称 $(X, D; \Gamma)$ 为一 G_凸空间如果 X 是一拓扑空间, D 是 X 的子集和 $\Gamma: \mathscr{F}(X)\to 2^X$ 使得

i) 对每一 $A, B\in\mathscr{F}(D)$, $A\subset B$ 蕴含 $\Gamma(A)\subset\Gamma(B)$;

ii) 对每一 $A\in\mathscr{F}(D)$, $|A| = n+1$, 存在连续映象 $\varphi_A: \Delta_n\to\Gamma(A)$ 使得 $B\in\mathscr{F}(A)$, $|B| = J+1$, 蕴含 $\varphi_A(\Delta_J)\subset\Gamma(B)$, 其中 $|A|$ 表 A 的基数, Δ_n 表 n_维单型和 Δ_J 表 Δ_n 的对应于 $B\in\mathscr{F}(A)$ 的面•

当 $D = X$ 时, 我们用 (X, Γ) 代替 $(X, X; \Gamma)$• 令 $(X, D; \Gamma)$ 是一 G_凸空间和 $K\subset X$• 称 K 是 G_凸的如果对每一 $N\in\mathscr{F}(D)$, $N\subset K$ 蕴含 $\Gamma(N)\subset K$• 称一函数 $f: K\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ 是 G_拟凹(分别, G_拟凸) 的如果对每一 $\lambda\in\mathbf{R}$, 集 $\{x\in K: f(x) > \lambda\}$ (分别, $\{x\in K: f(x) < \lambda\}$) 是 G_凸的• G_凸空间概念是具有各种凸结构的许多拓扑空间的推广• 详情参见 Park 和 Kim[7,8]•

下面结果是 Tan[9] 的引理 4.3•

引理 1.1 设 $(X_i, \Gamma_i)_{i\in I}$ 是任意 G_凸空间族和 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 被赋予乘积拓扑• 对每一 $i\in I$, 令 $\pi_i: X\to X_i$ 是投影• 定义 $\Gamma: X\to 2^X\{\phi\}$ 如下:

$$\Gamma(A) = \prod_{i\in I}\Gamma_i(\pi_i(A)),\quad \forall A\in\mathscr{F}(X)\bullet$$

则 (X, Γ) 是一 G_凸空间•

为了证明主要结果, 我们需要下面拟平衡问题 $QEP(T, A, f)$ 解的存在定理, 它是 Ding[10] 的定理 3.2•

定理 1.1 令 (X, Γ) 是 G_凸空间, K 是 X 的非空紧子集和 Y 是一拓扑空间• 令 $T: X\to Y$, $A: X\to 2^X$ 和 $f: X\times Y\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 使得

i) A 有非空 G_凸值使得 $A^{-1}: X\to 2^X$ 在 X 上是紧开值的且集 $D = \{x\in X: x\in A(x)\}$ 在 X 内是闭的,

ii) f 是连续的使得对每一 $x\in X$, $y\mapsto f(y, Tx)$ 是 G_拟凸的,

iii) 对每一 $N\in\mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x\in L_N\setminus K$, 如果 $x\notin D$, 则 $A(x)\cap L_N\neq\phi$; 如果 $x\in D$, 则存在 $y\in A(x)\cap L_N$ 满足 $f(y, Tx) < f(x, Tx)$•

则存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $\hat{x}\in A(\hat{x})$ 和 $f(\hat{x}, T\hat{x})\leqslant f(y, T\hat{x})$, $\forall y\in(A\hat{x})$•

注 1.1 定理 1.1 推广了 Ding[11] 的定理 2.1 和 Cubiotti[12] 的定理 4.2 到非紧 G_凸空间且有更弱的假设•

系 1.1 设 (X, Γ) 是 G_凸空间和 K 是 X 的非空紧子集• 令 $A: X \to 2^X$ 和 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 使得

i) A 有非空 G_凸值使得 $A^{-1}: X \to 2^X$ 在 X 上是紧开值的且集 $D = \{x \in X: x \in A\}$ 在 X 内是闭的,

ii) f 是连续的使得对每一 $x \in X$, $y \mapsto f(y, x)$ 是 G_拟凸的,

iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D$, 则 $A(x) \cap L_N \neq \varnothing$; 如果 $x \in D$, 则存在 $y \in A(x) \cap L_N$ 满足 $f(y, x) < f(x, x)$,

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 和 $f(\hat{x}, \hat{x}) \leqslant f(y, \hat{x})$, $\forall y \in A(\hat{x})$•

