应用数学和力学,第 21 卷 第 11 期(2000 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1172_07

一种计算 Hopf 分歧点的新方法*

叶瑞松

(汕头大学 数学研究所,广东 汕头, 515063)

(刘曾荣推荐)

摘要: 构造一种新的方法计算 Hopf 分歧点。 这种方法构造了小扩张系统,从而减少了计算量并节约了内存。 数值例子的计算说明了方法的有效性。

关 键 词: Hopf 分歧点; 扩张系统
中国分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

考虑下面的非线性方程

$$f(x,\lambda)=0,\quad f: X\times \mathbf{R}\to X, \tag{1}$$

其中 $X=\mathbf{R}^n$, λ 是实参数, $f\in C^r(r\geqslant 2)$。 原始问题可能是微分方程系统, 但我们假设已经对微分方程作了适当的离散, 从而使问题化为有限维空间 R^n 中的形式(1)。

方程(1)的解经常是进一步了解下边的发展型方程的基础。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+f(x,\lambda)=0。 \tag{2}$$

特别, (1) 的奇异点(即 Fr chet 导数 f_x 有零特征值的(1) 的解) 和 Hopf 分歧点(即 f_x 有一对纯虚数特征值(1) 的解) 使得系统(2) 可能失去线性稳定(参考文献[1])。

对于 Hopf 分歧的数值计算, 有很多文献作了研究[2~5], 但是其中的方法大多数需要耗费较大的计算量。 本文将提供一种直接方法用以计算 Hopf 分歧点。 该方法可以认为是首先由 Griewank 和 Reddien[6] 提出的一种直接方法在计算 Hopf 分歧点的推广和应用。 我们构造了一由(1) 和 2 个标量方程组成的扩张系统。 该扩张系统有 $n+2$ 个方程, $n+2$ 个未知数, 可用牛顿方法求解。 同文献[3] 中的 $2n+2$ 方程组成的扩张系统相比较, 本文的方法将明显地减少计算量和计算占用的内存。

1 Hopf 分歧点

设 $(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda)$ 为(1) 单参数定常解族, 为计算从 $(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda)$ 产生的 Hopf 分歧, 我们引进单参数实矩阵族 $\boldsymbol{A}(\lambda)=f_x(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda)$。 则 Hopf 分歧的数值计算问题便化为确定 λ 使得 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 有纯虚数的特征值。 特别, 对于给定 λ_0, w_0, 如果存在定义于 λ_0 的领域中的充分光滑的函数

* 收稿日期: 1999_02_01; 修订日期: 2000_05_26
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(974006)
作者简介: 叶瑞松(1968—), 男, 福建诏安县人, 副教授, 博士.

$\eta(\lambda), w(\lambda)$, 满足下面的Hopf条件H1～H4, 则我们称$(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0, w_0) \in X \times \mathbf{R}^2$为$f(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$的Hopf分歧点•

H1　$\mu(\lambda) = \eta(\lambda) + \mathrm{i}w(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的特征值•

H2　$\eta(\lambda_0) = 0, w(\lambda_0) = w_0 > 0$•

H3　$\eta'(\lambda_0) \neq 0$•

H4　$\mathrm{i}w(\lambda_0)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda_0)$ 的简单特征值, $\boldsymbol{A}(\lambda^0)$ 没有形如 $k\mathrm{i}w^0$, $k \neq 1$ 的特征值•

令 $\phi_0 = \phi_1^0 + \mathrm{i}\phi_2^0$ 是$f(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 在Hopf分歧点$(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0, w_0)$的导数$f_x^0$简单特征值$\lambda_1 = \mathrm{i}w_0$所对应的特征向量• 由于$w_0 \neq 0$, 从而可知 ϕ_1^0, ϕ_2^0 线性无关• 算子$(f_x^0)^2$有二重实特征值$-w_0^2 \neq 0$, 其特征向量由 ϕ_1^0, ϕ_2^0张成• 众所周知, Hopf分歧点在分歧理论中起着及其重要的作用, 它标志着从定常解曲线中诞生出周期解, 成为联系定常解和非定常解的桥梁• 为了计算Hopf分歧点, Roose和Hlavacek[3] 构造了下边的扩张系统:

$$F(\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \lambda, w) := \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ ((f_x(\boldsymbol{x}, \lambda))^2 + w^2\boldsymbol{I})\boldsymbol{p} \\ \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle - 1 \\ \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \rangle \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 是一个在 ϕ_1^0, ϕ_2^0 张成的空间没有零投影的常向量• 则存在唯一的一个向量 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathrm{span}\left\{\phi_1^0, \phi_2^0\right\}$使得$\boldsymbol{y}_0 = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0, \lambda_0, w_0)$ 是 $F(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ 的孤立解(参考文献[3])•

