应用数学和力学, 第 21 卷 第 10 期(2000 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 10_1021_07

窄域上 2D 弱阻尼 KdV 方程的局部吸引子*

田立新[1], 刘玉荣[2], 刘曾荣[3]

(1. 江苏理工大学 数理系, 江苏 镇江 212013; 2. 苏州大学 数学系, 江苏 苏州 215006;
3. 上海大学 嘉定校区 数学系, 上海 201800)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 得到了窄域上 2D 的非自共轭且非扇形的弱阻尼 KdV 方程的局部吸引子的存在性•

关 键 词: 吸引子; 弱阻尼; 非线性孤立波方程; 窄域; 非自共轭算子
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

高维无穷维动力系统的研究近年来取得不少成就, 如见[1~10]等, 大部分工作基于对反应扩散方程、Kuramoto_Sivashinsky 方程、Navier_Stokes 方程等• 由于弱阻尼 KdV 方程中典型算子是非自共轭及非扇形的, 增加了对该类方程研究的难度• 在[11]、[12]、[13]中研究了一维的该类方程的吸引子、吸引子的收敛极限、吸引子的逼近等• 在这些工作基础上, 本文研究窄域上 2 维弱阻尼 KdV 方程的局部动力学特征: 局部吸引子的存在性•

定义 1 设 $\left\{T(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 是 Hilbert 空间 H 下某动力系统的非线性半群, 若有一个集合 A 满足: A 是紧的不变且存在一个 A 的有界邻域 B, 使得 A 吸收 B, 则称 A 是 $\left\{T(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 的局部吸引子•

本文研究的 2D 弱阻尼的 KdV 方程如下:

$$u_t + u_{xxx} - \eta\Delta u + \gamma u + (u\cdot\nabla)u = 0, \qquad \eta,\ \gamma > 0, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \subset R^2,$$

$$u(x_1 + 2\pi, x_2, t) = u(x_1, x_2 + 2\pi, t) = u(x_1, x_2, t), \qquad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{3}$$

其中 $\Omega_\varepsilon = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi\varepsilon]$ 为 R^2 中 2D 窄域, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ 是某个较小的数• $u = (u_1, u_2) \in L^p(\Omega_\varepsilon)$ 且满足旋度为 0, 即 $\mathrm{curl}\, u = 0$•

方程(1)~(3)的解的存在性及唯一性见[14、15]• 本文在该方程解的存在唯一基础上, 考

* 收稿日期: 1999_07_05; 修订日期: 2000_05_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19601020); 江苏省青年科技基金资助项目(BQ98023); 江苏省青蓝工程基金资助项目
作者简介: 田立新(1963—), 男, 江苏省姜堰人, 教授, 博士, 江苏理工大学非线性科学研究中心主任(E_mail: tianlx@jsust.edu.cn).

虑该方程的局部吸引子问题. 本文首先研究(1)的约化方程, 获得约化方程存在整体吸引子(即本文定理1.1); 再利用[16]中的窄域上2D弱阻尼KdV方程的blow-up时间估计及有关性质, 得到弱阻尼KdV方程的局部吸收集的存在性(即本文定理1.2), 从而就得到该方程的局部吸引子的存在性.

1　符号及定理

设 $Q = [0, 2\pi]$, $\Omega_\varepsilon = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi\varepsilon]$. 任意 $y \in \Omega_\varepsilon$, 则 $y = (y_1, y_2)$, 其中 $y_1 \in [0, 2\pi]$, $y_2 \in [0, 2\pi\varepsilon]$. 定义 $\mathbf{R}^2$ 实值函数 $U \in L^p(\Omega_\varepsilon)$, 并引入新范数

$$| U |_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^{-1/p} \| U \|_{L^p(\Omega_\varepsilon)},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 L^p 范数. 对 $p = 2$, 相应的新内积定义为:

$$\langle U, V\rangle_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^{-1}(U, V)_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 记为 $L^p(\Omega)$ 中内积. 设 $U \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, 定义投影算子 M 如下:

$$V = MU,$$

其中

$$V = V(y_1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi\varepsilon} U\mathrm{d}y_2.$$

