

文章编号: 1000-0887(2000) 10-0991-11

用拟小波方法数值求解 Burgers 方程^{*}

万德成¹, 韦国伟²

(1 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2 新加坡国立大学 科学计算系, 新加坡 119260)

(戴世强推荐)

摘要: 引进了一种拟小波方法数值求解 Burgers 方程. 空间导数用拟小波数值格式离散, 时间导数用四阶 Runge-Kutta 方法离散. 计算的雷诺数变化从 10 到无穷大. 拟小波数值方法能很好描述函数的局部快速变化特性. 这一点通过对 Burgers 方程的数值求解以及与其相应解析解的比较中得到证实.

关键词: 拟小波; Runge-Kutta 方法; Burgers 方程
中图分类号: O351.2 文献标识码: A

引 言

小波的概念首先是由地球物理学家 Morlet 提出的^[1]. 小波函数是一个有良好局域特性的有限能量函数, 它可以通过伸缩和平移技术来设计和构造. 小波方法能够很好地分析函数在局域处的变化特性, 因此它非常适用于有局域变化解的非线性偏微分方程的数值求解. 在过去几年, 小波方法已在科学和工程许多领域得到成功应用^[1~8].

本文将基于小波方法构造一个拟小波数值方法, 使拟小波具有更良好的局域特性. 我们知道, 正交规范化小波(orthonormal wavelets) 是最重要的小波之一. Haar 小波^[9] 就是正交规范化小波的一个特殊典型例子. 但由于 Haar 小波是一个不连续函数, 因此它在频域上并没有良好的局域特性. Mallat^[10] 于 1987 年在小波理论中引进了多尺度分析(multiresolution analysis). 根据多尺度分析, 任一小波子空间都可以由一组正交规范化小波基生成, 这组正交规范化小波基可由自身对应的正交规范化尺度函数(orthonormal scaling function) 组合而得到. 但是, 通常的正交规范化尺度函数的傅立叶变换函数是不连续的, 因此正交规范化尺度函数在奥氏坐标空间上没有显示出良好的局域特性. 这对数值计算来说是不利的. 为了改善正交规范化尺度函数的局域化和渐进化特性, Wei 等人^[11] 建议对正交规范化尺度函数进行正则化处理(regularization procedure). 正则化处理的明显好处是正交尺度函数的傅立叶变换函数成为连续的函数, 因而其在奥氏坐标空间上有了良好的局域特性. 然而, 正则化后的正交尺度函数并不是真正的正交规范化尺度函数, 因为它已经不再满足正交规范化小波尺度函数的条件^[12]. 因此, 称正则化后的正交尺度函数为拟尺度函数(quasi_scaling function), 由拟尺度函数生成的小

* 收稿日期: 1999_09_06

作者简介: 万德成(1967—), 男, 福建福清人, 副教授, 博士.

波就相应地称为拟小波(quasi wavelet)• 拟小波比原始小波有更良好的局域特性• 这对数值求解有局部急剧变化的非线性偏微分方程问题来说是非常有用的•

本文的目的就是要用拟小波数值方法求解有急剧变化的 Burgers 方程,以证明拟小波数值方法在求解这类问题时的可靠性和有效性• 我们知道 Burgers 方程很多初边值问题的解都有局部急剧变化的特性,并且它的解析解是现成的,在很多文献中找到• 所以选择 Burgers 方程作为本文方法的验证例子是合适的• 本文主要有以下内容:在第 1 节,主要介绍拟小波数值方法;第 2 节主要讨论两类 Burgers 方程的描述,以及如何用拟小波数值方法和四阶 Runge-Kutta 方法对它们进行离散和数值求解过程;第 3 节则是计算结果和讨论;最后,第 4 节是本文的结论•

1 拟小波数值方法

下面我们将介绍拟小波数值方法• 在引言中,我们已经知道小波指的是一组有有限能量的函数,它们可以通过伸缩和平移来构造生成,即

$$\psi_{ab}(x) = a^{-1/2} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (1)$$

上式中的参数 a 起伸缩作用,参数 b 起平移作用• 利用(1)式的技术,给定一个小参数 a 的值,就可以对函数 $f(x)$ 的局域特性进行分析• 我们还知道利用 Mallat 的多尺度分析^[10],任一小波子空间都可以由一组正交规范化小波基生成,这组正交规范化小波基可由自身对应的正交规范化尺度函数(orthonormal scaling function)组合而得到• 在数学上,可以找到很多正交规范化尺度函数,一个重要正交规范化尺度函数是连续的 Dirichlet delta 序列核(Dirichlet's continuous delta sequence kernels)^[2,3],它由下式给出

$$\phi(x) = \delta_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \cos(xy) dy = \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}. \quad (2)$$

在上式中,当 $\alpha = \pi$,就得到著名的 Shannon 小波尺度函数(Shannon's wavlet scaling function)• 在(2)式中, $\phi(x)$ 满足下面的规范化条件

$$\phi(0) = \int \phi(x) dx = 1, \quad (3)$$

这里 ϕ 表示是 ϕ 的傅立叶变换函数• 正交规范化尺度函数 Dirichlet delta 序列核的一个重要特性是(2)式在 Hilbert 空间可以生成一组正交基• 因此,一个函数 $f(x)$ 可以由下式被唯一重构

