

文章编号: 1000-0887(2000) 11-1165\_07

# 大挠度钻柱强度分析的平衡微分方程法<sup>\*</sup>

刘延强

(石油大学(华东) 建工系, 山东 东营 257062)

( 皓江推荐)

摘要: 对小井眼、大曲率井中钻柱强度问题, 以井轴为基准轴, 在对井轴弯挠描述和钻柱微段三维受力变形分析的基础上, 建立大位移钻柱平衡微分方程, 采用 Longe\_Kutta 法解之求内力, 并依此求应力和建立强度条件。对 H767 侧钻水平井施工中钻柱应力计算分析, 结果说明与有限元模型和弹性化软绳模型比较相吻合, 该模型比有限元模型计算简捷方便; 比弹性化软绳模型更完善可信; 该井钻柱破坏事故原因在于井眼曲率过大, 兼有应力集中。

关键词: 侧钻水平井; 大挠度; 钻柱; 应力; 强度; 平衡微分方程

中图分类号: O343.5; TE921.2 文献标识码: A

## 引 言

侧钻水平井施工中, 与一般钻井施工相比较, 由于井眼大曲率引起了钻柱大位移和较大的附加弯挠载荷, 并且钻柱尺寸小, 钻柱更易发生破坏, 造成生产事故, 使钻柱强度问题更加突出。为了了解钻柱应力分布规律, 进行切实的强度计算, 建立了有限单元模型<sup>[1]、[2]</sup>和弹性化软绳模型<sup>[3]</sup>。前者虽较完善, 但是是一个三重非线性迭代计算过程, 计算较繁; 后者虽简单, 但精度稍差。本文根据钻柱实际工况特点, 通过建立大挠度钻柱的平衡微分方程, 求解内力, 建立强度条件, 实现强度计算。

## 1 井轴挠曲状态的描述

### 1.1 井轴的曲率与挠率

实际井轴一般为三维曲线, 建立  $oxyz$  坐标系(图 1) 描述井轴。根据空间几何学, 井轴的曲率与挠率, 用井深  $s$  (自井口的井轴弧长) 为参数表示为

$$k = |R''| = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2 + [z''(s)]^2}, \quad u = (R', R'', R\Theta)/k^2, \quad (1)$$

$R$  为井轴上任意点矢径。钻井工程中, 描述井轴常用的参量为井斜角  $\alpha$  (井轴切向与  $z$  轴夹角) 和方位角  $\phi$  (井轴切向在水平面投影与  $x$  轴夹角), 与坐标间关系为:

$$R' = (x', y', z') = (\sin\alpha\cos\phi, \sin\alpha\sin\phi, \cos\alpha)$$

则井轴的曲率与挠度可表示为

\* 收稿日期: 1999\_03\_12; 修订日期: 2000\_06\_05  
基金项目: “九五” 国家攻关项目(95\_108\_02\_04)  
作者简介: 刘延强(1959—), 男, 山东邹平人, 教授。

$$k = \sqrt{\phi'^2 \sin^2 \alpha + \alpha'^2}, \quad u = \left(1 + \frac{\alpha'^2}{k^2}\right) \phi \cos \alpha + \frac{1}{k^2} (\phi'' \alpha' - \phi' \alpha'') \sin \alpha$$

## 1.2 自然轴系下的有关关系

由于已钻的井眼轨迹可用测井数据通过插值计算确定下来<sup>[4]</sup>, 故在分析钻柱受力时可采用自然轴系  $tnb$ 。三轴单位正向矢量表示为

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}' = (x', y', z'), \quad \mathbf{n} = \mathbf{R}''/k, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

则自然轴系与直角坐标系间的坐标变换关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ \frac{y'z'' - y''z'}{k} & \frac{z'x'' - z''x'}{k} & \frac{x'y'' - x''y'}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

由此, 并考虑  $x''x' + y''y' + z''z' = k\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$  和仅需反映两种坐标微分间关系, 取  $x = y = z = 0$ , 则有

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 1, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0 \quad (2)$$

## 2 大挠度钻柱的平衡微分方程

以井轴为基准, 取钻柱微段, 受力如图 1,  $q$  为分布浮重,  $N$  和  $F$  分别为正反力和摩擦力, 两端受剪力、轴力、扭矩、弯矩 ( $Q_n, Q_b, T, M_b, M_t$ ) 作用。