则 $M: L^2(\Omega) \to$ 仅含变量 y_1 的函数的闭子空间. 易证 M 是一个正交投影, 其正交补 $I - M$ 为 $W = (I - M)U$. 易得

$$| U |^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = | V |^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + | W |^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

作如下变换, 令 $x_1 = y_1$, $x_2 = \varepsilon^{-1}y_2$, $Q_2 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. 定义算子

$$\nabla_\varepsilon = (D_{x_1}, \varepsilon^{-1}D_{x_2}),\quad \Delta_\varepsilon = D^2_{x_1} + \varepsilon^{-2}D^2_{x_2},\quad \nabla^3_\varepsilon = (D^3_{x_1}, \varepsilon^{-3}D^3_{x_2}).$$

定义 $u = u(x)$ 使 $u(x) = U(y)$, 其中 x、y 如上是线性相关的. 记$(\cdot, \cdot)$ 为 $L^2(Q_2)$ 中的内积. 则对 $p > 1$, 下述等式成立:

$$| U |_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \| u \|_{L^p(Q_2)}.$$

则有下述Sobolev空间中范数满足的不等式

$$\| u \|_{H^1(Q_2)} \leqslant | U |_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{-1} \| u \|_{H^1(Q_2)},$$

$$\| u \|_{H^2(Q_2)} \leqslant | U |_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{-2} \| u \|_{H^2(Q_2)}.$$

与上述投影定义类似可以定义 Q_2 中的投影算子 M 及 $I - M$:

$$v = Mu,\ \text{其中}\ v = v(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\mathrm{d}x_2,\quad w = (I - M)u.$$

在这些符号下, 方程(1)~(3)成为

$$u_t + \nabla^3_\varepsilon u - \eta\Delta_\varepsilon u + \gamma u + (u\cdot\nabla_\varepsilon)u = 0,\qquad \eta, \gamma > 0, \tag{4}$$

$$u = u(x, t),\quad x = (x_1, x_2)\qquad \text{其中}\ x_1, x_2\ \text{以}\ 2\pi\ \text{为周期}, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = u_0(x)\ \text{也以}\ 2\pi\ \text{为周期}. \tag{6}$$

将投影算子 M 及 $I - M$ 用于(4)二边, 得到

$$\begin{cases} v_t + \nabla^3_\varepsilon v - \eta\Delta_\varepsilon v + \gamma v + M((u\cdot\nabla_\varepsilon)u) = 0, \\ w_t + \nabla^3_\varepsilon w - \eta\Delta_\varepsilon w + \gamma w + (I - M)((u\cdot\nabla_\varepsilon)u) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $u = v + w$. 为证明(4)~(6)的吸收集的存在性, 我们引出(7)的约化方程如下, 在(7)中取 $v = v$, $w = 0$, 则 $u = v$, 由(4)式得到

$$\begin{cases} v_t + \nabla_\varepsilon^3 v - \eta\Delta_\varepsilon v + \gamma v + (v\cdot\nabla_\varepsilon)v = 0, \\ v(x,0) = v_0 = Mu_0, \end{cases} \tag{8}$$

注意到 $u = v$ 是二维的, 可设 $v = (v_1, v_2)$, 则由(8)式得到

$$v_{1,t} + \nabla_\varepsilon^3 v_1 - \eta\Delta_\varepsilon v_1 + \gamma v_1 + v_1 D_{x_1} v_1 = 0, \tag{9}$$

$$v_{2,t} + \nabla_\varepsilon^3 v_2 - \eta\Delta_\varepsilon v_2 + \gamma v_2 + v_1 D_{x_1} v_2 = 0. \tag{10}$$

得到的(9)式是一个关于 v_1 的一维弱阻尼 KdV 方程, (10)式是关于 v_2 的一个线性方程.

