

文章编号: 1000\_0887(2000) 10\_1039\_07

# 求强非线性系统次谐共振解的 MLP 方法\*

唐驾时

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(马兴瑞推荐)

摘要: 定义了一个新的参数变换  $\alpha = \alpha(\varepsilon, n\omega_0/m, \omega_1)$ , 扩展了改进的 LP 方法的应用范围, 使该方法能够求强非线性系统的次谐共振解. 研究了 Duffing 方程的  $1/3$  亚谐和 3 次超谐共振解以及 Van der Pol-Mathieu 方程  $1/2$  亚谐共振解, 这些例子说明近似解和数值解相当吻合.

关键词: 强非线性系统; 次谐共振; 参数变换

中图分类号: O322 文献标识码: A

## 引 言

强非线性系统近似解的研究是非线性动力学领域的一个重要课题. 目前, 已有一些比较成熟的求解方法, 例如推广的 KBM 法<sup>[1]</sup>、MLP 方法<sup>[2]</sup>、频闪法<sup>[3]</sup>等等. 但是这些方法均存在对某一些问题适用, 对某一些问题不适用的局限性, 因此, 强非线性系统的近似分析还在不断地进行改进, 不断地提出新的方法.

在强非线性系统的近似分析中, 参数变换技术是一种很有效的工具. Jones<sup>[4]</sup>通过引进新的参数  $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ , 利用摄动技术来分析强非线性系统, 当时解决了某些特殊系统的问题. 后来, Y. K. Cheung 等<sup>[2]</sup>人对此方法进行了改进, 使参数变换方法更具有一般性, 适用于一般系统而不是某一个特殊系统, 该方法被称为 MLP 方法. 用 MLP 方法, 文献[5]研究了二自由度系统的求解, 文献[6]研究了同时具有两次、三次非线性的系统的求解.

次谐共振是非线性系统特有的现象, 强非线性系统的次谐共振分析的文献不多. 本文将 MLP 方法中的参数变换  $\alpha = \alpha(\varepsilon, \omega_0, \omega_1)$  修改为  $\alpha = (\varepsilon, n\omega_0/m, \omega_1)$ , 解决了求强非线性系统的次谐共振解的问题.

## 1 求次谐共振的 MLP 方法

考虑强非线性振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mathcal{F}(x) = \mathcal{P} \cos \Omega t, \quad (1)$$

初始条件为

$$x(0) = a_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2)$$

其中  $\varepsilon$  不要求为小参数. 令

\* 收稿日期: 1999\_09\_17; 修订日期: 2000\_04\_15

作者简介: 唐驾时(1948~), 男, 湖南湘乡市人, 教授, 从事非线性动力学研究, 发表论文 40 余篇.

$$\tau = \Omega t \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)得

$$\Omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \mathcal{G}(x) = \mathcal{P} \cos \tau, \quad (4)$$

其中  $x''$  表示  $d^2x/d\tau^2$ . 设

$$\Omega^2 = \left[ \frac{n}{m} \omega_0 \right]^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (5)$$

引进一个新的变换参数

$$\alpha = \frac{\varepsilon \omega_1}{\left[ \frac{n}{m} \omega_0 \right]^2 + \varepsilon \omega_1}, \quad (6)$$

其中  $m, n$  为自然数. 当  $\Omega \approx n\omega_0/m$  时,  $n \neq 1, m = 1$  称为亚谐共振;  $n = 1, m \neq 1$  称为超谐共振. 将(5)式改写为

$$\Omega^2 = \frac{\left[ \frac{n}{m} \omega_0 \right]^2}{1 - \alpha} (1 + \delta_2 \alpha^2 + \delta_3 \alpha^3 + \dots), \quad (7)$$

则

$$\Omega = \frac{n}{m} \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha + \left( \frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right], \quad (8)$$

而

$$\varepsilon = \frac{\left[ \frac{n}{m} \omega_0 \right]^2 \alpha}{\omega_1 (1 - \alpha)}. \quad (9)$$

设方程(4)的解为

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots \quad (10)$$

将式(10)代入式(4), 比较  $\alpha$  同次幂系数, 得一组摄动方程

$$x_0'' + \left[ \frac{m}{n} \right]^2 x_0 = 0, \quad (11)$$

$$x_1'' + \left[ \frac{m}{n} \right]^2 x_1 = \left[ \frac{m}{n} \right]^2 x_0 - \frac{1}{\omega_1} f(x_0) + \frac{1}{\omega_1} P \cos \tau, \quad (12)$$

$$x_2'' + \left[ \frac{m}{n} \right]^2 x_2 = -\delta_2 x_0'' + \left[ \frac{m}{n} \right]^2 x_1 - \frac{1}{\omega_1} x_1 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}, \quad (13)$$

.....