建立自然轴系  $tnb$ , 设  $c_2$  为工作状态系数, 起钻时取 1, 下钻时取 -1, 旋转时取 0; 轴向摩擦系数为  $f$ , 横向摩擦系数为  $f_1$ 。在该系下建立微段平衡方程, 并考虑  $F = fNc_2$  或  $F = f_1N(1 - |c_2|)$ , 有

$$\begin{aligned} \sum N = & - (Q_n - dQ_n)(\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + Q_n + \\ & fNc_2 ds \left[ \mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2} \right] \cdot \mathbf{n} + q ds \mathbf{n} + N_n ds \times \\ & \left[ \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2} \right] \cdot \mathbf{n} - (Q_b - dQ_b) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \\ & d\mathbf{b}) - f_1(1 - |c_2|) ds \left[ N_b \left[ \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2} \right] \right. \\ & \left. - N_n \left[ \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{b}}{2} \right] \right] \mathbf{n} + N_b c_2 ds \left[ \mathbf{b} - \right. \\ & \left. \frac{d\mathbf{b}}{2} \right] \cdot \mathbf{n} - (T - dT) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} - d\mathbf{t}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum T = & - (Q_n - dQ_n)(\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} + T + fNc_2 ds \left[ \mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2} \right] \cdot \mathbf{t} + q ds \mathbf{t} + \\ & N_n ds \left[ \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2} \right] \cdot \mathbf{t} - (Q_b - dQ_b) \mathbf{t} \cdot (\mathbf{b} - d\mathbf{b}) - f_1(1 - |c_2|) ds \left[ N_b (\mathbf{n} - \right. \\ & \left. \frac{d\mathbf{n}}{2}) - N_n \left[ \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{b}}{2} \right] \right] \cdot \mathbf{t} + N_b ds \left[ \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{b}}{2} \right] \cdot \mathbf{t} - (T - dT) \mathbf{t} \cdot (\mathbf{t} - d\mathbf{t}) = 0, \end{aligned}$$

$$\sum B = - (Q_n - dQ_n)(\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{b} + Q_b +$$

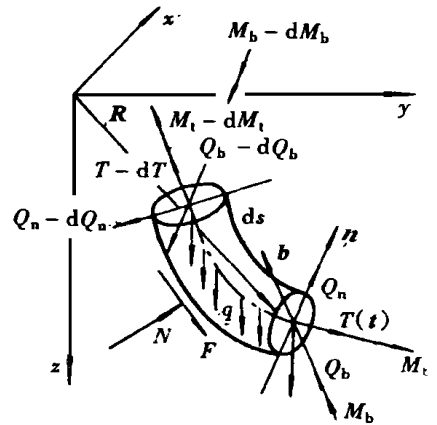


图 1 钻柱微段受力图

$$fNc_2ds \left[ \mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2} \right] \cdot \mathbf{b} + \mathbf{q} ds \mathbf{b} + N_n ds \left[ \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2} \right] \cdot \mathbf{b} -$$

$$(Q_b - dQ_b) \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - d\mathbf{b}) - f_1(1 - |c_2|) ds [N_b(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{n}}{2}) - N_n(\mathbf{b} - \frac{d\mathbf{b}}{2})] \cdot \mathbf{b} +$$

$$N_b ds (\mathbf{b} - \frac{d\mathbf{b}}{2}) \cdot \mathbf{b} - (T - dT) \mathbf{b} \cdot (\mathbf{t} - d\mathbf{t}) = 0,$$

$$\sum M_t = - (Q_n - dQ_n) [(\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{b} dn - (\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} db] +$$

$$fNc_2ds [(\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{b} dn - (\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{n} db] / 2 + \mathbf{q} ds n db / 2 - (T - dT) \cdot$$

$$[(\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b} dn - (\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} db] + N ds [(\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2}) \cdot \mathbf{b} dn - (\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2}) \cdot \mathbf{n} db] / 2 -$$

$$(Q_b - dQ_b) [(\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} dn - (\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} db] + M_t -$$

$$(M_t - dM_t)(\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} - (M_b - dM_b)(\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{t} -$$

$$f_1 N ds (1 - |c_2|) \frac{d_0}{2} (\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

$$\sum M_n = - (Q_n - dQ_n) [(\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} db - (\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{b} dt] +$$

$$fNc_2ds [(\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{t} db - (\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{b} dt] / 2 + \mathbf{q} ds t db / 2 -$$

$$(T - dT) [(\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} db - (\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b} dt] - N ds [(\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2}) \cdot \mathbf{t} db -$$

$$(\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2}) \cdot \mathbf{t} db] / 2 - (Q_b - dQ_b) [(\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{t} db - (\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} dt] -$$

$$(M_t - dM_t)(\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} - (M_b - dM_b)(\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} -$$