显然(3)是一个带$2n + 2$个方程的扩张系统• 当 n 较大时, 在数值计算上将花费较多的计算量和占用较大内存• 我们在下一节将构造小扩张系统替代(3)•

2　数 值 方 法

由于 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathrm{Ker}([(f_x^0)^2 + w_0^2\boldsymbol{I}])$, 则存在常数 d_1, d_2 使得

$$\boldsymbol{p}_0 = d_1\phi_1^0 + d_2\phi_2^0 \text{•} \tag{4}$$

记 $[f_x^0 - \mathrm{i}w_0\boldsymbol{I}]^*$ 为算子 $[f_x^0 - \mathrm{i}w_0\boldsymbol{I}]$ 的共轭算子, 则 $\mathrm{Ker}([f_x^0 - \mathrm{i}w_0\boldsymbol{I}]^*) = \mathrm{span}\left\{\psi_0 = \psi_1^0 + \mathrm{i}\psi_2^0\right\}$, 其中 ψ_0 满足

$$\langle \psi_0, \phi_0 \rangle = 2,$$

$$\langle \psi_1^0, \phi_1^0 \rangle = 1, \quad \langle \psi_2^0, \phi_2^0 \rangle = 1,$$

$$\langle \psi_1^0, \phi_2^0 \rangle = 0, \quad \langle \psi_2^0, \phi_1^0 \rangle = 0\text{•}$$

显然有

$$\mathrm{Ker}([(f_x^0)^2 + w_0^2\boldsymbol{I}]) = \mathrm{span}\left\{\phi_1^0, \phi_2^0\right\}, \mathrm{Ker}([(f_x^0)^2 + w_0^2\boldsymbol{I}]^*) = \mathrm{span}\left\{\psi_1^0, \psi_2^0\right\}\text{•}$$

定义

$$\psi_3^0 = \frac{1}{d_1^2 + d_2^2}(d_1\psi_1^0 + d_2\psi_2^0), \quad \psi_4^0 = \frac{1}{d_1^2 + d_2^2}(d_2\psi_1^0 - d_1\psi_2^0), \tag{5}$$

则

$$\langle \psi_3^0, \boldsymbol{p}_0 \rangle = 1, \quad \langle \psi_4^0, \boldsymbol{p}_0 \rangle = 0\text{•} \tag{6}$$

记 $k = w^2$, $k_0 = w_0^2$ 及

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} f_x^2 + k\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $[f_x^2(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0)+k_0\boldsymbol{I}]$ 有二重零特征值, 我们可选取 $\boldsymbol{B}=(b_1, b_2)$, $\boldsymbol{C}=(c_1, c_2)\in\mathbf{R}^{n\times 2}$ 使得

$$(f_x^2(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0)+k_0\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B})$$

及

$$\begin{pmatrix} f_x^2(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0)+k_0\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

的秩均为 n• 则可以得到如下引理•

引理 1 下面的系统均是唯一可解:

$$\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} & k_1 & g_1 \\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}} & k_2 & g_2 \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i\in\mathbf{R}^n$, $k_i g_i\in R(i=1, 2)$ 均是 $(\boldsymbol{x}, \lambda, k)$ 的函数• 并且对于 g_1, g_2, 我们有下面的结论:

i) $g_i=-\langle\boldsymbol{u}_i, (f_x^2+k\boldsymbol{I})v\rangle$,

ii) $g_i'=-\langle\boldsymbol{u}_i, f_x^{2\prime}\boldsymbol{v}\rangle$, $\dfrac{\partial g_i}{\partial k}=-\langle\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}\rangle$ $\quad(i=1, 2)$•

其中符号“′”表示关于 $\boldsymbol{x}$ 或 λ 求导•

证明 由于 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 的选取, 使得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0, k_0)$, 从而也在 $(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0, k_0)$ 的邻域内非奇异• 由(7) 可得

$$(f_x^2+k\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{b}_1 g_1+\boldsymbol{b}_2 g_2=0, \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}v=0, \quad \boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}v=1• \tag{9b}$$