初始条件相应为

$$x_0(0) = a_0, \quad x_0'(0) = 0; \quad (14)$$

$$x_i(0) = 0, \quad x_i'(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

分别求解各个摄动方程, 用消除永年项的条件确定  $\omega_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ , 可求得系统(1)的近似解.

## 2 强非线性 Duffing 方程的 1/3 亚谐共振解

应用改进的 MLP 方法, 具体考虑强非线性 Duffing 方程

$$\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = \mathcal{P} \cos \Omega t, \quad (16)$$

初始条件为

$$x(0) = a_0, \quad x'(0) = 0$$

求方程(16)的 1/3 亚谐共振解, 这时  $n = 3$ , 令

$$\alpha = \frac{\varepsilon\omega_1}{(3\omega_0)^2 + \varepsilon\omega_1} \tag{17}$$

而 
$$\Omega = 3\omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{2}\alpha + \left( \frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right] \tag{18}$$

摄动方程(11)~(13)的表达式为

$$x_0'' + \frac{1}{9}x_0 = 0, \tag{19}$$

$$x_1'' + \frac{1}{9}x_1 = \frac{1}{9}x_0 - \frac{1}{\omega_1}x_0^3 + \frac{1}{\omega_1}P \cos \tau, \tag{20}$$

$$x_2'' + \frac{1}{9}x_2 = -\delta_2 x_0'' + \frac{1}{9}x_1 - \frac{3}{\omega_1}x_0^2 x_1, \tag{21}$$

.....

利用初始条件(14), 方程(19)的解为

$$x_0 = a_0 \cos \frac{\tau}{3} \tag{22}$$

将式(22)代入式(20)得

$$x_1'' + \frac{1}{9}x_1 = \left[ \frac{1}{9}a_0 - \frac{3}{4\omega_1}a_0^3 \right] \cos \frac{\tau}{3} + \left[ -\frac{1}{4\omega_1}a_0^3 + \frac{1}{\omega_1}P \right] \cos \tau, \tag{23}$$

消去永年项, 有

$$\omega_1 = \frac{27}{4}a_0^2 \tag{24}$$

方程(23)的解为

$$x_1 = a_1 \cos \frac{\tau}{3} + \frac{9}{32\omega_1}(a_0^3 - 4P) \cos \tau \tag{25}$$

由初始条件(15)可得

$$a_1 = -\frac{9}{32\omega_1}(a_0^3 - 4P) \tag{26}$$

将式(22)、(25)代入式(21)得

$$x_2'' + \frac{1}{9}x_2 = \left[ \frac{1}{9}\delta_2 a_0 + \frac{1}{9}a_1 - \frac{9}{4\omega_1}a_0^2 a_1 - \frac{27}{128\omega_1^2}a_0^5 + \frac{27}{32\omega_1^2}a_0^2 P \right] \cos \frac{\tau}{3} + \frac{1}{32\omega_1}(a_0^2 - 24a_0^2 a_1 - 4P) \cos \tau - \frac{27}{128\omega_1^2}(a_0^5 - 4a_0^2 P) \cos \frac{5\tau}{3}, \tag{27}$$

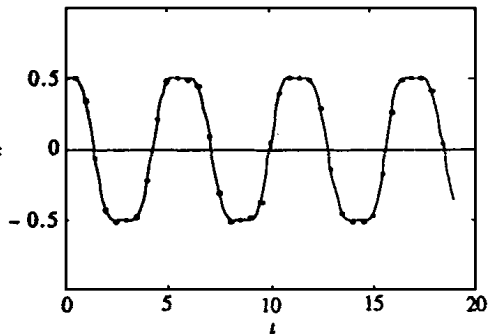
消去永年项, 有

$$\delta_2 = -\frac{1}{a_0}a_1 + \frac{81}{4\omega_1}a_0 a_1 + \frac{243}{128\omega_1^2}a_0^4 - \frac{243}{32\omega_1^2}a_0 P \tag{28}$$

因此, 方程(16)的近似解为

$$x = a_0 \cos \frac{\Omega t}{3} - \frac{9}{32\omega_1} \alpha (a_0^3 - 4P) \left[ \cos \frac{\Omega t}{3} - \cos \Omega t \right] \tag{29}$$