记 $\mathrm{A} = \partial^4/\partial x^4$, 记 $X^{1/4} = D(\mathrm{A}^{1/4})$, $S(t)$ 是(4)对应的解半群. 进一步, 在 $X = L^2[0, 2\pi]$ 中存在半径为 $2\rho_0$、$2\rho_1$ 的吸收球.

命题 1.1 (见[8]、[12])

(1) 考虑一维的弱阻尼 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t - u_{xxx} - \eta u_{xx} + \gamma u + uu_x = 0, \qquad \eta, \gamma > 0, \\ u(x + 2\pi, t) = u(x, t) \in L^2([0, 2\pi]) = X, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{11}$$

则存在正数 γ, L 及数值函数 D, D 在 $|u_0|$ 处实值解析, 使得对于解半群 $S(t)$ 满足

$$|\mathrm{A}^{1/4}S(t)u_0|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-2\gamma t}D + L, \qquad t \geqslant 0.$$

(2) 给定 k 满足 $0 < k < 1$, 则存在正数 b_i, $i = 1, 2$, 使得对所有 $u_0 \in X^{1/4}$, 成立

$$|\mathrm{A}^{1/4}S(t)u_0|^2 \leqslant L + k|\mathrm{A}^{1/4}u_0|^2, \qquad t \geqslant T_0,$$

其中 L 为常数, 且 $T_0 = b_1\exp(b_2|\mathrm{A}^{1/4}u_0|^4)$.

(3) 设 $B_1 > L$, L 如上, 则存在常数 $k_0 \geqslant 1$, 使得对 $0 \leqslant h \leqslant 1$ 及 $u_0 \in X^{1/4}$ 满足 $L \leqslant |\mathrm{A}^{1/4}u_0|^2 \leqslant B_1^2$ 成立, 对 $t > 0$

$$|\mathrm{A}^{1/4}S(t)u_0|^2 \leqslant k_0|\mathrm{A}^{1/4}u_0|^2 h^{*-2},$$

其中 $h^{*-2} = \exp(a_1\exp(a_2B_1^4h^{-4}))$, a_1、a_2 为常数.

命题 1.2 设 $h = h(\varepsilon) = \left\{A + B\lg\lg\lg\lg(C\varepsilon^{-1})\right\}^{-1/4}$, A、B、C 为常数. 则可得 h 的有关性质: (1) $\varepsilon \to 0^+$ 时, $h \to 0$; (2) $0 < \varepsilon \leqslant 1$ 时, $h \leqslant 1$; (3) $\varepsilon h^{-2} \leqslant 1$, $\varepsilon h^{*-2} \leqslant 1$, 当 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ 时; (4) $\varepsilon \to 0^+$ 时, $\varepsilon h^{-4} \to 0$; $\varepsilon^3h^{-2}\lg(\varepsilon^3h^{-1}) \to 0$; $\varepsilon\exp(Ah^{*-2}h^{-2}\mathrm{e}^{Bh^{-4}}) \to 0$.

本文定义 $\mathrm{A}_\varepsilon u = \Delta_\varepsilon^2 u$, 则 $\mathrm{A}_\varepsilon^{1/2} = -\Delta_\varepsilon$, $|\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}u| = |\nabla_\varepsilon u|$, $|\mathrm{A}_\varepsilon^{3/4}u| = |\nabla_\varepsilon^3 u|$. 仿照[11]、[13]、[17]可得

$$|((u\cdot\nabla_\varepsilon)v, w)| \leqslant C|v|^{1/2}|\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}u||\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}v||w|^{1/2}|\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}w|^{1/2}, \tag{12}$$

其中 C 与 ε 无关, $u, v, w \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ 或 $L^2(Q_2)$.

定理 1.1 (1)的约化方程(8)存在整体吸引子.