由(8) 可得

$$\langle\boldsymbol{u}_1, (f_x^2+k\boldsymbol{I})\rangle+k_1\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}+g_1\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}=0, \quad \langle\boldsymbol{u}_2, (f_x^2+k\boldsymbol{I})\rangle+k_2\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}+g_2\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}=0, \tag{10a}$$

$$\langle\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{b}_1\rangle=1, \quad \langle\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{b}_2\rangle=0, \quad \langle\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle=0, \quad \langle\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{b}_2\rangle=1• \tag{10b}$$

用 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 分别乘以(9a), 并根据(10b) 得到 i)• 下面证明 ii), 对(7) 求导, 并用(8) 的左边的矩阵左乘, 得到

$$\frac{\partial g_i}{\partial k}=-\langle\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}\rangle,$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}=-\langle\boldsymbol{u}_i, (f_x^2)_x\boldsymbol{v}\rangle,$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial\lambda}=-\langle\boldsymbol{u}_i, (f_x^2)_\lambda\boldsymbol{v}\rangle•$$

引理证明完毕•

我们使用下面的扩张系统, 用以计算 Hopf 分歧点, 该扩张系统 $X\times R^2$ 映射到 $X\times R^2$•

$$G(\boldsymbol{y})=G(\boldsymbol{x}, \lambda, k):=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ -g_1(\boldsymbol{x}, \lambda, k) \\ -g_2(\boldsymbol{x}, \lambda, k) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ \langle\boldsymbol{u}_1, [(f_x^2(\boldsymbol{x}, \lambda))^2+k\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}\rangle \\ \langle\boldsymbol{u}_2, [(f_x^2(\boldsymbol{x}, \lambda))^2+k\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}\rangle \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}_i(i=1, 2)$ 是由引理 1 所得, 且

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0,k_0)=\psi_1^0,\ \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0,k_0)=\psi_2^0,\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0,k_0)=\boldsymbol{p}_0.$$

定理 2　假设 $(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0,k_0)$ 是 $f(\boldsymbol{x},\lambda)=0$ 的 Hopf 分歧点. $G(\boldsymbol{y})$ 如(11) 所定义. 则 $\boldsymbol{y}_0=(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0,k_0)$ 是 $G(\boldsymbol{x},\lambda,k)=0$ 的一个孤立点.

证明　只须证明下面的线性系统只有零解:

$$D_yG(\boldsymbol{y}_0)\theta=\boldsymbol{0},\quad \theta=(\boldsymbol{x},\lambda,k)\in X\times\mathbf{R}^2. \tag{12}$$

展开(12) 可得

$$\begin{pmatrix} f_x^0 & f_\lambda^0 & 0\\ \langle\psi_1^0, f_x^0f_{xx}^0\boldsymbol{p}_0+f_{xx}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0\rangle & \langle\psi_1^0, f_x^0f_{x\lambda}^0\boldsymbol{p}_0+f_{x\lambda}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0\rangle & \langle\psi_1^0,\boldsymbol{p}_0\rangle\\ \langle\psi_2^0, f_x^0f_{xx}^0\boldsymbol{p}_0+f_{xx}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0\rangle & \langle\psi_2^0, f_x^0f_{x\lambda}^0\boldsymbol{p}_0+f_{x\lambda}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0\rangle & \langle\psi_2^0,\boldsymbol{p}_0\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda\\ k\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{13}$$

因为 f_x^0 非奇, 由(13) 的第一个方程

$$f_x^0\boldsymbol{x}+\lambda f_\lambda^0=0$$

知

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{v}_0,$$

其中 $\boldsymbol{v}_0$ 满足

$$f_x^0\boldsymbol{v}_0+f_\lambda^0=\boldsymbol{0}. \tag{14}$$

将 $(d_1^2+d_2^2)^{-1}d_1$ 和(13) 的第 2 式的乘积与 $(d_1^2+d_2^2)^{-1}d_2$ 和(13) 的第 3 式的乘积相加, 可得

$$\langle\psi_3^0,(f_x^0f_{xx}^0\boldsymbol{p}_0+f_{xx}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{x}\rangle+\lambda\langle\psi_3^0,f_x^0f_{x\lambda}^0\boldsymbol{p}_0+f_{x\lambda}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0\rangle+k\langle\psi_3^0,\boldsymbol{p}_0\rangle=0, \tag{15}$$