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha(x-y))}{\pi(x-y)} f(y) dy, \quad \forall f \in B_\alpha^2, \quad (4)$$

这里 $\forall f \in B_\alpha^2$ 指的是任一函数 $f \in L^2$,它对应的傅立叶函数在区间 $[-\alpha, \alpha]$ 之外为 0• B_α^2 表示是在 Hilbert 空间的 Paley-Wiener 重构核• Paley-Wiener 重构核是 Hilbert 空间 $L^2(R)$ 的一个子空间• 必须指出的是不是每一个 Hilbert 空间都有重构核空间• 在 Paley-Wiener 重构核中,有一个非常有用的样本尺度函数(sampling scaling function),即

$$\delta_{\alpha,k} = \delta_\alpha(x-x_k) = \frac{\sin(\alpha(x-x_k))}{\pi(x-x_k)}. \quad (5)$$

利用(4)式和(5)式,任意一个属于 B_α^2 空间的函数 $f(x)$ 都可以表示成下面的离散形式

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(x-x_k) f(x_k), \quad (6)$$

这里 $\{x_k\}$ 是定义在无穷区间 $(-\infty, \infty)$ 的一组离散空间点的坐标•

为了(6)式能够计算,必须确定 α 的值.有很多方法可以选取 α 的值^[13].由于均匀的离散网格只有唯一一个积分核,比非均匀的离散网格的情况要简单和方便,因此取 $\alpha = \pi/\Delta$ (Δ 是单元网格大小),也称它为 Nyquist 频率.这样,由(5)式和(6)式,就可以得到下面函数 $f(x)$ 的样本表达式

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k) \frac{\sin(\pi(x-x_k)/\Delta)}{\pi(x-x_k)/\Delta}. \quad (7)$$

由于 Nyquist 频率 $\alpha = \pi/\Delta$ 与高频量直接相关,所以对于函数 $f(x)$ 中含有高频量或急剧变化量,单元网格大小 Δ 必须取足够小的值来满足问题的需要.(7)式的重要意义在于它可以把一个有限带宽的函数 $f(x)$ 表示成一系列样本点值 $\{f(x_k)\}$ 的组合.

正交规范化尺度函数 $\delta_\alpha(x)$ 的傅立叶变换函数是特征函数 $\delta_\alpha(\omega) = \chi_{[-\alpha, \alpha]}$,它是一个不连续函数.因此 $\delta_\alpha(x)$ 和 $\delta_{\alpha, k}(x)$ 在坐标空间上没有明显的局域特性.为了改善 $\delta_\alpha(x)$ 和 $\delta_{\alpha, k}(x)$ 的局域化和渐近化特性,在文献[11]中,Wei等人建议对它们进行正则化处理(regularization procedure).即引进一个正则因子 $R_\sigma(x)$ 对 $\delta_\alpha(\omega)$ 做正则化运算.正则化后的尺度函数定义如下

$$\delta_{\alpha, \sigma}(x) = \delta_\alpha(x) R_\sigma(x). \quad (8)$$

正则化处理后的 $\delta_{\alpha, \sigma}(\omega)$ 是连续函数,因而 $\delta_{\alpha, \sigma}(x)$ 在奥氏坐标空间上有良好的局域特性.正则因子 $R_\sigma(x)$ (有时称为权函数或过滤因子)必须满足下面的两个条件

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} R_\sigma(x) = 1, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(x) R_\sigma(x) dx = R_\sigma(0) = 1. \quad (10)$$

一个重要和广泛采用的正则因子是 Gauss 函数^[12],即

$$R_\sigma(x) = \exp\left[-x^2/2\sigma^2\right], \quad \sigma > 0, \quad (11)$$

这里 σ 是宽度参数(或称为窗口大小参数).在实际应用中表明,如果取 $\sigma = r\Delta$ (r 是任意参数,在计算中它可以在2.2到4.0范围内取值),计算效果较好.很容易证明,(11)中的 Gauss 正则因子满足(9)式和(10)式的要求.由(5)式、(8)式和(11)式,并注意到采用 Nyquist 频率,就可以得到 Gauss 正则化样本尺度函数,即

$$\delta_{\Delta, \sigma}(x) = \frac{\sin(\pi x/\Delta)}{\pi x/\Delta} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (12)$$

但是, Gauss 正则化样本尺度函数不再是精确的正交规范化小波尺度函数,因为它不满足正交规范化小波尺度函数的条件,即(3)式.这很容易由下面式子得到证明

$$\delta_{\Delta, \sigma}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta, \sigma}(x) dx = \operatorname{erf}\left[\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\Delta}\right] = 1 - \operatorname{erfc}\left[\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\Delta}\right], \quad (13)$$

这里的误差函数定义为

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (14)$$

在(13)式中, erfc 表示余误差函数.对于给定一个网格尺度 Δ 如果 $\sigma > 0$,那么 $\operatorname{erfc}(\pi\sigma/\sqrt{2}\Delta)$ 将永远为正值,除非 $\sigma \rightarrow \infty$,否则 $\delta_{\Delta, \sigma}(0)$ 永远小于1.然而,在实际应用中,我们取 $r = \sigma/\Delta \geq \sqrt{2}/\pi$,余函数 $\operatorname{erfc}(\pi\sigma/\sqrt{2}\Delta)$ 会很快趋近于0.因此,我们把 Gauss 正则化样本尺度函数称为拟尺度函数,由拟尺度函数生成的小波就相应地称为拟小波.