其中  $\omega_1$ 、 $\alpha$ 、 $\Omega$  由式(24)、(17)、(18) 分别给出, 而  $\delta_2$  由式(28) 确定。



— 近似解, ... 数值解  
图 1 式(16)的解

若给定  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $P = 0.8$ ,  $a_0 = 0.5$ , 计算得

$$\alpha = 0.15789, \quad \delta_2 = 1.025, \quad \Omega = 3.30321 \cdot$$

方程(16)的近似解为

$$x = 0.58092 \cos(1.10107t) - 0.08092 \cos(3.30321t) \cdot \quad (30)$$

一般来说, 对于方程(16)用数值方法求解能得到精度很高的数值解, 将近似解(30)与其比较, 可以知道近似解的精确程度. 此例近似解和数值解的计算结果是非常接近的, 解  $x$  的时间历程曲线几乎重合, 因此, 我们用图1来进行比较.

### 3 强非线性 Duffing 方程的超谐共振解

考虑强非线性 Duffing 方程

$$\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = P \cos \Omega t, \quad (31)$$

初始条件为

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$$

为使外激励在第一个摄动方程中出现, 式(31)中  $\varepsilon$  没有在方程的右边出现. 求方程(31)的3次超谐共振解, 这时  $m = 3$ . 令

$$\alpha = \frac{\varepsilon \omega_1}{(\omega_0/3)^2 + \varepsilon \omega_1}, \quad \Omega = \frac{1}{3} \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha + \left( \frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right],$$

摄动方程的表达式为

$$x_0'' + 9x_0 = \frac{9}{\omega_0^2} P \cos \tau,$$

$$x_1'' + 9x_1 = 9x_0 - \frac{1}{\omega_1^2} x_0^3 - \frac{9}{\omega_0^2} P \cos \tau,$$

$$x_2'' + 9x_2 = -\delta_2 x_0'' + 9x_1 - \frac{3}{\omega_1^2} x_0^2 x_1,$$

.....

逐个求解上述方程, 式(31)的近似解为

$$x = a_0 \cos 3\Omega t + \frac{9}{8\omega_0^2} P \cos \Omega t + \alpha (C_1 \cos \Omega t +$$

$$a_1 \cos 3\Omega t + C_2 \cos 5\Omega t + C_3 \cos 7\Omega t +$$

$$C_4 \cos 9\Omega t), \quad (32)$$

其中

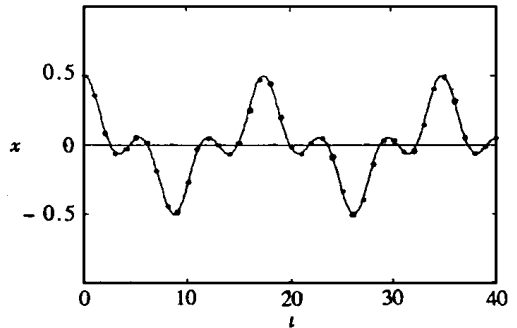
$$a_0 = a - \frac{9}{8\omega_0^2} P, \quad \omega_1 = \frac{1}{12} a_0^2 + \frac{81}{2048 \omega_0^6 a_0} P^3 + \frac{27}{128 \omega_0^4} P^2,$$

$$C_1 = \frac{9}{64 \omega_0^2} P \left[ 1 - \frac{243}{256 \omega_0^4 \omega_1} P^2 - \frac{3}{2 \omega_1} a_0^2 - \frac{27}{32 \omega_0^2 \omega_1} a_0 P \right],$$

$$C_2 = \frac{27}{512 \omega_0^2 \omega_1} a_0 P \left[ a_0 + \frac{9P}{8\omega_0^2} \right], \quad C_3 = \frac{27}{128 \omega_0^2 \omega_1} a_0^2 P,$$

$$C_4 = \frac{1}{288 \omega_1} a_0^3, \quad a_1 = -C_1 - C_2 - C_3 - C_4,$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{a_0} a_1 + \frac{1}{6a_0 \omega_1} a_1 \left[ a_0^2 + \frac{81}{64 \omega_0^4} P^2 \right] + \frac{3}{16a_0 \omega_0^2 \omega_1} P \left[ \frac{9}{16 \omega_0^2} P + a_0 \right] (C_1 + C_2) +$$



