应用数学和力学,第 21 卷 第 10 期(2000 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 10_1077_04

二阶中立型方程的强迫振动

王培光[1], 葛渭高[2]

(1 河北大学 数学系, 河北保定 071002; 2 北京理工大学 应用数学系, 北京 100081)

(林宗池推荐)

摘要: 讨论了一类具有偏差变元的二阶中立型方程, 给出了该类方程解振动的充分条件

关 键 词: 振动性; 中立型方程; 偏差变元
中图分类号: O175 1 文献标识码: A

引 言

关于中立型时滞微分方程解的振动性和渐近性的研究, 除了在理论上的重要性之外, 在应用方面也有着重要的意义 例如, 二阶中立型微分方程可用于讨论系在弹性体上的质点振动问题, 作为欧拉方程, 也可出现在某些变分问题中(参见 Hale[1]) 中立型时滞微分方程解的振动性和渐近性的近期结果可参见 Grammatikopoulos, Ladas 和 Meimaridou[2], Grace 和 Lalli[3], Ruan[4], Li 和 Liu[5], Tanaka[6] 及其参考文献 然而, 这些工作仅讨论了离散偏差变元情况, 关于连续偏差变元的工作很少(参见 Yu 和 Fu[7]), 特别是强迫振动的情况 本文的目的是对于具有连续偏差变元的二阶线性方程

$$x\ (t) + \ x\ (t - \ ) + \int_a^b p(t, \ )x[g(t, \ )]\mathrm{d}\ (\ ) = q(t) \tag{E}$$

建立一些振动定理

这里 > 0, 0; $p(t, \ ), g(t, \ )$ $C([t_0, + \ ) \ [a, b]; R)$; $q(t)$ $C([t_0, + \ ), R)$; $g(t, \ )$ t, $[a, b]$; $g(t, \ )$ 关于 t、 非减, 并且有 $\lim_{t \ +} g(t, a) = +$; $(\ )$ $([a, b], R)$ 关于 非减, 方程(E) 中的积分是 Stieltjes 积分

定义 1 函数 $x(t)$ 称为最终正(最终负), 如果存在 t_1 0 使得 $x(t) > 0$(< 0) 对于 $t > t_1$ 成立

定义 2 方程(E) 的解 $x(t)$ 称为振动, 如果 $x(t)$ 非最终为零, 且具有无界的零点集 否则称 $x(t)$ 为非振动的

1 主要结果

定理 1 假设

收稿日期: 1999_05_05; 修订日期: 2000_02_22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871005); 河北省自然科学基金资助项目(100061)
作者简介: 王培光(1963), 男, 教授, 副系主任, 博士, 在国内外公开发表论文 50 余篇(E_mail: pgwang@mail.hbu.edu.cn).

(H_1) 0 1, $p(t, \ ) \ 0$;

(H_2) 存在一振动函数 $h(t) \ C^2([t_0, + \ ); R)$, $h \ (t) = q(t)$ 若对任意的 $c > 0$,

$$\int_{t_0}^{+} \int_a^b p(s, \ )\left\{c_1 + \ [g(s, \ )]\right\}_+ \mathrm{d} \ (\ ) \mathrm{d}s = + \ , \tag{1}$$

$$\int_{t_0}^{+} \int_a^b p(s, \ )\left\{- c_1 + \ [g(s, \ )]\right\}_+ \mathrm{d} \ (\ ) \mathrm{d}s = - \ , \tag{2}$$

则方程(E) 的所有解振动

其中 $c_1 = (1 - \ )c$, $[A(t)]_+ = \max\left\{A(t), 0\right\}$, $(t) = h(t) - \ h(t - \ )$

证明 假设存在方程(E) 的非振动解 $x(t)$ 不失一般性, 我们可假定 $x(t) > 0$($x(t) < 0$ 的情况类似考虑) 由 $\lim_{t \ +} g(t, a) = +$ 知, 存在 $t_1 \ t_0$ 使得 $x(t) > 0$, $x(t - \ ) > 0$, $x[g(t, \ )] > 0$; $t \ t_1$, $[a, b]$ 令

$$y(t) = x(t) + \ x(t - \ ), \tag{3}$$

则一定存在 $t_2 \ t_1$ 使得 $y(t) > 0$, $t \ t_2$ 事实上, 假设有 $y(t) \ 0$, 则 $h(t) \ x(t) + \ x(t - \ )$ 最终为正, 与假设 (H_2) 矛盾 由方程(E) 可得