把(12)式代入(6)式,于是(6)式可以写为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta, \sigma}(x - x_k) f(x_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(x - x_k) R_{\sigma}(x - x_k) f(x_k) \quad (15)$$

(15) 式的求和运算定义在无限区间 $(-\infty, \infty)$, 这在实际计算中是做不到的。因此, 为了计算需要, 有必要把计算域定义在有限区间。由于我们已经引进 Gauss 正则因子, 它具有很好的快速衰减特性, 即局域特性。在实际计算中, 只需要在格点 x 附近取 $2W$ ($W \geq 35$) 个计算点 x_k , 就可以达到机器精度。因此, (15) 式可进一步写成

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(x - x_k) f(x_k), \quad (16)$$

上式中的上标 (n) 表示对空间坐标 x 的 n 阶导数, $2W + 1$ 为计算带宽, 它通常远远小于整个计算域的网格点数。在(16)式中, 如果 Δ 和 σ 给定, 在整个计算域中则只有一个核出现, 这对数值计算来说是十分经济和有利的。我们把(16)式称为拟小波数值离散格式。

在应用(16)式, 遇到边界时, 将会出现样本 $f(x_k)$ 落在计算域 $[a, b]$ 外而没有确定值的问题。因此, 有必要采取措施给出位于计算域外的样本 $f(x_k)$ 值。一般来说, 位于计算域外的样本 $f(x_k)$ 值可由对应的边界条件来确定。例如, 如果是 Dirichlet 边界条件, 位于计算域外的样本 $f(x_k)$ 值可等于边界上的已知的边界条件函数值 $f(a)$ 或 $f(b)$; 如果是 Neumann 边界条件, 则位于计算域外的样本 $f(x_k)$ 值可由边界上的导数值 $f'(a)$ 或 $f'(b)$ 确定; 如果是周期边界条件, 位于计算域外的样本 $f(x_k)$ 值可由计算域内的样本值周期映射得到。

综上所述, 一个函数及其各阶导数可以由(12)式和(16)式近似表示, 而且只需 $2W + 1$ 个样本求和, 具有良好的局域特性, 这就为数值计算提供了方便。为了下面计算需要, 这里给出一阶导数 $\delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(x)$ 和二阶导数 $\delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(x)$ 的表达式

$$\delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x / \Delta) \exp(-x^2 / 2\sigma^2)}{x} - \frac{\sin(\pi x / \Delta) \exp(-x^2 / 2\sigma^2)}{\pi x^2 / \Delta} - \\ \frac{\sin(\pi x / \Delta) \exp(-x^2 / 2\sigma^2)}{\pi \sigma^2 / \Delta} & (x \neq 0), \\ 0, & (x = 0); \end{cases} \quad (17)$$

$$\delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Delta} \sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{x^2} - \\ 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2} + 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{\pi x^3}{\Delta}} + \\ \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{\pi \sigma^2 x}{\Delta}} + \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{\pi \sigma^4}{\Delta}}, & (x \neq 0), \\ -\frac{3 + \pi^2 \sigma^2 / \Delta^2}{3\sigma^2}, & (x = 0). \end{cases} \quad (18)$$

2 数学公式和离散式子

为了验证上述拟小波数值方法在求解有局部快速变化的非线性方程的有效性, 下面我

们考虑两个 Burgers 方程的数值求解。第一个是一般 Burgers 方程, 它的解是一个正弦激波解, 其波形不随时间移动, 但波面梯度急剧变化; 第二个是修正 Burgers 方程, 它的解是一个移动激波解, 波面梯度随雷诺数的增加而变成垂直线。

2.1 数学公式

I 一般 Burgers 方程

一般 Burgers 方程由下式给出

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, 2], t \geq 0, \quad (19)$$

这里 $u(x, t)$ 是类似速度的变量, t 是时间, Re 是雷诺数。雷诺数的大小反映了非线性对流项和粘性扩散项对方程解的影响程度, 雷诺数越大, 非线性对流项越为重要, 数值计算越不稳定, 在解梯度变化大的地方容易出现 Gibbs 现象。边界和初始条件为

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u(0, t) = u(2, t) = 0 \quad (20)$$

具有上述边界和初始条件的一般 Burgers 方程可以解析求解, 它的解析解可通过 Cole_Hopf 变换^[15]得到。

II 修正 Burgers 方程

修正 Burgers 方程由下式给出

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v + u) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, 2], t \geq 0, \quad (21)$$

这里 $v = 1.0$ 。边界和初始条件为

$$u(x, 0) = -\tanh(2Re(x - 0.25)); \quad u(0, t) = 1.0, \quad u(2, t) = -1.0 \quad (22)$$

上述问题的解析解为

$$u(x, t) = -\tanh(2Re(x - vt - 0.25)) \quad (23)$$

2.2 离散式子

下面将用拟小波数值离散格式(16)式来离散上述方程的空间导数, 用四阶 Runge_Kutta 方法离散时间导数。由于对一般 Burgers 方程的离散过程和对修正 Burgers 方程的离散过程相同, 因此下面只给出对一般 Burgers 方程的离散式子, 修正 Burgers 方程的离散式子可仿照写出。