— 近似解, ... 数值解

图2 式(31)的解

$$\frac{3}{16\omega_0^2\omega_1}P(C_1 + C_3) + \frac{1}{12\omega_1}a_0(a_1 + C_4)$$

若给定  $\omega_0 = 1, \varepsilon = 1, P = 0.3, a = 0.5$ , 方程(32) 则为

$$x = 0.29545 \cos \Omega + 0.19398 \cos 3\Omega + 0.00926 \cos 5\Omega + 0.00120 \cos 7\Omega + 0.00011 \cos 9\Omega, \quad (33)$$

其中

$$\Omega = 0.36081$$

近似解与数值解的计算结果见图 2, 两者也是很接近的。

#### 4 强非线性 Van der Pol-Mathieu 方程的 1/2 亚谐波共振

含参数激励的非线性系统有丰富的动力学状态, 1/2 亚谐波共振是其中之一。我们用 MLP 方法来求强非线性参数激励系统的亚谐波共振。考虑含有参数激励的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + (\omega_0^2 + \varepsilon \cos \Omega t)x = 0, \quad (34)$$

初始条件为

$$x(0) = a_0 \quad (35)$$

讨论 1/2 亚谐波共振情况,  $n = 2$ , 令

$$\alpha = \frac{\varepsilon\omega_1}{4\omega_0^2 + \varepsilon\omega_1}, \quad \Omega = 2\omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{2}\alpha + \left( \frac{3}{8} + \frac{\delta_0}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right] \quad (36)$$

将方程(34)进行参数变换, 然后求得一组摄动方程为

$$x_0'' + \frac{1}{4}x_0 = 0, \quad (37)$$

$$x_1'' + \frac{1}{4}x_1 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{2}{\omega_1}\omega_0(1 - x_0^2)x_0' - \frac{1}{\omega_1}x_0 \cos \tau, \quad (38)$$

$$x_2'' + \frac{1}{4}x_2 = -\delta_2 x_0'' + \frac{1}{\omega_1}\omega_0(1 - x_0^2)x_0' + \frac{2}{\omega_1}\omega_0(1 - x_0^2)x_1' - \frac{4}{\omega_1}\omega_0 x_0 x_1 x_0' + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{\omega_1}x_1 \cos \tau, \quad (39)$$

.....

方程(37)的解为

$$x_0 = a_0 \cos \frac{\tau}{2} + b_0 \sin \frac{\tau}{2}, \quad (40)$$

其中  $b_0$  由式(38)消除永年项的条件来确定, 因此只给出式(35)表示的一个初始条件<sup>[2]</sup>。将式(40)代入式(38)得

$$x_1'' + \frac{1}{4}x_1 = \left[ \frac{a_0}{4} - \frac{a_0}{2\omega_1} + \frac{1}{\omega_1}\omega_0 b_0 - \frac{1}{4\omega_1}\omega_0 b_0(a_0^2 + b_0^2) \right] \cos \frac{\tau}{2} + \left[ \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{2\omega_1}b_0 - \frac{1}{\omega_1}\omega_0 a_0 + \frac{1}{4\omega_1}\omega_0 a_0(a_0^2 + b_0^2) \right] \sin \frac{\tau}{2} - \frac{1}{4\omega_1}(3\omega_0 a_0^2 b_0 - \omega_0 b_0^3 + 2a_0) \cos \frac{3\tau}{2} - \frac{1}{4\omega_1}(3\omega_0 a_0 b_0^2 - \omega_0 a_0^3 + 2b_0) \sin \frac{3\tau}{2}. \quad (41)$$

利用消除永年项的条件得

$$\omega_1 = \frac{1}{2a_0b_0} \omega_0 (a_0^2 - b_0^2) (4 - a_0^2 - b_0^2), \quad (42)$$

而  $b_0$  由下式确定

$$\omega_0 b_0^4 + 2\omega_0 (a_0^2 - 2)b_0^2 + 4a_0b_0 + \omega_0 a_0^4 - 4\omega_0 a_0^2 = 0 \quad (43)$$

式(41)的解为

$$x_1 = a_1 \cos \frac{\tau}{2} + b_1 \sin \frac{\tau}{2} + C_1 \cos \frac{3\tau}{2} + C_2 \sin \frac{3\tau}{2}, \quad (44)$$

其中

$$C_1 = \frac{1}{8\omega_1} (3\omega_0 a_0^2 b_0 - \omega_0 b_0^3 + 2a_0), \quad C_2 = \frac{1}{8\omega_1} (3\omega_0 a_0 b_0^2 - \omega_0 a_0^3 + 2b_0) \quad (45)$$