引理 1.1 设 B_1, $C_1 > 0$, $u_0 = v_0 + w_0$ 选择为满足

$$|\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}v_0|^2 \leqslant B_1^2h^{-2}, \quad |\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}w_0|^2 \leqslant C_1^2\varepsilon.$$

设 $k_0 \geqslant 1$, k_0 由命题 1.1(3) 给定, $k_0 = 1/8$, $N = 4k_0$, $T_0 = T_0(\varepsilon) = b_1\exp(b_2B_1^4h^{-4})$, 使得

$$|\mathrm{A}^{1/4}v(t)|^2 \leqslant \frac{1}{8}|\mathrm{A}^{1/4}v_0|^2, \qquad t \geqslant T_0.$$

定义 $\tau_N = \sup\left\{\tau > 0, |\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}u(t)|^2 \leqslant ND_4^2h^{*-2}h^{-2},\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\right\}$, 其中 $D_4^2 = B_1^2 + C_1^2$, 则存在 ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时成立

$$T_0 \leqslant \tau_N; \quad |\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}v(T_0)|^2 \leqslant \frac{3}{4}B_1^2h^{-2}; \quad |\mathrm{A}_\varepsilon^{1/4}w(T_0)|^2 \leqslant C_1^2\varepsilon.$$

定理 1.2　对方程(1) ~ (3), 存在 ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant 1$, 常数 B_0 及实值函数 $R(\varepsilon)$、$K(\varepsilon)$, 使得 $R(\varepsilon) > 0$、$K(\varepsilon) > 1$, 且 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $R(\varepsilon) \to \infty$· 如果 $u_0 \in X^{1/4}$ 且 $|u_0| \leqslant R(\varepsilon)$, 则

$$u(t) \in X^{1/4}, \qquad t \geqslant 0,$$

且

$$|A_\varepsilon^{1/4} u(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K(\varepsilon) R(\varepsilon), \qquad t \geqslant 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} \sup |A_\varepsilon^{1/4} u(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant B_0 \cdot$$

定理 1.3　设 $B_\varepsilon = \left\{ U: |A^{1/4} U| \leqslant R(\varepsilon),\ R(x) \text{ 为大于 0 的某实值函数} \right\}$, 则 B_ε 为(1) ~ (3) 的吸收集· 从而(1) ~ (3) 存在局部吸引子·

2　引理及定理证明

定理 1.1 的证明

注意到(9) 及(10) 二式与 ε 无关, 并且 $(v_1, v_2) = v$ 与 x_2 无关· 由[11~13] 可得在 $L^2[0, 2\pi]$ 上对 v_1 吸收性质成立且具有整体吸引子 A· 因为 v 的旋度为零, 所以 v_2 也与 x_1 无关, 该函数仅依赖于时间· 由(10) 式, 则 v_2 为常数, 而 v_2 的平均为零, 所以 v_2 恒为零· 所以约化方程(8) 式有整体吸引子 $A \times \{0\}$·

引理 1.1 的证明

由[16] 定理 1.2 证明中间部分得到, $0 < t < \tau_N$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |A_\varepsilon^{1/4} w|^2 + \varepsilon^{-4} |A_\varepsilon^{1/4} w|^2 \leqslant \frac{1}{2} C^2 N^2 D_4^2 h^{-4} h^{*-4},$$

由 Grownall 不等式, 得到

$$|A_\varepsilon^{1/4} w(t)|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-4} t} |A_\varepsilon^{1/4} w_0|^2 + \varepsilon^4 \left[\frac{1}{2} C^2 N^2 D_4^2 h^{*-4} h^{-4} \right] \leqslant$$

$$\varepsilon C_1^2 \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-4} t} + \varepsilon^4 h^{*-4} h^{-4} \left(\frac{1}{2} C^2 N^2 D_4^2 \right) \cdot$$

则有 $|A_\varepsilon^{1/4} w(t)|^2 \leqslant \varepsilon C_1^2 \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-4} t} + \varepsilon D_5^2$, 其中 $D_5^2 = \varepsilon^3 h^{*-4} h^{-4} C^2 N^2 D_4^2$· 则有 $|A_\varepsilon^{1/4} w(t)|^2 \leqslant D_6^2 \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_N$, 其中 $D_6^2 = C_1^2 + D_5^2$· 解方程 $C_1^2 \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-4} t} = D_5^2$, 得到 $t = T_2 = -\varepsilon^4 \lg(D_5^2 / C_1^2)$, 则得到 $R_0 T_2 \leqslant D_4^2 h^{-2} \varepsilon^4 \lg(D_5^2 / C_1^2) \to 0$, 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时· 从而 $\varepsilon \to 0^+$ 时, $T_2 \to 0$·