把空间 x 坐标均匀等分, 单元网格大小记为 $\Delta x = 2/N$ (N 是化分区间 $[0, 2]$ 所采用的单元网格总数), 网格点坐标记为 $x_i = i \Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), 于是有 $x_i - x_{i+k} = -k \Delta x$ 。在网格点 x_i 的 u 值记为 u_i 。这样, (19) 式就可以被写为

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial t} = 1, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (24)$$

令

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial t}{\partial t} = 1 = f_1, \quad (25)$$

$$\frac{dy_{i+2}}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_{i+2}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (26)$$

并记

$$Y = \{y_j\} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N+2}) = (t, u_0, u_1, \dots, u_N), \quad (j = 1, 2, \dots, N+2), \quad (27)$$

$$F = \{f_j\} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_{N+2}) \quad (j = 1, 2, \dots, N+2) \quad (28)$$

利用(25)式至(28)式, 可把 Burgers 方程统一写成半离散的形式

$$\frac{dY}{dt} = F \text{ 或 } \frac{dy_j}{dt} = f_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N+2) \quad (29)$$

从(25)式, 我们知道 $y_1 = t$ 和 $f_1 = 1$ 。注意到边界条件(20)式, 可以得到 $y_2 = y_{N+2} = 0$ 。

因此, 从(26)式和(27)式, 可得到下列表达式

$$f_j = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} - y_j \frac{\partial y_j}{\partial x}, \quad (j = 2, 3, \dots, N+2), \quad (30)$$

$$y_j = u_{j-2} = u_i, \quad (i = 0, 1, \dots, N; j = 2, 3, \dots, N+2) \quad (31)$$

因此, 我们可以用(29)式代替对原始 Burgers 方程(19)式的求解。对于(29)式中时间导数, 采用四阶 Runge_Kutta 方法离散, 离散式子为

$$y_j^{n+1} = y_j^n + \frac{\Delta t}{6}(K_{j,1} + 2K_{j,2} + 2K_{j,3} + K_{j,4}), \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N+2), \quad (32)$$

这里

$$K_{1,1} = K_{1,2} = K_{1,3} = K_{1,4} = 1, \quad (33)$$

$$K_{j,1} = f_{j,1}^n; K_{j,2} = f_{j,2}^n; K_{j,3} = f_{j,3}^n; K_{j,4} = f_{j,4}^n, \quad (j = 2, 3, \dots, N+2) \quad (34)$$

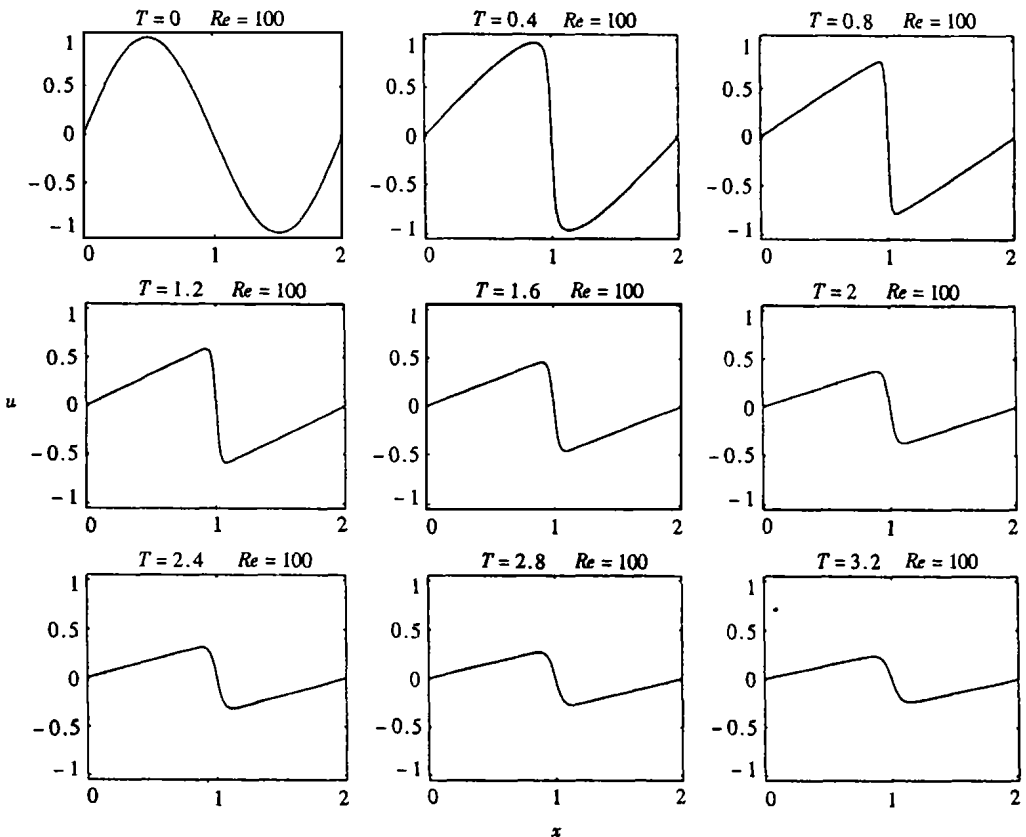


图 1 一般 Burgers 方程数值解时间序列演化过程图 ($Re = 100$)

