应用数学和力学, 第 21 卷 第 11 期(2000 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1147_04

单源模糊数的模糊随机有限元方程的解法

刘长虹,　陈　虬

(西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031)

(张汝清推荐)

摘要:　在工程实际情况下, 有时候可以利用单源模糊数的运算法则, 来减少模糊随机有限元方程的计算量　通过推导证明, 其计算量仅相当于求解普通的随机有限元方程　为了更好地适应现代工程设计的需要, 还提出用模糊随机有限元方程计算结果求结构模糊失效概率的近似方法

关　键　词:　模糊数;　模糊随机有限元;　Edgeworth 级数
中图分类号:　O159　　　文献标识码:　A

引　　言

模糊与随机因素是工程中常见的两种不确定因素, 现已有很多有关的报道[1~3]　常用的方法是, 用模糊数, 区间数的运算, 将模糊随机有限元方程转化为两个随机有限元方程, 然后再用一般的随机有限元方程求解这些方程　如果还要了解计算结果的模糊分布情况, 根据区间分解定理, 需要把 (_截集中),　取遍 0 到 1 之间的数值

此外, 对于一个模糊随机结构, 通常不可能事先选择合适的　值, 以满足工程实际需要　故必须经过几次试算, 才能得到满意的结果　当结构较大并且复杂时, 其计算量将是很大的

根据随机有限元理论结合工程常见的情况, 不难发现, 在很多情况下可以使用单源模糊数的运算法则来减少模糊随机有限元的计算量

1　单源模糊数的模糊随机有限元解法

根据文献[4], 单源模糊数的定义为

设 R 是实数论域, T 是 R 上所有模糊数组成的集合, A　$T, f: R$　R; 称

$$T_A = \left\{ B \mid B = f(A), B \quad T \right\}, \tag{1}$$

为单源模糊集; 称 A 为 T_A 的模糊源; 称 B 为 T_A 上的单源模糊数, 记为 B　T_A

根据单源模糊数的定义, 任意一个单源模糊数可以表示为一个实数和一个单位模糊数的形式　文献[4] 给出了确定单位模糊数的方法:

设 A 的支集是, $\mathrm{supp}A = [a_0^-, a_0^+]$, A 的核是, $\mathrm{Ker}A = [a_1^-, a_1^+]$

1) 当 $0 / \mathrm{supp}A$ 时, $A = 0\ 5(a_1^- + a_1^+)I$; 2) 当 0　$\mathrm{supp}A$ 时, $A = 0\ 5(a_1^- + a_1^+ - 4a_0^-)I + 2a_0^-$

收稿日期:　1999_01_29;　修订日期:　2000_05_25
基金项目:　国家自然科学基金资助项目(59678039)
作者简介:　刘长虹(1957　) , 男, 湖南武汉人, 副教授, 博士.

在工程实际问题中, 当 A 的支集中含有 0 元素时, 一般情况下 $\bar{a_0} = 0$ 所以以下的讨论将在这种条件下进行

当结构的某一个参数 Z 具有模糊随机性时, 可以认为参数的取值为模糊数, 其随机性可用一个随机小参数 表示, 即

$$Z = Z_0(1+ \quad) = Z_0(1+ \quad)I^Z,$$

其中: I^Z 为单位模糊数, 它反映该参数的模糊性

为均值为零的随机场, 反映出该参数的随机性

当模糊随机结构满足下列条件时:

$$[B] = [B]I^{B/2}, \quad [D] = [D]I^D, \quad \{P\} = \{P\}I^P, \tag{2}$$

即 $[K] = [K]I^K, \quad I^K = I^B \quad I^D$

根据摄动原理[5], 结合上述规则可推导出叠代方程

$$\left.\begin{array}{l}[K_0]\{U_0\} = \{P_0\}, [K_0]\{U_i\} = \{P_i\} - [K_{ij}]\{U_0\}, \\ [K_0]\{U_{ij}\} = \{P_{ij}\} - [K_i]\{U_j\} - [K_j]\{U_i\} - [K_{ij}]\{U_0\}\end{array}\right\} \tag{3a}$$

$$\{U_0\} = \{U_0\} I^U, [K] = [K]I^K, I^U = I^P / I^K, \tag{3b}$$

其中: $[K] = [K_0] + \sum_{i=1}^{n} [K_i] \quad _i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [K_{ij}] \quad _i \quad _j,$

$$[P] = [P_0] + \sum_{i=1}^{n} [P_i] \quad _i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [P_{ij}] \quad _i \quad _j$$