注意到对 $\varepsilon_0 > 0$, $T_2(\varepsilon) \leqslant \min(T_0, T_N)$, 则 $|A_\varepsilon^{1/4} w(t)|^2 \leqslant 2 D_5^2 \varepsilon$, $T_2 < t < \tau_N$· 则得到 $|A_\varepsilon^{1/4} w(t)|^2 \leqslant C_1^2 \varepsilon$· 选择 ε_0, 使得 $\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} 2 D_5^2 \leqslant C_1^2$·

下面来估计 v, 设 v 为约化的 2 维方程中具有相同初值条件的解, 且 $v(0) = v(0)$· 这时

$$v_t + \nabla_\varepsilon^3 v - \eta \Delta_\varepsilon v + \gamma v + M(u \cdot \nabla_\varepsilon) u = 0,$$

$$v_t + \nabla_\varepsilon^3 v - \eta \Delta_\varepsilon v + \gamma v + (v \cdot \nabla_\varepsilon) v = 0 \cdot$$

二式相减得到

$$(v - v)' + \nabla_\varepsilon^3 (v - v) - \eta \Delta_\varepsilon (v - v) + \gamma (v - v) + (v \cdot \nabla_\varepsilon) v - (v \cdot \nabla_\varepsilon) v =$$

$$- M \left\{ (w \cdot \nabla_\varepsilon) v + (v \cdot \nabla_\varepsilon) w + (w \cdot \nabla_\varepsilon) w \right\} \cdot \tag{13}$$

设 $|((v \cdot \nabla_\varepsilon) v - (v \cdot \nabla_\varepsilon) v,\ A_\varepsilon^{1/2} (v - v))| = R$, 则

$$R = |((v - v) \cdot \nabla_\varepsilon v, A_\varepsilon^{1/2} (v - v)) - ((v \cdot \nabla_\varepsilon)(v - v), A_\varepsilon^{1/2} (v - v))| \leqslant$$

$$C |v - v|^{1/2} |A_\varepsilon^{1/4} (v - v)|^{1/2} |A_\varepsilon^{1/4} v| +$$

$$C |v| |A_\varepsilon^{1/4} v|^{1/2} |A_\varepsilon^{1/4} (v - v)| |A_\varepsilon^{1/2} (v - v)| \cdot$$

(13) 式与 $A_\varepsilon^{1/2}(v - v)$ 取内积, 则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + \eta | A_\varepsilon^{1/2}(v - v)|^2 + \gamma_1 | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 \leqslant R + S_1 + S_2 .$$

则有

$$R \leqslant C(| A_\varepsilon^{1/4} v | + | A_\varepsilon^{1/4} v |) | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)| | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|;$$

$$S_1 \leqslant C | A_\varepsilon^{1/4} w | | A_\varepsilon^{1/4} v | | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|,$$

$$S_2 \leqslant C | A_\varepsilon^{1/4} v | | A_\varepsilon^{1/4} w | | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)| .$$

从而

$$R \leqslant C(k_0^{1/2} B_1 + N^{1/2} D_4) h^{*-1} h^{-1} | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)| | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)| \leqslant \frac{k_1}{6} | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 + \frac{C_9}{k_1}(k_0 B_1^2 + N D_4^2) h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2;$$

$$S_1, S_2 \leqslant \frac{k_2}{6} | A_\varepsilon^{1/4} w |^2 + \frac{C_{10}}{k_2} N D_4^2 h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4} w |^2 .$$

则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + C_1 | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + \eta | A_\varepsilon^{1/2}(v - v)|^2 + \gamma | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 \leqslant \frac{k_1}{6} | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 + \frac{C_9}{k_1}(k_0 B_1^2 + N D_4^2) h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + \frac{k_2}{3} | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 + \frac{2C_{10}}{k_2} N D_4^2 h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4} w |^2,$$