证明 置 $X = Y$ 和 T 是恒等映象, 容易看出定理 1.1 的一切条件被满足• 系 1.1 的结论由定理 1.1 推得•

如果在系 1.1 中 f 被 $\underline{f}$ 代替, 则得到下面结果

系 1.2 设 (X, Γ) 和 K 同于系 1.1• $A: X \to 2^X$ 和 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 使得

i) 系 1.1 的条件(i) 成立,

ii) f 连续使得对每一 $x \in X$, $y \mapsto f(y, x)$ 是 G_拟凹的,

iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D$, 则 $A(x) \cap L_N \neq \varnothing$; 如果 $x \in D$, 则存在 $y \in A(x) \cap L_N$ 满足 $f(x, x) < f(y, x)$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 和

$$f(\hat{x}, \hat{x}) = \max_{y \in A(\hat{x})} f(y, \hat{x})•$$

2 最优化问题和约束对策

定理 2.1 令 I 是(有限或无限) 指标集, $(X_i, \Gamma_i)_{i \in I}$ 是一 G_凸空间族, $X = \prod_{i \in I} X_i$, 每一 $K_i \subset X_i$ 是非空紧集和 $K = \prod_{i \in I} K_i$• 对每一 $i \in I$, 令 $F_i: X^i \to 2^{X_i}$ 是集值映象和 $f_i: X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是函数使得由下式定义的映象 $A: X \to 2^X$ 和函数 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$A(x) = \prod_{i \in I} F_i(x^i) \text{ 和 } f(y, x) = \sum_{i \in I} f_i(y_i, x^i)$$

满足下列条件:

i) 对每一 $i \in I$, F_i 有非空 G_凸值使得 A 的逆映象 $A^{-1}: X \to 2^X$ 在 X 上是紧开值的且集 $D = \{x \in X: x \in A(x)\}$ 在 X 内是闭的,

ii) f 连续使得对每一 $x \in X$, $y \mapsto f(y, x)$ 是 G_拟凹的,

iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D$, 则 $A(x) \cap L_N \neq \varnothing$; 如果 $x \in D$, 则存在 $y \in A(x) \cap L_N$ 满足 $f(x, x) < f(y, x)$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in I$,

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in F_i(\hat{x}^i), \\ f_i(\hat{x}) = \max\limits_{y_i \in F_i(\hat{x}^i)} f_i(y_i, \hat{x}^i), \end{cases}$$

即 $\hat{x}$ 是非紧无限最优化问题(1) 的解•

证明 令 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 和 $\Gamma = \prod_{i \in I} \Gamma_i$• 由引理 1.1 (X, Γ) 是一 G_凸空间和 $K = \prod_{i \in I} K_i$ 是 X

的非空紧子集• 从条件 i) ~ iii) 容易看出 A 和 f 满足系 1.2 的一切条件, 所以存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 和

$$f(\hat{x},\hat{x}) \geqslant f(y,\hat{x}),\ \forall y \in A(\hat{x}), \tag{3}$$

由此, 对每一 $i \in I$, $\hat{x}_i \in F(\hat{x}^i)$, 我们有

$$\sum_{i\in I} f_i(\hat{x}_i,\hat{x}^i) \geqslant \sum_{i\in I} f_i(y_i,\hat{x}^i),\ \forall y \in A(\hat{x})•$$

选取 $\hat{y} \in X$ 使得 $\hat{y}_i = y_i \in F(\hat{x}^i)$ 和 $\hat{y}_j = \hat{x}_j$ 对一切 $j \in I$ 且 $j \neq i$ 成立, 则有 $\hat{y} \in A(\hat{x})$• 从 (3) 式推得对每一 $i \in I$ 有

$$\begin{aligned} f_i(\hat{x}_i,\hat{x}^i) &= \sum_{i\in I} f_i(\hat{x}_i,\hat{x}^i) - \sum_{j\in I, j\neq i} f_j(\hat{x}_i,\hat{x}^i) \geqslant \\ &\sum_{i\in I} f_i(\hat{y}_i,\hat{x}^i) - \sum_{j\in I, j\neq i} f_j(\hat{x}_j,\hat{x}^j) = \\ &f_i(y_i,\hat{x}^i),\quad (\forall y_i \in F_i(\hat{x}^i))• \end{aligned}$$

因此我们得到对每一 $i \in I$,

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in F_i(\hat{x}^i), \\ f_i(\hat{x}) = \max\limits_{y_i\in F_i(\hat{x}^i)} f_i(y_i,\hat{x}^i), \end{cases}$$

即 $\hat{x}$ 是非紧无限最优化问题 (1) 的解•

注 2.1　如果对每一 $i \in I$, (X_i, Γ_i) 是紧 G_凸空间, 则定理 2.1 的条件 iii) 被平凡满足• 定理 2.1 是 Park[2] 的定理 4 和 5, Ding[3,4] 的定理 3.1 和 Kaczynski 和 Zeidan[1] 的定理在 G_凸空间内的改进变型• Cubiotti[12, p.20] 给出了一个满足定理 3.1 的条件 i) 的集值映象 A 的例子•

定理 2.2　令 I 是(有限或无限) 个局中人的集, $\Gamma = (X_i, F_i, f_i)_{i\in I}$ 是约束对策其中每一 (X_i, Γ_i) 是 G_凸空间和 $X = \prod_{i\in I} X_i$• 对每一 $i \in I$, 令 $K_i \subset X_i$ 是非空紧集和 $K = \prod_{i\in I} K_i$• 假设由下面定义的映象 $A: X \to 2^X$ 和函数 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$A(x) = \prod_{i\in I} F_i(x^i) \text{ 和 } f(y,x) = \sum_{i\in I} f_i(y_i, x^i)$$