上面式子中上标 n 表示时间层, Δt 是时间步长。因此有 $t = n\Delta t$ ($n = 0$ 表示 $t = 0$, 即初始时刻)。利用拟小波数值离散格式(34)式, 并注意到(30)式和(31)式, 可以得到下面关于 $f_{j,1}^n$,

$f_{j,2}^n, f_{j,3}^n$ 和 $f_{j,4}^n (j = 2, 3, \dots, N+2)$ 的离散式子

$$K_{j,1} = f_{j,1}^n = \frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) y_{j+k}^n - y_j^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) y_{j+k}^n =$$

$$\frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) u_{j-2+k}^n - u_{j-2}^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) u_{j-2+k}^n, \quad (35)$$

$$K_{j,2} = f_{j,2}^n = \frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) \left[y_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,1} \right] - y_j^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) \left[y_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,1} \right] =$$

$$\frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) \left[u_{j-2+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,1} \right] - u_{j-2}^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) \left[u_{j-2+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,1} \right], \quad (36)$$

$$K_{j,3} = f_{j,3}^n = \frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) \left[y_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,2} \right] - y_j^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) \left[y_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,2} \right] =$$

$$\frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) \left[u_{j-2+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,2} \right] - u_{j-2}^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) \left[u_{j-2+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,2} \right], \quad (37)$$

$$K_{j,4} = f_{j,4}^n = \frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) \left[y_{j+k}^n + \Delta t K_{j+k,3} \right] - y_j^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) \left[y_{j+k}^n + \Delta t K_{j+k,3} \right] =$$

$$\frac{1}{Re} \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k \Delta x) \left[u_{j-2+k}^n + \Delta t K_{j+k,3} \right] - u_{j-2}^n \sum_{k=-W}^W \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k \Delta x) \left[u_{j-2+k}^n + \Delta t K_{j+k,3} \right], \quad (38)$$

这里 $[-W, W]$ 是计算带宽, 在计算中, W 可取大于 35 的任意整数. 这意味着计算只在很小的带宽上进行, 极大减小了数值计算量. 系数 $\delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}$ 和 $\delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}$ 的计算表达式已在 (17) 式和 (18) 式给出. 这些系数计算只与单元网格尺度大小有关, 因此当网格分布确定后, 这些系数可一次性计算出来, 然后把它们保存起来供计算调用, 不需要重复计算.

利用初始条件 (20) 式, 可以得到离散的计算初始 y_j^n 或 $u_i^n (n = 0)$ 的值

$$y_j^0 = u_{j-2}^0 = \sin[\pi(j-2)\Delta x], \quad (j = 2, 3, \dots, N+2). \quad (39)$$

上面的计算过程可概括如下: (a) 利用给定的初值 $y_1^0 = t = 0$ 和 $y_j^0 (j = 2, 3, \dots, N+2)$ 或者上一时层的值 $y_j^n (j = 1, 2, 3, \dots, N+2)$, 计算 (35) 式至 (38) 式的显式表达式, 可得到 $f_{j,1}^n, f_{j,2}^n, f_{j,3}^n$ 及 $f_{j,4}^n$ 的值; (b) 把 (33) 式和 (34) 式代入 (32) 式, 可计算得到在时层 $n+1$ 时 $y_j^{n+1} (j = 1, 2, 3, \dots, N+2)$ 的值; (c) 利用边界条件 (20) 式, 可直接得到 $y_2 = y_{N+2} = 0$, 亦即, $u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0$; (d) 利用 (31) 式, 可替换得到 $u_i^{n+1} = y_{i+2}^{n+1} (i = 1, 2, 3, \dots, N-1)$; (e) 利用刚计算出来的 $y_j^{n+1} (j = 1, 2, 3, \dots, N+2)$ 值和边界条件 $y_2 = y_{N+2} = 0$, 重复上面的过程, 并把计算时间推进到下一新时间层 (即 $t = t + \Delta t, n = n + 1$), 到达所需要的计算时间为止.

3 计算结果和讨论

下面将给出对一般 Burgers 方程和修正 Burgers 方程的计算结果. 本文的计算是在 DEC/Compaq 工作站上进行的.

3.1 一般 Burgers 方程的计算结果

对于一般 Burgers 方程, 我们计算两个雷诺数情况, 即 $Re = 100$ 和 $10\,000$. 在计算中, 取计算带宽 $W = 35$, 正则宽度参数 $\sigma = 3.2\Delta$. 由于本问题是一个周期边界问题, 所以位于计算域

外的 u 值可由计算域内 u 值周期映射得到。对于 $Re = 100$ 的情况, 单元网格数取 $N = 200$, 时间步长 $\Delta t = 0.0004$ 。对于 $Re = 10\,000$ 情况, 则取 $N = 1\,000$, $\Delta t = 0.00002$ 。