所以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + C_1 | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 \leqslant \left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3}\right) | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 + \frac{C_9}{k_1}(k_0 B_1^2 + N D_4^2) h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{3/4}(v - v)|^2 + \frac{2C_{10}}{k_2} N D_4^2 h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4} w |^2 .$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + \left(C_1 - \frac{k_1}{6} - \frac{k_2}{3}\right) | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 - \frac{C_{11}}{k} h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 \leqslant \frac{2C_{10}}{k_2} N D_4^2 h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4} w |^2,$$

其中 $C_{11} = 2C_9(k_0 B_1^2 + N D_4^2)$.

取 C_1 使 $\left(C_1 - \frac{k_1}{6} - \frac{k_2}{3}\right) | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 \geqslant | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2$, 则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 - D_8 h^{*-2} h^{-2} | A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 \leqslant C_{12}\varepsilon h^{*-2} h^{-2},$$

其中 $D_8 = h^{*-2} h^{-2} + D_7$, $C_{12} = \frac{4C_9}{k_2} N D_4^2 D_6^2$,

则

$$| A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 \leqslant \varepsilon D_8^{-1} D_{12} \mathrm{e}^{D_8 h^{*-2} h^{-2} t}, \qquad 0 \leqslant t < \tau_N .$$

接下来要证明 $T_0 \leqslant \tau_N$, T_0 为引理给的常数· 否则, 若 $T_0 \leqslant \tau_N$ 不成立, 定义 $\Delta(t) = \varepsilon D_8^{-1} D_9 e^{D_8 h^{*-2} h^{-2} t}$· 则利用刚刚证得的不等式, 有

$$|A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2_{t=\tau_N} \leqslant \Delta(T_0) = \varepsilon D_8^{-1} D_9 \exp(D_8 h^{*-2} h^{-2} T_0) =$$
$$\varepsilon D_8^{-1} D_9 \exp\left\{D_8 h^{*-2} h^{-2} b_4 e^{b_5 B_1^4 h^{-4}}\right\},$$

由命题1.2(4) 得到 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 上式 $\to 0$· 因此存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 有

$$\Delta \leqslant \min\left\{\frac{1}{6} D_4^2,\ \frac{1}{4}(B_1^2 h^{-2} - 4L)\right\}·$$

注意到 $A_\varepsilon^{1/4} u = A_\varepsilon^{1/4} v + A_\varepsilon^{1/4} w = A_\varepsilon^{1/4}(v - v) + A_\varepsilon^{1/4} w + A_\varepsilon^{1/4} v$· 则由 Young 不等式, 得到

$$|A_\varepsilon^{1/4} u|^2 \leqslant 3(|A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + |A_\varepsilon^{1/4} w|^2 + |A_\varepsilon^{1/4} v|^2)·$$

考虑上式在 $t = \tau_N$ 处的值, 可得到

$$4k_0 h^{*-2} h^{-2}(B_1^2 + C_1^2) = N D_4^2 h^{*-2} h^{-2} = |A_\varepsilon^{1/4} u|^2 \leqslant$$
$$3(|A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2 + |A_\varepsilon^{1/4} w|^2 + |A_\varepsilon^{1/4} v|^2) \leqslant$$
$$3\Delta + 3C_1^2 \varepsilon + 3k_0 B_1^2 h^{*-2} h^{-2} \leqslant$$
$$\frac{1}{2} D_4^2 + 3C_1^2 + 3k_0 B_1^2 h^{*-2} h^{-2} \leqslant$$
$$C\left(3k_0 + \frac{1}{2}\right) B_1^2 + \frac{7}{2} C_1^2 h^{*-2} h^{-2},$$