满足下列条件:

i) F_i 和 A 满足定理 2.1 的条件(i),

ii) f 连续使得对每一 $x \in X$, $y \mapsto f(y,x)$ 是 G_拟凸的,

iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D$, 则 $A(x) \cap L_N \neq \varnothing$; 如果 $x \in D$, 则存在 $y \in A(x) \cap L_N$ 满足 $f(y,x) < f(x,x)$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in I$,

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in F_i(\hat{x}^i), \\ f_i(\hat{x}_i,\hat{x}^i) \leqslant f_i(y_i,\hat{x}^i),\ \forall y_i \in F_i(\hat{x}^i), \end{cases}$$

即 $\hat{x} \in X$ 是约束对策 Γ 的一平衡点•

证明　令 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 和 $\Gamma = \prod_{i\in I} \Gamma_i$• 由引理 1.1 (X, Γ) 是 G_凸空间• 显然 $K = \prod_{i\in I} K_i$ 是 X 的非空紧子集• 由条件 i) ~ iii), 容易检验 A 和 f 满足系 1.1 的一切条件, 因此存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 和

$$f(\hat{x},\hat{x}) \leqslant f(y,\hat{x}),\ \forall y \in A(\hat{x})•$$

由使用定理2.1证明中类似的论证,我们能证明对每一$i \in I$,

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in F_i(\hat{x}^i), \\ f_i(\hat{x}_i, \hat{x}^i) \leqslant f_i(y_i, \hat{x}^i), \ \forall y_i \in F_i(\hat{x}^i), \end{cases}$$

即$\hat{x}$是约束对策Γ的一平衡点•

系 2.1　设$(X_i, f_i)_{i\in I}$是一传统对策,其中每一(X_i, Γ_i)是G_凸空间和$X = \prod_{i\in I} X_i$•　对每一$i \in I$,令K_i是X_i的非空紧子集和$K = \prod_{i\in I} K_i$•　假设由下式定义的函数$f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$f(y, x) = \sum_{i\in I} f_i(y_i, x^i)$$

满足下列条件:

i) f连续使对每一$x \in X$, $y \mapsto f(y, x)$是G_拟凸的,

ii) 对每一$N \in \mathscr{F}(X)$,存在X的非空紧G_凸子集L_N包含N使得对每一$x \in L_N \setminus K$,存在$y \in L_N$满足$f(y, x) < f(x, x)$•

则存在$\hat{x} \in X$使得对每一$i \in I$,

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{x}^i) \leqslant f_i(y_i, \hat{x}^i), \ \forall y_i \in X_i,$$

即$\hat{x}$是传统对策Γ的一个Nash平衡点•

证明　对每一$i \in I$,定义集值映象$F_i: X^i \to 2^{X_i}$如下: $F_i(x^i) = X_i$,对每一$x^i \in X^i$,则系2.1的结论由定理2.2推得•

注2.2　如果对每一$i \in I$, (X_i, Γ_i)是紧G_凸空间,则定理2.2的条件(iii)和系2.1的条件(ii)被平凡满足•　定理2.2是Aubin和Ekeland[5, p350-351]的定理8.4 23, Ding[3, 4]的定理4.1和Yuan, Isac, Tan和Yu[6]的定理7.1在G_凸空间内的改进变型•

[参　考　文　献]

[1] Karczynski T, Zeidan V. An application of Ky_Fan fixed point theorem to an optimization problem [J]. Nonlinear Anal TMA, 1989, **13**(3): 259—261.

[2] Park S, Park J A. The Idzik type quasivariational inequalities and noncompact optimization problem [J]. Colloqium Math, 1996, **71**(2): 287—295.

[3] 丁协平. 拟变分不等式和社会平衡[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(7): 599—604.

[4] Ding Xieping. Generalized quasivariational inequality, optimization and equilibrium existence problems [J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(1): 1—5.

[5] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

[6] Yuan X Z, Isac G, Tan K K, Yu J. The study of minimax inequalities, abstract economics and applications to variational inequalities and Nash equilibria[J]. Acta Applic Math, 1998, **54**(1): 135—166.

[7] Park S, Kim H. Coincidence theorems for addmissible multifunctions on generalized convex spaces [J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173—187.

[8] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551—571.

[9] Tan K K. G_KKM theorem, minima inequalities and saddle pints[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**(7): 4151—4160.

[10] 丁协平. 非紧广义凸空间内的拟平衡问题[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 578—584.

[11] Ding Xieping. Existence of solutions for quasi_equilibrium problems[J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(6): 603—608.

[12] Cubiotti P. Existence of solutions for lower semicontinuous quasi_equilibrium problems[J]. Computers Math Applic, 1995, **30**(12): 11—22.

Noncompact Infinite of Optimization and Equilibria of Constrained Games in Generalized Convex Spaces

DING Xie_ping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China)

Abstract: By applying a new existence theorem of quasi_equilibrium problems due to the author, some existence theorems of solutions for noncompact infinite optimization problems and noncompact constrained game problems are proved in generalized convex spaces without linear structure. These theorems improve and generalize a number of important results in recent literature.

Key words: noncompace infinite optimization; noncompact constrained game; quasi_equilibrium; generalized convex space