同理, 可得到纽曼随机有限元法的递推公式

$$[K_0]\{U_0\} = \{P\}, [K_0]\{U_i\} = [\quad K]\{U_{i-1}\}, \tag{4a}$$

$$[K] = [K]I^K, \{U\} = \{U\}I^U, I^U = I^P / I^K, \tag{4b}$$

其中: $[K_0]$ 为均值刚度矩阵, 是常量; $[\quad K]$ 是刚度阵的随机波动量

由式(3), (4) 可知, 当满足条件(2) 时, 结构模糊随机有限元方程的计算量相当于解同类的随机有限元方程 在工程实际问题中, 结构的弹性模量, 某些几何参数例如杆, 梁的横截面等, 及载荷是模糊变量时, 对结构的影响较大 而这类问题经过适当的处理后, 可满足条件(2)

2 模糊随机结构的模糊失效概率

结构的失效概率是现代工程设计标准的一个重要指标 但现有的模糊随机有限元算法并不能算出这个指标 因此本文将利用现有的模糊随机有限元方法的计算法近似求出结构的模糊失效概率 为了便于讨论, 先给出结构模糊失效概率的定义

定义[6] 设结构失效 是一个模糊事件, 则结构的模糊失效概率为:

$$P_f = \int_{-} f(X) \quad (X)\,\mathrm{d}X, \tag{5}$$

式中: $f(X)$ 为随机向量 $X = \{x_1, \quad , x_n\}$ 的联合概率密度函数, (X) 为结构反应 的隶属度, 即结构的模糊失效概率是结构反应对模糊失效域 的隶属度的数学期望值

由定义知, 要得到结构的模糊失效概率, 必须知道有关的隶属函数和概率密度函数

2 1 隶属函数的确定方法

当模糊随机有限元方程满足条件(2) 时, 则计算结果是模糊数, 隶属函数为已知的 当不能满足条件(2) 时, 可用 _截集法[2] 做有限次运算, 例如分别令 等于 1 和(0, 1) 区间的几个值 然后用多项式等函数近似拟合真实的隶属函数

根据模糊数学理论[7], 当所有的模糊变量皆是指数(或正态)型时, 一般经过模糊运算, 仍可表示为指数(或正态)与一个多项式乘积的形式 所以, 在上述情况下建议拟合函数取如下的形式:

指数型: $(x) \quad (ax^2 + bx + c) \quad \exp\left\{- dx\right\}$,

正态型: $(x) \quad (ax^2 + bx + c) \quad \exp\left\{- d(x - k)^2\right\}$,

其中: a, b, c, d, k 为待定系数

2 2 概率密度函数的确定

1) 当所用的随机有限元方法(例如纽曼随机有限元法)能够算出有关结果的各阶中心矩 $_1(I = 1, 2, 3, \quad)$ 时 根据 Edgeworth 级数, 概率密度函数的近似表达式为,

$$f(x) \quad (x) - \frac{1}{3!}\frac{^3}{^3}{}^{[3]}(x) + \frac{1}{4!}\left(\frac{^4}{^4} - 3\right){}^{[4]}(x) + \frac{10}{6!}\left(\frac{^3}{^3}\right)^2{}^{[6]}(x) - \frac{1}{5!}\left(\frac{^5}{^5} - 10\frac{^3}{^3}\right){}^{[5]}(x) - \frac{35}{7!}\frac{^3}{^3}\left(\frac{^4}{^4} - 3\right){}^{[7]}(x) \qquad (6)$$

其中: ${}^{[k]}(x)$ 表示标准正态概率密度函数的第 k 阶导数

2) 当用随机有限元法(例如摄动有限元法)只能得出有关结果的均值, 方差和协方差时 在一般情况下得不出概率密度函数的近似值 但在随机变量都服从正态分布时, 根据摄动随机有限元的推导[7]可知, 随机参数将表示成为:

$$Z = Z_0(1 + \quad), \qquad (7)$$

式中: Z_0 为随机参数 Z 的均值; 是均值为零的随机场, 它反映了随机参数的随机性 对随机场 离散后, 可化为随机向量$\{\ \}$ 当有限元离散网格确定后, 刚度矩阵和载荷列阵在$\{\ \}$的均值处按泰勒级数展开, 在略去二阶以上的项, 最后可得位移的一阶近似式

$$\{U\} = \{U_0\} + \sum_{i=1}^{n}\{U_i\}\ _i,$$

其中: $\{U_0\}$ 表示位移的均值; n 是$\{\ \}$向量中随机变量总数; $\{U_i\}$ 表示对 $_i$ 求偏导数 由上可知, 位移将服从正态分布