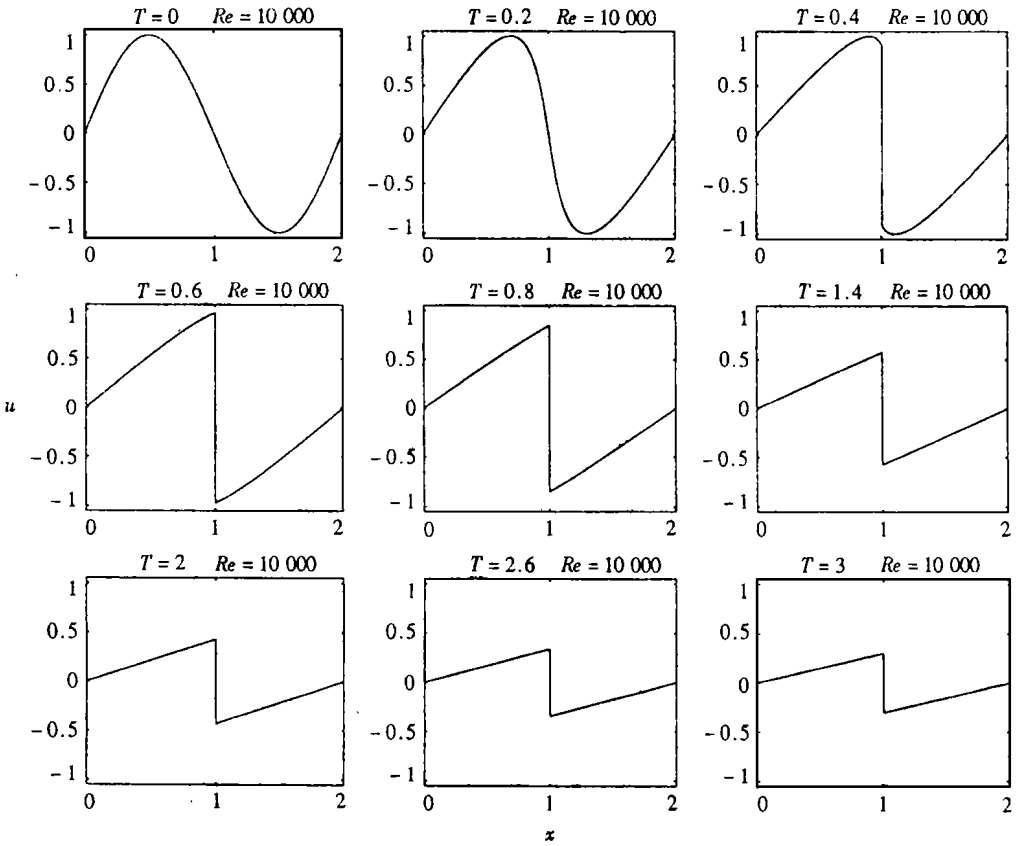


图 2 一般 Burgers 方程数值解时间序列演化过程图 ($Re = 10\,000$)

表 1 一般 Burgers 方程的 L_∞ 误差结果

t	$Re = 100$	$Re = 10\,000$
0.4	2.45×10^{-6}	6.27×10^{-7}
0.8	1.68×10^{-6}	3.04×10^{-7}
2.0	4.19×10^{-7}	1.53×10^{-8}

表 2 修正 Burgers 方程的 L_∞ 误差结果

t	$Re = 100$	$Re = \infty$, 无粘
0.4	7.26×10^{-8}	1.93×10^{-10}
0.8	2.82×10^{-8}	1.10×10^{-10}
1.6	5.42×10^{-9}	3.74×10^{-11}

图 1 给出了雷诺数 $Re = 100$ 时, 一般 Burgers 方程数值计算结果的 9 幅时间序列演化过程图。图 2 则是雷诺数 $Re = 10\,000$ 情况时的计算结果。从这些图可以看到, 一个初始正弦波是如何演化变成锯齿形波。我们可以注意到, 整个波形并不随时间移动, 但波形斜率或梯度则随时间而变化。可以明显观察到, 在 $x = 1.0$ 处, 有一个梯度很大的波面形成。当雷诺数增加时, 这个波面会变成接近一条垂直线, 并有两个明显的转折点与其他波形过渡。在这两个转折点处, 由于解的梯度变换急剧, 在数值计算中很容易出现 Gibbs 现象(波形振荡), 使数值计算结果失真。采用本文方法, Gibbs 现象得到了很好抑制。我们还可以观察到在时间 $t =$

0.6 之前, 波的形状变化非常快, 但在此后, 波的形状几乎保持不变, 而是波幅在随时间衰减. 这些计算结果与 Basdevant 等人^[15]用谱方法的计算结果是一致的. 表 1 给出了本文计算结果与精确解之间最大相对误差的比较结果. 精确解取自文献[14]中由 Cole-Hopf 变换得到的结果, 最大相对误差由(40)式定义. 从表 1, 可以清楚看到本文计算结果与精确解吻合得非常好, 有着很高的精度.

$$L_{\infty} = \max | u_i^{\text{comput}} - u_{i=0}^{\text{exact}} |_{i=0}^N / | u_i^{\text{exact}} | \quad (40)$$