将 $(d_1^2+d_2^2)^{-1}d_2$ 和(13) 的第 2 式的乘积与 $-(d_1^2+d_2^2)^{-1}d_1$ 和(13) 的第 3 式的乘积相加, 可得

$$\langle\psi_4^0,(f_x^0f_{xx}^0\boldsymbol{p}_0+f_{xx}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{x}\rangle+\lambda\langle\psi_4^0,f_x^0f_{x\lambda}^0\boldsymbol{p}_0+f_{x\lambda}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0\rangle+k\langle\psi_4^0,\boldsymbol{p}_0\rangle=0. \tag{16}$$

将 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{v}_0$ 代入(16), 并根据(6), 可将(16) 化为

$$\lambda\langle\psi_4^0,((f_x^0f_{xx}^0\boldsymbol{p}_0+f_{xx}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{v}_0+f_x^0f_{x\lambda}^0\boldsymbol{p}_0+f_{x\lambda}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0)\rangle=0. \tag{17}$$

由下面的引理 3 的结论知道(17) 化为

$$\lambda\cdot 2\eta'(\lambda_0)w_0=0. \tag{18}$$

由条件 H2, H3, 知(18) 有唯一解 $\lambda=0$. 从而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由(15), 得 $k\langle\psi_3^0,\boldsymbol{p}_0\rangle=0$, 由(6) 可知 $k=0$. 定理证明完毕.

引理 3　如果 (x_0,λ_0,k_0) 是 $f(\boldsymbol{x},\lambda)=0$ 的 Hopf 分歧点, 满足条件 H_1-H_4, 则

$$\langle\psi_4^0,((f_x^0f_{xx}^0\boldsymbol{p}_0+f_{xx}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{v}_0+f_x^0f_{x\lambda}^0\boldsymbol{p}_0+f_{x\lambda}^0f_x^0\boldsymbol{p}_0)\rangle=2\eta'(\lambda_0)w_0. \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{p}_0$, ψ_4^0 和 $\boldsymbol{v}_0$ 分别由(4), (5) 和(14) 所定义.

证明　我们首先推导关于 $\eta'(\lambda_0)$ 的表达式. 从假设可知 $f_x(x,\lambda)$ 在 $\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$ 存在特征向量 $\phi(\lambda)$, 满足

$$f_x(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda)\phi(\lambda)-\mu(\lambda)\phi(\lambda)=0, \tag{20a}$$

$$\phi(\lambda_0)=\phi_0=\phi_1^0+\mathrm{i}\phi_2^0. \tag{20b}$$

对(20a) 在 $\lambda=\lambda_0$ 求导, 得到

$$f_{x\lambda}^0\phi_0+f_{xx}^0\phi_0\boldsymbol{x}'(\lambda_0)-\mu'(\lambda_0)\phi_0+(f_x^0-\mathrm{i}w_0\boldsymbol{I})\phi'(\lambda_0)=\boldsymbol{0}. \tag{21}$$

由 $f(\boldsymbol{x}(\lambda),\lambda)=\boldsymbol{0}$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的导数, 得到

$$\boldsymbol{x}'(\lambda_0)=\boldsymbol{v}_0, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{v}_0$ 如(14) 所定义. 利用定义 $\psi_0=\psi_1^0+\mathrm{i}\psi_2^0$, 用 ψ_0 乘以(21), 可得

$$\langle \psi_0, f_{x\lambda}^0 \phi_0 + f_{xx}^0 \phi_0 \boldsymbol{v}_0 \rangle - 2\mu'(\lambda_0) = 0 \tag{23}$$

取(23)的实部, 可得

$$\eta'(\lambda_0) = \frac{1}{2}\langle \psi_1^0, f_{x\lambda}^0 \phi_1^0 + f_{xx}^0 \phi_1^0 \boldsymbol{v}_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle \psi_2^0, f_{x\lambda}^0 \phi_2^0 + f_{xx}^0 \phi_2^0 \boldsymbol{v}_0 \rangle \tag{24}$$