$$N f_1 ds (1 - |c_2|) \frac{d_0}{2} (\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$\sum M_b = - (Q_n - dQ_n) [(\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} dt - (\mathbf{n} - d\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} dn] +$$

$$fNc_2 \frac{ds}{2} [(\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{n} dt - (\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{t} dn] +$$

$$\mathbf{q} ds (\mathbf{n} dt - \mathbf{t} dn) - (T - dT) [(\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} dt - (\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} dn] -$$

$$N \frac{ds}{2} [(\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2}) \cdot \mathbf{t} dn - (\mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2}) \cdot \mathbf{n} dt] - (Q_b - dQ_b) \cdot$$

$$[(\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} db - (\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \mathbf{t} dn] + M_b -$$

$$(M_t - dM_t)(\mathbf{t} - d\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b} - (M_b - dM_b)(\mathbf{b} - d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} -$$

$$N f_1 ds (1 - |c_2|) \frac{d_0}{2} (\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{2}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

由雪列·弗莱纳公式和(2)式,略去高阶小量,整理,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_t}{ds} &= N f_1 \frac{d_0}{2} (1 - |c_2|), \quad Q_b = uM_b - kM_t, \quad Q_n = \frac{dM_b}{ds}, \\ \frac{d^2 M_b}{ds^2} + N_n + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - u(uM_b - kM_t) + kT - f_1 N_b (1 - |c_2|) &= 0, \\ \frac{dT}{ds} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} + fNc_2 - k \frac{dM_b}{ds} &= 0, \\ \frac{d}{ds} (uM_b - kM_t) + u \frac{dM_b}{ds} + N_b c_2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} + f_1 N_n (1 - |c_2|) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### 3 钻柱受力与强度条件

根据图 1 和式 (1)、(3), 应有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}'(s) = qz', \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}''(s)/k = qz''/k, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{q} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = q(x'y'' - x''y')/k, \\ N_b &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = N \left[ \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2} \right] \cdot \mathbf{b} = -uNds \approx 0, \\ N_n &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = N \left[ \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{2} \right] \cdot \mathbf{n} = N, \quad M_b = EIk, \quad Q_n = EI \frac{dk}{ds}, \\ k' &= \frac{1}{k}(x''x \ominus + y''y \ominus + z''z \ominus), \\ k'' &= \frac{1}{k^3}[k^2(x \ominus^2 + y \ominus^2 + z \ominus^2) - (kk')^2], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, 若并轴为三次样条函数,  $x^{(4)} = y^{(4)} = z^{(4)} = 0$ . 由式(3)、(4) 有

$$T' = \left\{ q[fc_2(x'y''uk + z''k' - x''y'uk) - z'kk' - k^2uf_1(1 - |c_2|)(1 - kd\phi/2)z'] + EI[k^2k'^2 + k'k^3uf_1(1 - |c_2|)(1 - kd\phi/2) + fc_2(k'u^2k^2 + k''k'k + u'uk^3)] + k^2k'fc_2T \right\} / [k^2uf_1(1 - |c_2|)(1 - kd\phi/2) + kk']$$

由 Longe\_kutta 法解该微分方程求  $T$  值, 然后, 由上式求  $T'$ , 由下式求  $N$ , 进而求  $M_t$ :

$$N = \frac{1}{fc_2}(EIk' - T' - qz'), \quad M_t = \frac{1}{k^2u}[(u^2k - k'')EIk - Nk - qz'' - k^2T] \quad (5)$$

特殊情况下, 有

$$\left. \begin{aligned} N &= q \sqrt{1 - z'^2}, \quad T' = -qz' - fc_2q \sqrt{1 - z'^2}, \\ M_t &= \frac{d_0}{2}f_1(1 - |c_2|)q \sqrt{1 - z'^2} \end{aligned} \right\} \quad (k = 0) \cdot$$

$$\left. \begin{aligned} T' &= EIk' - qz', \quad N = -\frac{1}{k}(EIk''k + qz'' + Tk^2), \\ M_t &= \frac{1}{k'k} \left[ \left( 1 - k \frac{d_0}{2} \right) f_1 Nk + q(x'y'' - x''y') \right], \end{aligned} \right\} \quad (c_2 = 0, u = 0),$$

$$\left. \begin{aligned} T' &= EIk' - qz', \\ N &= -\frac{\left\{ EI[kk'k'' + uk^2(ku' + uk')] \right\} + k^2k'T + q[z''k' + uk(x'y'' - x''y')]}{kk' + k^2uf_1 \left[ 1 - k \frac{d_0}{2} \right]}, \\ M_t &= \frac{1}{k'k} \left[ \left( 1 - k \frac{d_0}{2} \right) f_1 Nk + q(x'y'' - x''y') + EI(k^2u' + 2ukk') \right], \end{aligned} \right\} \quad (c_2 = 0) \cdot$$

$$\left. \begin{aligned} T' &= EI(kk' + k''fc_2) - q(z' - fc_2z''/k) + kfc_2T, \\ N &= -\frac{1}{k}[EIk'' + k^2T + qz''], \\ M_t &= \frac{1}{k'k} \left[ \left( 1 - k \frac{d_0}{2} \right) f_1 Nk(1 - |c_2|) + q(x'y'' - x''y') \right], \end{aligned} \right\} \quad (u = 0),$$