3 例题与小结

例 1 单向拉伸板, 板厚为 1, 泊松比为 0 3, 弹性模量为随机扰动量, 均值为 1 0, 方差为 0 01, 相关偏度为 1 设均布载荷 q 为模糊变量, 隶属函数为,

$$z = \exp\left\{- (q - 1)^2\right\},$$

取其单位模糊数为

$$I^q = (1 \quad \sqrt{- \ln}\ ), \qquad [0, 1]),$$

则位移为 $\{U\} = \{U\}I^q$,

将该结构离散处理为随机有限元模型, 共划分为 35 个节点, 50 个单元 其大(模糊)位移沿 x 向为

$$u_{\max} = 0\ 874I^q$$

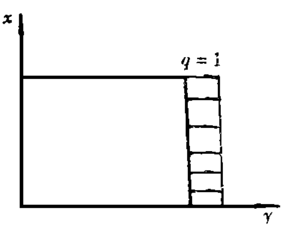

图 1 单向拉伸平板

例 2 矩形板长 100mm, 宽 50mm, 载荷 1000N, 泊松比 0 3 设弹性模量为正态分布的随机变量, 均值是 10^4MPa, 标准差是 10^3MPa 失效准则为节点沿 x 方向的位移大于容许位移即 u_2 0 5mm 时失效 用蒙特卡罗法取 100 000 次抽样, 所得到的可靠度为 0 986 34 用纽曼随机有限元法计算出节点 2 位移的均值, 方差以及 3 到 6 阶中心矩, 然后用拟合级数代替概率密度

函数可得节点 2 的可靠度为 0 984 96; 如果用本文提出的方法即近似取节点 2 的概率密度函数为正态分布, 得到的可靠度为 0 995 4, 可知本文提出的方法与精确解很接近

综上所述, 尽管模糊随机有限元法计算比较繁复　但是在很多情况下可以用本文所提出的方法简化计算

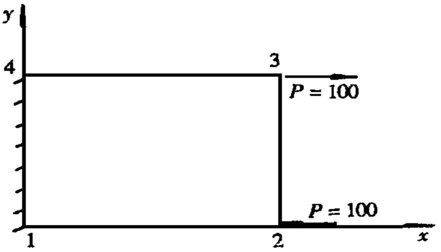

图 2　矩形平板

此外, 本文提出的用多项式来近似表示真实的概率密度函数和近似确定隶属函数的方法, 使得可以利用随机有限元法算出的各阶矩, 算出结构的模糊失效概率

当所用的随机有限元法算不出高阶矩时, 如果随机变量都是正态分布, 则这时可用正态分布近似代替计算结果的真实的概率分布　随机变量的分布是其它情况, 将在今后进行讨论

[参　考　文　献]

[1] Isaac Elishakoff. Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity, fuzziness, or anti_optimization[J]. Appl Mech Rev, 1998, **51**(3): 209　218.

[2] 吕恩琳. 模糊随机有限元平衡方程的摄动解法[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(7): 631　638.

[3] 禹智涛, 吕恩琳, 王彩华. 结构模糊有限元平衡方程的一种解法[J]. 重庆大学学报, 1996, **19**(1): 53　58.

[4] 王柏生. 单源模糊数及运算[J]. 模糊系统与数学, 1998, **12**(2): 49　53.

[5] 南宫自军, 汪亮, 张择. 结构可靠度计算的一种新方法[J]. 西北工业大学学报, 1998, **16**(4): 599　602.

[6] 王光选, 王文泉. 抗震结构的模糊可靠性分析[J]. 力学学报, 1986, **18**(5): 448　455.

[7] 扬松林. 工程模糊论方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.

[8] 陈轧, 刘先斌. 随机有限元法及其工程应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.

[9] 周则恭, 等. 概率断裂力学在压力容器中的应用[M]. 北京: 中国石化出版社, 1996.

A Method of Solving the Fuzzy Finite Element Equations in Monosource Fuzzy Numbers

LIU Chang_hong,　CHEN Qiu

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China)

Abstract: For some cases the rules of monosource fuzzy numbers can be used into the solution of fuzzy stochastic finite element equations in engineering. This method can reduce the computing quantity of the solution. It can be proved that the amount of the solution is nearly as much as that with the general stochastic finite element method (SFEM). In addition, a new method to appreciate the structural fuzzy failure probability is presented for the needs of the modern engineering design.

Key words: fuzzy numbers; fuzzy stochastic finite element method (FSFEM); Edgeworth series