定义

$$\boldsymbol{Q} = f_{x\lambda}^0 + f_{xx}^0 \boldsymbol{v}_0, \tag{25}$$

我们将(19)的左边改写为

$$\langle \psi_4^0, (f_x^0 \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q} f_x^0) \boldsymbol{p}_0 \rangle,$$

将 $\boldsymbol{p}_0$, ψ_4^0 代入上式

$$\frac{1}{d_1^2 + d_2^2}\langle d_2 \psi_1^0 - d_1 \psi_2^0, (f_x^0 \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q} f_x^0)(d_1 \phi_1^0 + d_2 \phi_2^0) \rangle \tag{26}$$

进一步写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1^2 + d_2^2}\Big\{ & d_1 d_2 \langle f_x^{0*} \psi_1^0, \boldsymbol{Q}\phi_1^0 \rangle + d_1 d_2 \langle \psi_1^0, \boldsymbol{Q} f_x^2 \phi_1^0 \rangle + \\ & d_2^2 \langle f_x^{0*} \psi_1^0, \boldsymbol{Q}\phi_2^0 \rangle + d_2^2 \langle \psi_1^0, \boldsymbol{Q} f_x^0 \phi_2^0 \rangle - \\ & d_1^2 \langle f_x^{0*} \psi_2^0, \boldsymbol{Q}\phi_1^0 \rangle - d_1^2 \langle \psi_2^0, \boldsymbol{Q} f_x^0 \phi_1^0 \rangle - \\ & d_1 d_2 \langle f_x^{0*} \psi_2^0, \boldsymbol{Q}\phi_2^0 \rangle - d_1 d_2 \langle \psi_2^0, \boldsymbol{Q} f_x^0 \phi_2^0 \rangle \Big\} \end{aligned} \tag{27}$$

取 $(f_x^0 - \mathrm{i}w_0)\phi_0 = 0$ 和 $(f_x^0 - \mathrm{i}w_0)^* \psi_0 = 0$ 的实部一虚部, 得

$$f_x^0 \phi_1^0 = -w_0 \phi_2^0, \quad f_x^0 \phi_2^0 = w_0 \phi_1^0,$$

$$f_x^{0*} \psi_1^0 = w_0 \psi_2^0, \quad f_x^{0*} \phi_2^0 = -w_0 \psi_1^0$$

根据上面的关系, (27)可以简化为

$$w_0(\langle \psi_1^0, \boldsymbol{Q}\phi_1^0 \rangle + \langle \psi_2^0, \boldsymbol{Q}\phi_2^0 \rangle)$$

从(24)和(25)可推得(19)成立, 引理3证明完毕.

下面我们提出计算 Hopf 分歧点的数值过程:

步骤1 适当选取 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 和 $(\boldsymbol{x}, \lambda, k)$ 的初始猜测 $(\boldsymbol{x}^0, \lambda^0, k^0)$. 令 $m = 0, 1, \ldots$, 做以下几步:

步骤2 由线性方程组(7)和(8)解得 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{v}$ 和 $g_i (i = 1, 2)$.

步骤3 求解下面的方程

$$D_y G(\boldsymbol{y}^m) \Delta \boldsymbol{y}^m = -G(\boldsymbol{y}^m) \tag{28}$$

步骤4 令 $\boldsymbol{y}^{m+1} = \boldsymbol{y}^m + \Delta \boldsymbol{y}^m$, 然后返回步骤2至满足给定的精度.

3 数值例子

考虑下面的 Brusselator 反应模型[7]:

$$f(\boldsymbol{u}, \lambda, \alpha) = \begin{cases} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1) + \lambda \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}_1) = 0, \\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2) + \lambda \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}_2) = 0, \end{cases}$$

这里

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in R, \quad \alpha = (\mu, \gamma) \in \mathbf{R}^2,$$

$$\boldsymbol{g}(w_i) = \begin{pmatrix} \gamma - (\mu + 1) x_i + x_i^2 y_i \\ \mu x_i - x_i^2 y_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2 \quad (i = 1, 2),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

令 $\gamma = 2.0$, $\mu = 5.4$, 选取 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{C}_1 = (1.0, 1.0, -1.0, 0.0)^T$, $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{C}_2 = (0.0, -1.0, 0.0, -1.0)^T$, 则用本文的数值方法可求得一个 Hopf 分歧点:

$$\boldsymbol{u}_0 = (1.097\ 617, 2.470\ 784, 2.902\ 383, 2.210\ 778),$$
$$\lambda_0 = 0.881\ 216, \quad k = 3.592\ 937$$