$$y \ (t) = - \int_a^b p(t, \ )x[g(t, \ )] \mathrm{d} \ (\ ) \ 0 \tag{4}$$

由 $y(t) > 0$, $y \ (t) \ 0$ 可进一步证明, 存在 $t_3 \ t_2$ 使得 $y \ (t) > 0$, $t \ t_3$ 事实上, 假设存在 $t_4 \ t_3$ 使得 $y \ (t_4) = 0$, 则由(4) 可得 $y \ (t) \ y \ (t_4) = 0$, $t \ t_4$ 因为 $p(t, \ ) \ 0$, 因而存在 $t_5 \ t_4$ 使得 $y \ (t_5) < 0$, 由此可知 $y \ (t) \ y \ (t_5) < y \ (t_4) = 0$, $t \ t_5$ 注意到

$$y(t) - y(t_5) \ \int_{t_5}^{t} y \ (s) \mathrm{d}s \ \int_{t_5}^{t} y \ (t_5) \mathrm{d}s < 0, \quad t \ t_5,$$

得 $\lim_{t \ +} y(t) = -$, 与 $y(t) > 0$ 矛盾

由(3) 得

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) - \ x(t - \ ) + h(t) \\ & \ y(t) - \ [y(t - \ ) + h(t - \ )] + h(t) \\ & \ (1 - \ )y(t) + \ (t), \end{aligned}$$

因而有

$$x(t) \ \left\{(1 - \ )y(t) + \ (t)\right\}_+, \quad t \ t_6, \tag{5}$$

再由(4), 得

$$y \ (t) + \int_a^b p(t, \ )\left\{(1 - \ )y[g(t, \ )] + \ [g(t, \ )]\right\}_+ \mathrm{d} \ (\ ) \ 0 \tag{6}$$

由 $\lim_{t \ +} g(t, a) = +$, $g(t, \ )$ 关于 t 非减知, 存在 $t_7 \ t_6$ 使得 $g(t, \ ) > m > 0$, $t \ t_7$ 再由 $y(t)$ 的非减性可知, $y[g(t, \ )] \ y(m)$, 因此

$$y \ (t) + \int_a^b p(t, \ )\left\{(1 - \ )y(m) + \ [g(t, \ )]\right\}_+ \mathrm{d} \ (\ ) \ 0 \tag{7}$$

对上式由 T 到 t 积分, 得

$$y \ (t) - y \ (T) + \int_T^t \int_a^b p(s, \ )\left\{(1 - \ )y(m) + \ [g(s, \ )]\right\}_+ \mathrm{d} \ (\ ) \mathrm{d}s \ 0 \tag{8}$$

令 $t \ +$, 不等式(8) 与(1) 产生矛盾 证毕

定理 2 设条件(H_1), (H_2) 成立 若对任意的 $T > t_0$,

$$\int_T^{+}\int_a^b p(s,\ )\Big\{(1-\ )r_1(s)+\ [g(s,\ )]\Big\}_+ \mathrm{d}(\ )\mathrm{d}s=+\ ,\tag{9}$$

$$\int_T^{+}\int_a^b p(s,\ )\Big\{(1-\ )r_2(s)+\ [g(s,\ )]\Big\}_+ \mathrm{d}(\ )\mathrm{d}s=-\ ,\tag{10}$$

则方程(E) 的所有解振动

其中

$$r_1(s)=-\inf_{s\ [T,t]}h[g(s,a)],\ r_2(s)=-\sup_{s\ [T,t]}h[g(s,a)]$$

证明 假设存在非振动解 $x(t)$ 不失一般性, 假设 $x(t)>0$($x(t)<0$ 的情况类似讨论) 类似于定理 1 的证明知,

$$y\ (t)+\int_a^b p(t,\ )\Big\{(1-\ )y[g(t,\ )]+\ [g(t,\ )]\Big\}_+ \mathrm{d}(\ )\quad 0$$

由 $g(t,\ )$ 关于 非减可知, 存在 t_1 t_0 使得

$$y[g(t,\ )]\quad y[g(t,a)],$$

因此可得

$$y\ (t)+\int_a^b p(t,\ )\Big\{(1-\ )y[g(t,a)]+\ [g(t,\ )]\Big\}_+ \mathrm{d}(\ )\quad 0\tag{11}$$

下证 $y[g(t,a)]$ $r_1(s)$ 事实上, 假设不然, 则存在 t_2 t_1 使得 $y[g(t_2,a)]<r_1(s)$, 因而有 T $[t_1,t_2]$ 使得 $-h[g(T,a)]=r_1(s)$ 注意到 $y(t)>-h(t)$ $y\ (t)>0$ 以及 $g(t,\ )$ 关于 t 非减, 得

$$r_1(s)=-h[g(T,a)]<y[g(T,a)]\quad y[g(t_2,a)],$$

矛盾 因而由(11) 可得

$$y\ (t)+\int_a^b p(t,\ )\Big\{(1-\ )r_1(s)+\ [g(t,\ )]\Big\}_+ \mathrm{d}(\ )\quad 0\tag{12}$$