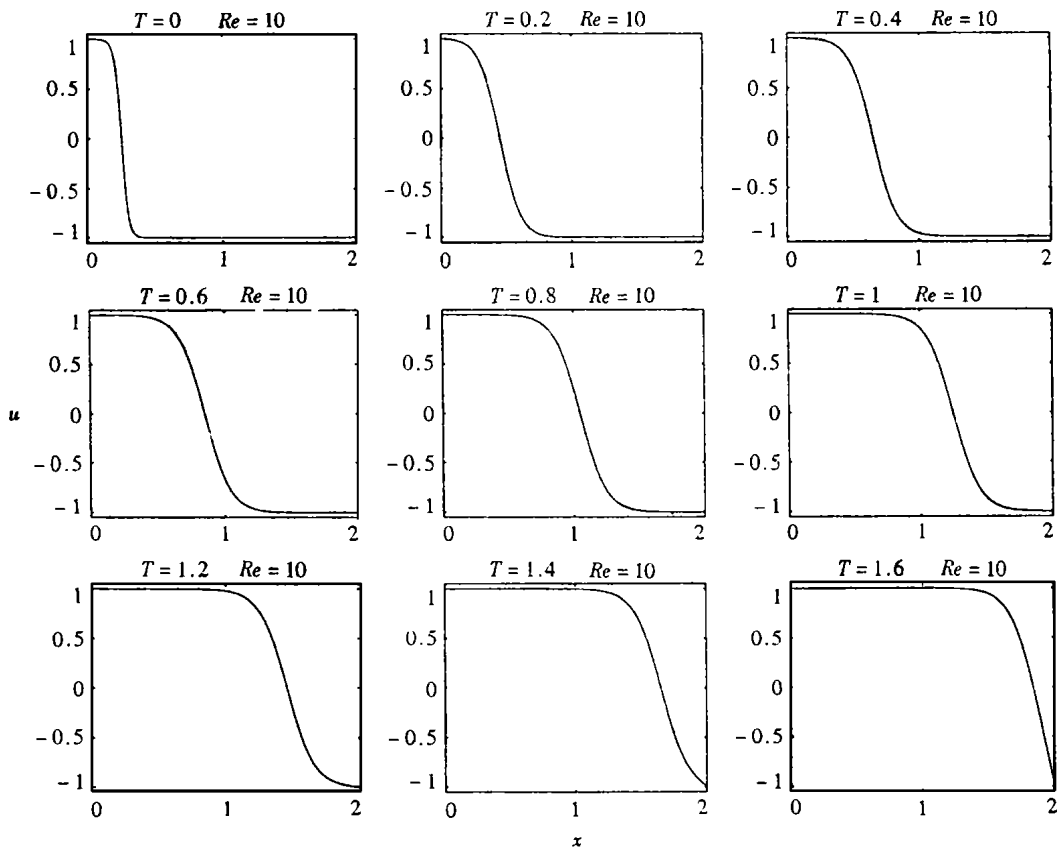


图 3 修正 Burgers 方程数值解时间序列演化过程图 ($Re = 10$)

3.2 修正 Burgers 方程的计算结果

下面我们给出修正 Burgers 方程的数值计算结果. 同样, 我们也计算两种雷诺数情况, 即 $Re = 10$ 和无穷大(无穷大意味着粘性项不存在, 变成无粘问题). 在计算中, 取 $W = 35$, $\sigma = 3.2\Delta$. 由于在远处, 方程的解不受扰动, 所以位于计算域外的 u 值可以等于计算边界端点上的 u 值. 对于 $Re = 10$ 情况, 取 $N = 400$, 时间步长 $\Delta t = 0.0003$; 对于 $Re = \infty$ (无粘问题), 取 $N = 2000$, $\Delta t = 0.00001$.

图 3 给出了雷诺数 $Re = 10$ 时, 修正 Burgers 方程数值计算结果的时间序列演化过程图. 图 4 则是雷诺数 $Re = \infty$ (无粘问题) 情况时的计算结果. 从这些图可以看到, 波的形状随着时间以速度 v 在移动, 波形斜率或梯度随时间变化不大, 波幅也基本保持不变. 特别地, 对于无粘情况, 初始的垂直线波前形状在演化过程中保持不变, 在梯度变换急剧的两个转折点处的 Gibbs 现象得到了很好抑制, 保证了数值解的正确. 本文这些计算结果与 Vasilyev 等人用多层