具体的数值过程如表 1, 2 所示:

表 1

迭代次数	x_1	y_1	x_2	y_2	λ	k
0	1.113 087	2.476 603	2.886 913	2.226 218	0.814 214	3.149 029
1	1.095 042	2.469 311	2.904 958	2.208 504	0.883 352	3.598 543
2	1.097 605	2.470 777	2.902 395	2.210 778	0.881 218	3.593 017
3	1.096 617	2.470 784	2.902 383	2.210 788	0.881 216	3.592 937
4	1.097 617	2.470 784	2.902 383	2.210 788	0.881 216	3.592 937

表 2

迭代次数	1	2	3	4
g_1	−1.12E−02	1.03E−02	1.39E−04	2.19E−09
g_2	1.47E−02	−5.06E−02	5.51E−05	−3.01E−10
$\Vert f \Vert_\infty$	1.08E−01	3.15E−03	2.30E−05	2.11E−9

其中 $\Vert f \Vert_\infty$ 代表函数 f 的分量的最大值. 从计算结果可以看出算法是平方收敛的. 为了与扩张系统(3) 所计算的 Hopf 分歧点作比较, 我们用(3) 来计算该分歧点, 其结果如表 3 所示.

表 3

迭代次数	x_1	y_1	x_2	y_2	λ	k
0	1.113 087	2.476 603	2.886 913	2.226 218	0.814 218	3.149 029
1	1.094 958	2.469 274	2.905 042	2.208 435	0.883 445	3.600 688
2	1.097 061	2.470 547	2.902 939	2.210 332	0.881 863	3.596 265
3	1.097 605	2.470 779	2.902 395	2.210 778	0.881 229	3.593 007
4	1.097 617	2.470 784	2.902 383	2.210 788	0.881 216	3.592 937
5	1.097 617	2.470 784	2.902 383	2.210 788	0.881 216	3.592 937

从两个算法的计算结果可以看出, 其收敛阶都是二次的. 所需迭代的次数分别为 4 次和 5 次. 并且本文所用的算法中, 每一步迭代只需求解三个系数矩阵一样的 $n+2$ 阶线性方程组(7) 和(8) 及一个 $n+2$ 阶线性方程组(28), 这在数值计算上将比求解阶数 $2n+2$ 的非线性方程组(3) 的每一步迭代所花的计算量和内存要小得多. 另外该算法还可以求得(3) 所不能求

得的$(f_x^0)^2 + kI$ 的左零特征向量 ψ_1^0, ψ_2^0 •

[参 考 文 献]

[1] Guchenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields[M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

[2] Roose D, De Dier B. Numerical determination of an emanating branch of Hopf bifurcation points in a two_parameter problem[J]. SIAM J Sci Stat Comput, 1989, **10**(4): 671—685.

[3] Roose D, Hlavacek V. A direct method for the computation of Hopf bifurcation points[J]. SIAM J Appl Math, 1985, **45**(6): 879—894.

[4] Spence A, Cliffe K A, Jepson A D. A note on the calculation of paths of Hopf bifurcations[J]. J Comput Appl Math, 1989, **26**(1): 125—131.

[5] Janovsky V, Plehac P. Asymptotic analysis of perturbed Hopf points[J]. J Comput Appl Math, 1991, **36**(2): 349—359.

[6] Griewank A, Reddien G W. Characterization and computation of generalized turning points[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, **21**(1): 186—196.

[7] Rapier P J, Reddien G W. Characterization and computation of singular points with maximum rank deficiency[J]. SIAM J Numer Anal, 1986, **23**(5): 1040—1051.

[8] Keller H B. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue probems[A]. In: P H Rabinowitz, Ed. Applications of Bifurcation Theory[C]. New York: Academic Press, 1977, 359—384.

A New Approach for the Computation of Hopf Bifurcation Points

YE Rui_song
(Institute of Mathematics, Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P R China)

Abstract: A new approach is proposed to compute Hopf bifurcation points. The method could produce small extended systems and therefore could reduce the computational effort and storage. One numerical example is presented to demonstrate that the method is efficient.

Key words: Hopf bifurcation points; extended systems.