这与 $k_0 \geqslant 1$ 矛盾, 就得到 $T_0 \leqslant \tau_N$· 因为 $T_2 \leqslant T_0 \leqslant \tau_N$, 则有, $|A_\varepsilon^{1/4} w(T_0)|^2 \leqslant C_1^2 \varepsilon$·

$$|A_\varepsilon^{1/4} v(T_0)|^2 \leqslant 2|A_\varepsilon^{1/4}(v - v)|^2_{t=T_0} + 2|A_\varepsilon^{1/4} v(T_0)|^2 \leqslant$$
$$2\Delta + 2\left(L + \frac{1}{8}|A_\varepsilon^{1/4} v_0|^2\right) \leqslant \frac{1}{2}(B_1^2 h^{-2} - 4L) + 2L + \frac{1}{4} B_1^2 h^{-2} = \frac{3}{4} B_1^2 h^{-2}·$$

定理 1.2 的证明由引理 1.1 易得出·

定理 1.3 的证明利用[8] 定理 2.2 及引理 1.1 和已有的 Sobolev 不等式: $|U|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{-1} \|u\|_{H^1(Q_2)}$· 即可证得·

[参 考 文 献]

[1] Temam R, Wang S. Inertial forms of Navier_Stokes equations on the sphere[J]. J Funct Anal, 1993, **117**(2): 215—242.

[2] Eden A, Foias C, Nicolaenko B, et al. Exponential attractors and their relevance to fluid dynamics systems[J]. Phys D, 1993, **63**(4): 350—360.

[3] Debussche A, Dubois T. Approximation of exponential order of the attractor of turbulent flow[J]. Phys D, 1994, **72**(4): 372—389.

[4] Sell G R. Global attractors for the three_dimensional Navier_Stokes equations[J]. J Dynamics Differential Equations, 1996, **8**(1): 1—37.

[5] Robinsion J C. Some closure results for inertial manifold[J]. J Dynamics Differential Equations, 1997, **9**(3): 373—400.

[6] LIU Zeng_rong, XU Zhen_yuan. A new method of studying the dynamical behaviour of the sine_Gordon equation[J]. Phys Lett A, 1995, **204**(5): 343—346.

[7] Eden A, Milani A, Nicolaenko B. Local exponetical attractors for modes of phase change for compressible gas dynamics[J]. Nonlinearity, 1993, **6**(1): 93—117.

[8] Hale J K. Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems [M]. AMS Math Surv Monogr. New York:

Springer_Verlag, 1988.
[9] Sell G, Taboada M. Local dissipativity and attractors for the K_S equation in thin 2D domains[J]. Nonlinear Anal, 1992, **18**(7): 671—687.
[10] Babin A V. Inertial manifolds for travelling wave solutions of reaction diffusion systems[J]. Comm Pure Appl Math, 1995, **18**(1): 167—198.
[11] Ghidaglia J M. Weakly damped forced Korteweg_de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time[J]. J Differential Equations, 1988, **74**(2): 369—390.
[12] Ghidaglia J M. A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations [J]. J Differential Equations, 1994, **110**(2): 356—359.
[13] 田立新, 徐振源. 弱阻尼 KdV 方程中长期动力学行为研究[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(10): 953—958.
[14] 谷超豪. 孤立子理论及应用[M]. 应用数学丛书. 杭州: 浙江大学出版社, 1990.
[15] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 非线性科学丛书. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.
[16] 田立新, 刘玉荣, 刘曾荣. 窄域上 2D 弱阻尼 KdV 方程的 blow_up 的研究[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(10): 1002—1008.
[17] Balmforth N L, Ierley G R, Worthing R. Pulse dynamics in unstable medium[J]. SIAM J Appl Math, 1997, **57**(1): 205—251.

Local Attractors for the Weakly Damped Forced KdV Equation in Thin 2D Domains

TIAN Li_xin[1], LIU Yu_rong[2], LIU Zeng_rong[3]
(1. Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P R China;
2. Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P R China;
3. Department of Mathematics, Shanghai University, Jiading, Shanghai 201800, P R China)

Abstract: The existence of local attractors in thin 2D domains for the weakly damped forced KdV e-quation, whose principal operator is a non_self adjoint and non_sectorial one is given.

Key words: attractor; weakly damped forced; nonlinear solitary wave equation; thin domains; non_adjoint operator