由初始条件求得

$$a_1 = -\frac{1}{8\omega_1} (3\omega_0 a_0^2 b_0 - \omega_0 b_0^3 + 2a_0) \quad (46)$$

将式(40)、(44)代入式(39), 利用消除永年项的条件得

$$b_1 = \frac{D_1 E_3 - D_3 E_1}{D_1 E_2 - D_2 E_1}, \quad \delta_2 = \frac{D_3 E_2 - D_2 E_3}{D_1 E_2 - D_2 E_1} \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} D_1 &= 2\omega_1 a_0, \quad D_2 = 2\omega_0 (4 - a_0^2 - 3b_0^2), \\ D_3 &= -\omega_0 b_0 (4 - a_0^2 - b_0^2) + 2\omega_0 C_2 (a_0^2 - b_0^2) + \\ &\quad 4\omega_0 a_0 b_0 (a_1 - C_1) - 2\omega_1 a_1 + 4a_1 + 4C_1, \\ E_1 &= 2\omega_1 b_0, \quad E_2 = 4\omega_0 a_0 b_0 + 2\omega_1 + 4, \\ E_3 &= \omega_0 a_0 (4 - a_0^2 - b_0^2) + 2\omega_0 a_1 (4 - 3a_0^2 - b_0^2) - \\ &\quad 2\omega_0 C_1 (a_0^2 - b_0^2) - 4\omega_0 a_0 b_0 C_2 + 4C_2 \end{aligned}$$

方程(34)的近似解为

$$x = a_0 \cos \frac{\Omega t}{2} + b_0 \sin \frac{\Omega t}{2} + \alpha \left[ C_1 \cos \frac{3\Omega t}{2} + C_2 \sin \frac{3\Omega t}{2} \right], \quad (48)$$

其中  $\alpha$ 、 $\Omega$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  分别由式(36)、(45)确定。用具体数据计算该近似解有较高的精度。

## 5 结 论

本文的主要贡献在于将文献[2]提出的变换参数  $\alpha = \varepsilon\omega_1 / (\omega_0^2 + \varepsilon\omega_1)$  改进为

$$\alpha = \frac{\varepsilon\omega_1}{(n\omega_0/m)^2 + \varepsilon\omega_1}$$

使 MLP 方法的应用范围得到进一步的扩展, 用该方法求强非线性系统的次谐共振解是有很有效的。本文给出的例子均只求出了关于  $\alpha$  的一次近似解, 若求出高阶近似解, 还能提高计算精度。

### [参 考 文 献]

- [1] 徐兆. 非线性力学中一种新的渐近方法[J]. 力学学报, 1985, 17(3): 266—271.
- [2] Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. A modified Lindstedt-Poincaré method for certain strongly nonlinear oscillators[J]. Int J Nonlinear Mechanics, 1991, 26(3, 4): 367—378.
- [3] 李骊. 强非线性系统的频闪法[J]. 力学学报, 1990, 22(4): 402—412.
- [4] Jones S E. Remarks on the perturbation process for certain conservative systems[J]. Int J Non-

Linear Mechanics, 1978, **13**(1): 125—136.

- [5] Chen S H, Cheung Y K. A modified Lindstedt\_Poincaré method for a strongly nonlinear two degree of freedom system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **193**(4): 751—762.
- [6] Chen S H, Cheung Y K. A modified Lindstedt\_Poincaré method for a strongly nonlinear system with quadratic and cubic nonlinearities[J]. Shock and Vibration, 1996, **3**(4): 279—285.

## The MLP Method for Subharmonic and Ultraharmonic Resonance Solutions of Strongly Nonlinear Systems

TANG Jia\_shi

( Department of Engineering Mechanics, Hunan University,  
Changsha 410082, P R China )

**Abstract:** A new parameter transformation  $\alpha = \alpha(\varepsilon, n\omega_0/m, \omega_1)$  was defined for extending the applicable range of the modified Lindstedt\_Poincaré method. It is suitable for determining subharmonic and ultraharmonic resonance solutions of strongly nonlinear systems. The  $1/3$  subharmonic and 3 ultraharmonic resonance solutions of the Duffing equation and the  $1/2$  subharmonic resonance solution of the Van der Pol\_Mathieu equation were studied. These examples show approximate solutions are in good agreement with numerical solutions.

**Key words:** strongly nonlinear system; subharmonic and ultraharmonic resonance; parameter transformation