其中,  $k', z', k'', z'', \dots$  分别为曲率和  $z$  坐标  $\dots$  对  $s$  的一、二、 $\dots$  阶导数. 坐标的各阶导数, 可

通过井眼轴线模拟计算获得。然后由之求井轴的曲率与挠率及其各阶导数,再由以上各式等求各点内力。最后,即可求应力和进行强度计算。强度条件为

$$\sqrt{\left[ \frac{32d_0M_b}{\pi(d_0^4 - d_i^4)} + \frac{4|T|}{\pi(d_0^2 - d_i^2)} \right]^2} + 4 \left[ \frac{16d_0M_t}{\pi(d_0^4 - d_i^4)} \right]^2 \leq \sigma_s$$

### 4 算例分析

H767 侧钻水平井窗口井深起于 2 056. 16m, 长 2. 12m。造斜点(直井段与弯曲段衔接点)以下测斜数据如表 1。从 2090. 58m 钻进 2m, 钻压 3t~ 5t, 泥浆密度 1. 19, 泵压突然下降 5MPa~ 15MPa, 意味着钻柱发生破坏。起钻查明, 马达上面接头公口断裂, 下部长 3. 99m 落入井底, 打捞未果造成该井报废。断口处井深  $s$  为 2 088. 59m, 井斜角  $43^\circ$ , 方位角  $132. 2^\circ$ , 造斜率(单位长度的井斜角变化)  $4. 11^\circ/\text{m}$ 。