余下证明同定理 1, 在此略去 证毕

定理 3 设条件(H_1)、(H_2)成立, 并且 $\lim_{t\ +}\inf\ (t)=0$ 若微分不等式

$$x\ (t)+(1-\ )\int_a^b p(t,\ )x[g(t,\ )]\mathrm{d}(\ )\quad 0\tag{13}$$

没有最终正解;

$$x\ (t)+(1-\ )\int_a^b p(t,\ )x[g(t,\ )]\mathrm{d}(\ )\quad 0\tag{14}$$

没有最终负解;

则方程(E) 的所有解振动

注 1 不等式(13)、(14)没有最终正(负)解的充分条件已由文[8]给出

证明 假设存在非振动解 $x(t)$ 不妨设 $x(t)>0$($x(t)<0$类似考虑) 由定理 1 的证明, 存在 $t_1>t_0$ 使得 $y(t)>0$, $y\ (t)>0$, t t_1, 并且 $x(t)$ $(1-\ )y(t)+\ (t)$ 由 $\lim_{t\ +}\inf\ (t)=0$ 知, 存在 t_2 t_1, 使得 $|\ (t)|$ $(1-\ )y(t_1)$, t t_2

令 $$w(t)=(1-\ )(y(t)-y(t_1)),\tag{15}$$

则 $w(t)>0$, 并且 $w(t)$ $x(t)$, t t_2 再由(4), 有

$$w\ (t)+(1-\ )\int_a^b p(t,\ )w[g(t,\ )]\mathrm{d}(\ )\quad 0,$$

即 $w(t)$ 是不等式(13) 的最终正解, 与假设条件矛盾 证毕

下面给出一个具体例子

例 $$x\ (t) + \frac{1}{2}x\ (t- \quad) + \int_{-\ /2}^{\ /2} \frac{1}{2}x(t+ \quad)\mathrm{d} \quad = \frac{1}{2}\sin t, \tag{16}$$

其中 $= \quad , \quad = \frac{1}{2}, q(t) = \frac{1}{2}\sin t, g(t+ \quad) = t+$

若取 $h(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ 容易验证定理 1 的条件满足, 因而方程(16) 的所有解振动 事实上, $x(t) = \sin t$ 即为方程(16) 的一个振动解

注 2 因为方程(E) 中的积分为 Stieltjes 积分, 因而方程(E) 包含了下列形式的方程

$$x\ (t) + \quad x\ (t- \quad) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x[g_i(t)] = q(t)$$

注 3 本文结果可推广到含多个时滞

$$x\ (t) + \sum_{i=1}^{m} {}_i x\ (t- \ _i) + \int_a^b p(t, \ )x[g(t, \ )]\mathrm{d} \ (\ ) = q(t)$$

的情况

[参 考 文 献]

[1] Hale J K. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1977.

[2] Grammatikopoulos M K, Ladas G, Meimaridou A. Oscillations of second order neutral delay differential equations[J]. Rad Mat, 1985, **1**(2): 267 274.

[3] Grace S R, Lalli B S. Oscillation of solutions of nonlinear neutral second order delay differential equations[J]. Rad Mat, 1987, **3**(1): 77 84.

[4] Ruan S. Oscillations of second neutral differential equations[J]. Canad Math Bull, 1993, **36**(4): 485 496.

[5] Li H J, Liu W L. Oscillation criteria for second order neutral differential equations[J]. Canad J Math, 1996, **48**(4): 871 886.

[6] Tanaka K. Oscillation properties of solutions of second order neutral differential equations with deviating arguments[J]. Analysis, 1991, **19**(1): 99 111.

[7] Yu Y H, Fu X L. Oscillation of second order nonlinear neutral equation with continuous distributed deviating argument[J]. Rad Mat , 1991, **7**(2): 167 176.

[8] Zhang L Q, Fu X L. A class of second order functional differential inequalities[J]. Ann Differential Equations, 1996, **12**(1): 129 136.

Forced Oscillation of Second Order Neutral Equations

WANG Pei_guang[1], GE Wei_gao

(1 Department of Mathematics, Hebei University, Baoding, Hebei 071002, P R China;
2 Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China)

Abstract: A class of second order neutral equations with deviating arguments are studied, and sufficient conditions are derived for every solution to be oscillatory.

Key words: oscillation; neutral equation; deviating arguments