次小波配置方法^[6]的计算结果一致。表2给出了由(40)式定义的 L_∞ 误差结果,其中精确解由(23)式得到。可以看到,本文的计算结果有很高的精度。

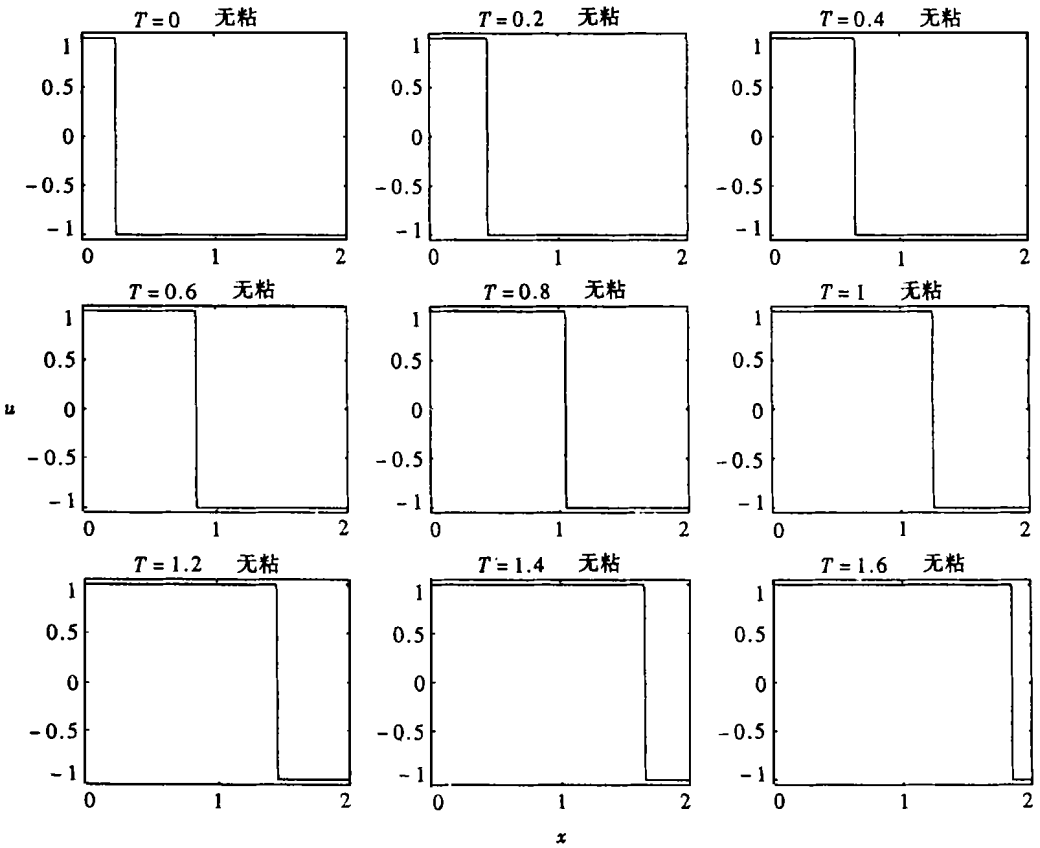


图4 修正 Burgers 方程数值解时间序列演化过程图 ($Re = \infty$, 无粘)

4 结 论

本文用拟小波数值方法对非线性偏微分 Burgers 方程进行了数值求解。在求解过程中,拟小波数值离散格式用于空间导数的离散,四阶 Runge_Kutta 方法用于时间导数的离散。用这些离散格式分别对一般 Burgers 方程和修正 Burgers 方程进行了数值离散求解。通过与精确解比较,表明本文计算结果有着很高精度。对有梯度急剧变化和局部解快速变化的 Burgers 方程,本文方法的数值求解效果是十分明显和令人满意的。显示了本文方法在数值求解有局部急剧变化的非线性偏微分方程问题的巨大潜力。

[参 考 文 献]

- [1] Morlet J, Arens G, Fougereau E, et al. Wave propagation and sampling theory and complex waves [J]. Geophysics, 1982, 47(2): 222—236.
- [2] Chui C K. An Introduction to Wavelets [M]. San Diego: Academic Press, 1992.
- [3] Wickerhauser M V. Adapted Wavelet Analysis From Theory to Software [M]. Wellesley, MA: A K Peters, 1994.
- [4] Cohen A, Ryan R D. Wavelets and Multiscales Signal Processing [M]. London: Chapman & Hall,

- 1995.
- [5] Qian S, Weiss J. Wavelet and the numerical solution of partial differential equations[J]. J Comput Phys, 1993, **106**(1): 155—175.
- [6] Vasilyev O V, Paolucci S. A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in finite domain[J]. J Comput Phys, 1996, **125**(2): 498—512.
- [7] 王诚. 低雷诺数下 N_S 方程的积分方程解法——Gaussian 小波分析的应用[D]. 博士论文. 上海: 上海交通大学, 1997.
- [8] Prosser R, Cant R S. On the use of wavelets in computational combustion[J]. J Comput Phys, 1998, **147**(2): 337—361.
- [9] Haar A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme[J]. Math Annal, 1910, **69**(3): 331—371.
- [10] Mallat S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1989, **315**(1): 68—87.
- [11] Wei G W, Zhang D S, Kouri D J. Lagrange distributed approximating functionals[J]. Phys Rev Lett, 1997, **79**(5): 775—779.
- [12] Wei G W, Quasi wavelets and quasi interpolating wavelets[J]. Chem Phys Lett, 1998, **296**(3_4): 215—222.
- [13] Wei G W. Discrete singular convolution for the Fokker-Planck equation[J]. J Chem Phys, 1999, **110**(18): 8930—8942.
- [14] Cole J D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics[J]. Quart Appl Math, 1951, **9**(2): 225—236.
- [15] Basdevant C, Deville M, Haldenwang P, et al. Spectral and finite difference solutions of the Burgers equation[J]. Comput & Fluids, 1986, **14**(1): 23.

The Study of Quasi-Wavelets Based Numerical Method Applied to Burgers' Equations

WAN De_cheng¹, WEI Guo_wei²

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

2. Department of Computational Science, National University of Singapore, Singapore 119260)

Abstract: A quasi-wavelet based numerical method was introduced for solving the evolution of the solutions of nonlinear partial differential Burgers' equations. The quasi wavelet based numerical method was used to discrete the spatial derivatives, while the fourth_order Runge-Kutta method was adopted to deal with the temporal discretization. The calculations were conducted at a variety of Reynolds numbers ranging from 10 to unlimited large. The comparisons of present results with analytical solutions show that the quasi wavelet based numerical method has distinctive local property, and is efficient and robust for numerically solving Burgers' equations.

Key words: quasi-wavelets; Runge-Kutta method; Burgers' equations