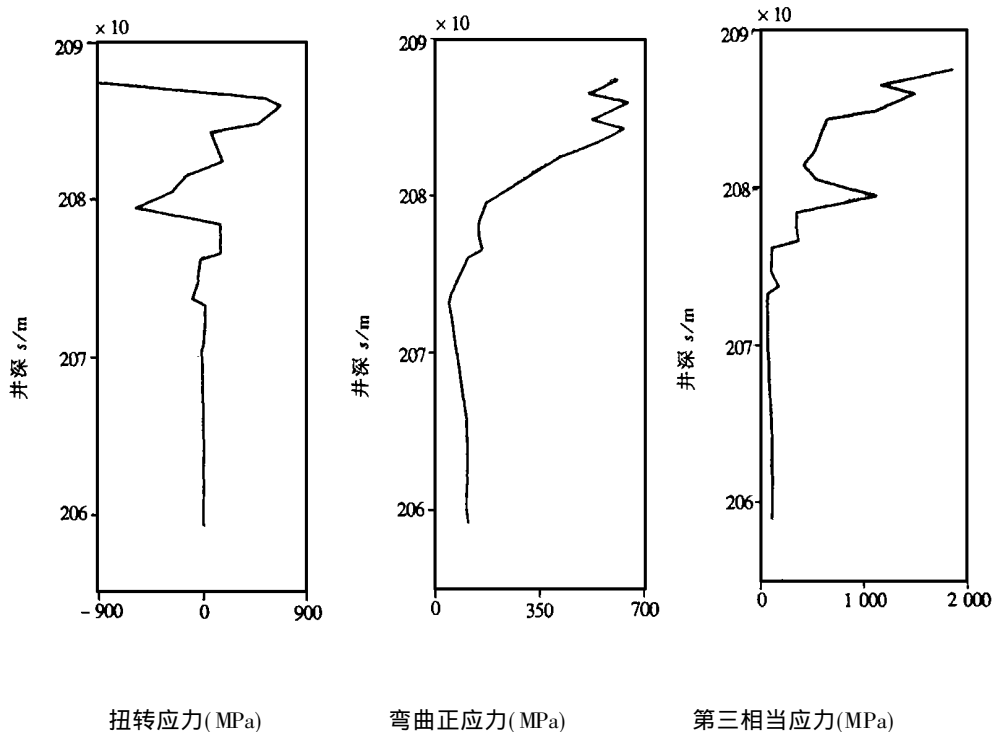


图 2 钻柱沿着井深的应力分布图

取钻柱与井壁摩擦系数为 0. 22, 钻压  $4. 9 \times 10^4 \text{N}$ , 轴力以钻压为初值。钻柱最大弯曲应力 648MPa(有限元计算结果为 655, 弹性化软绳模型结果 643. 3), 此处井深 2 087. 06m; 最大扭转应力 891MPa(有限元计算结果为 889, 弹性化软绳模型结果 895. 7), 最大相当应力 1 851MPa(有限元计算结果为 1 798, 弹性化软绳模型结果 1 893), 此处井深 2 089. 05m; 最大拉伸应力 138MPa(有限元计算结果为 142, 弹性化软绳模型结果 137. 7), 此处是在井口。由整井钻柱各应力分布可知, 窗口以上钻柱以轴向拉压为主, 且应力随井深增加而减小, 比弯曲段工作应力小得多; 弯曲段钻柱则以弯扭为主, 应力值很大, 尤其靠近井底段特别突出; 弯曲段钻柱应力分布参见图 2。从分析结果看, 与有限元法和弹性化软绳模型计算结果吻合。

表 1 河 76\_7 侧钻水平井井眼测斜数据

井深 $s/m$	井斜角 $\alpha/^\circ$	方位角 $\beta/^\circ$	井深 $s/m$	井斜角 $\alpha/^\circ$	方位角 $\beta/^\circ$
2 066.32	8.13		2082.55	20.5	127.2
2 070.46	10.9		2085.55	31.4	124.2
2 073.66	12.1		2088.58	43.0	130.2
2 076.82	13.8		2089.55	46.3	132.2
2 079.55	16.9		2090.58	49.5	132.2

由上, 钻柱在井深 2 087.06m~ 2 089.05m 的区间内, 弯曲应力、扭转应力及第三相当应力皆达到整个钻柱的最高值段: 614MPa~ 648MPa、679MPa~ 891MPa 及 1 512MPa~ 1 851MPa。即使按按较高屈服极限 930.79MPa 的钢级 S135, 相当工作应力也远远超过了强度要求。在该区间内随时随处都可引起破坏, 实际(首先)发生破坏的往往是那些具有尺寸或几何缺陷事突变的地方(容易产生应力集中)。该井钻柱破坏正是发生在该区间内(2 088.59m) 螺丝扣处。在 2 087.06m~ 2 089.05m 的危险区间内, 轴向拉压应力很小, 相当工作应力达到如此高值, 主要是由于井眼曲挠过大所致。所以, 钻柱破坏的主要原因是进眼曲率过大和应力集中存在。

## 5 结 论

从强度分析结果看, 文中模型与有限元法和弹性化软绳模型吻合, 但比有限元模型计算简捷方便; 比弹性化软绳模型更完善(不含软绳成份) 切实, 具有较好的实用性; H76\_7 侧平井钻柱强度破坏主要原因在于断口处井眼井斜与方位变化过大和应力集中存在。

### [参 考 文 献]

- [1] 刘延强, 吕英民. 环空钻柱结构三维非线性分析[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(3): 259—272.
- [2] LIU Yan\_qiang. Strength Analysis of three\_dimensional large deflection drill string in annulus[A]. In: CHIEN Wei\_zang Ed. Proceeding of 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 8: 301—304.
- [3] 刘延强. 大挠度钻柱强度分析和简化方法[A]. 见: 杜庆华编. 力学与应力工程[C]. 北京: 中国林业出版社, 1998, 413—416.
- [4] 刘延强, 蔡强康, 吕英民. 三维井眼轴线的数值模拟计算[J]. 石油大学学报, 1990, 14(3): 45—54.

# Method of Equilibrium Differential Equation for Analysis of Strength of Large Deflection Drill String

LIU Yan\_qiang

( Department of Architectural Engineering , University of Petroleum ,  
Dongying, Shandong 257062, P R China )

**Abstract:** To counter the strength problem of drill string in well of large curvature and small diameter, well axis was taken as datum axis. Based on description of deflection of well axis and on analysis of three dimensional forces of a small section of drill string, equilibrium differential equations of large deflection drill string were established. The internal forces were found by Longe\_Kutta method. The stresses were found by using them and the strength prerequisite was established. Stresses of drill string in lateral horizontal well H767 were computed. The results are in agreement with those of finite element model and soft\_ropo rigidified model. But the method is simpler for computation than finite element model and is more perfect than soft\_ropo rigidified model. Curvature of the well is too large and there is stress concentration so that the fraction accident of drill string occurs.

**Key words:** lateral horizontal well; large deflection; drill string; stress; strength; equilibrium differential equation