应用数学和力学, 第 21 卷 第 11 期(2000 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1140_08

小参数时变非线性系统的技术稳定性*

楚天广[1], 王照林[2]

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(叶庆凯推荐)

摘要: 分析一类含小参数的时变非线性系统关于给定状态约束集合的技术稳定性• 根据向量微分比较原理和基本的单调性准则, 利用向量 V 函数方法给出由系统系数表达的技术稳定性判据• 并讨论了基于派生系统和线性化方法研究非线性系统技术稳定性的条件• 另外, 对于派生时变线性系统的指数稳定性给出了简单的代数判据• 最后给出示例说明文中方法•

关 键 词: 时变非线性系统; 小参数; 技术稳定性; 向量比较原理; 派生系统; 线性化方法; 指数渐近稳定性

中图分类号: O175.21 文献标识码: A

引 言

工程技术中的稳定性问题往往与系统容许的扰动强度和受扰运动偏差的具体量值相关, 具有定量的特征• 通常的 Liapunov 稳定性本身是定性的概念, 因此有时难以恰当地刻画稳定性问题的定量特征[1~5]• 例如一个 Liapunov 稳定的系统可能会因其瞬态运动超越实际所容许的界限而失去实际意义, 而一个围绕 Liapunov 不稳定的运动状态作小幅振动的系统其性能却可能为实际所接受• 对此文献[1]中曾以受迫 van der Pol 方程为例予以详细说明• 这些情况并不奇怪, 因为从应用的观点来看, 如果在一定限度内的(初始)扰动作用下, 系统的受扰运动偏差能够保持在实际允许的范围内, 则系统即可认为是稳定的• 实际上许多问题如飞行器和机器人的运动都是如此• 对于这类情况, 技术稳定性[3,4]概念能予以恰当的描述• 其特点是直接利用所给的各种容许误差定量地评估受扰系统的轨线行为(文献中有时称这类稳定性为 practical stability(即实用稳定性, 例如参见[1], [5], [6])• 然而这个词也被用于描述不确定系统的鲁棒稳定性(例如[7]), 其含义与本文所指不同)• 因而被广泛应用于如飞机和机器人等复杂系统的动力学与控制问题[4~6,8]•

本文分析一类含小参数的时变非线性系统的技术稳定性• 根据微分比较原理和单调性准则, 利用向量 V 函数方法得到简便的技术稳定性条件• 这些条件仅与系统的系数有关, 易于

* 收稿日期: 1999_08_03; 修订日期: 2000_05_25
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872005); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(97000130); 航天工业总公司五 ϩ 二研究所(部分)资助课题
作者简介: 楚天广(1964~), 男, 河南杞县人, 副教授, 博士;
王照林(1928~), 男, 山东掖县人, 教授, 博士生导师.

直接验证. 文中讨论了派生(时变线性)系统和原系统在技术稳定性方面的联系. 另外还给出(派生)时变线性系统指数稳定性的代数判据, 并简要讨论了非线性系统技术稳定性问题的线性化方法. 文中给出示例说明主要结果.

以下约定: 向量的绝对值和向量之间的不等式均按分量定义, 例如对 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ 意味着 $x_i \leqslant y_i(\forall i)$; $|\boldsymbol{x}| = [|x_1|, \cdots, |x_n|]^{\mathrm{T}}$, 记 $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, $\bar{S}$ 表示集合 $S \subset \mathbf{R}^n$ 的闭包.

1　问题表述

工程问题中经常遇到一类小参数时变非线性系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \qquad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}(t) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{n\times n})$, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ 是小参数. 方程(1)可以看作是非线性系统在某个参考运动(例如周期运动)附近展开所得. 记 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 为系统(1)满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解. 考虑关于与系统(1)的估计区域:

- 时间区间 $T = [t_0, t_0 + \tau]$;
- 初始偏差集合 $S_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n: |\boldsymbol{x}| < \alpha\}$;
- 容许过程偏差集合 $S_\beta(t) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n: |\boldsymbol{x}| < \beta(t)\}$,

其中 $\tau > 0$ 为常数或 $+\infty$, $\alpha = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]^{\mathrm{T}} > \boldsymbol{0}$ 是常向量, $\beta(t) = [\beta_1(t), \cdots, \beta_n(t)]^{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{0}$ 有界连续可微并且 $\alpha < \beta(t_0)$. 这些集合分别反映了系统的运动时间区间以及所能容许的初始干扰强度和过程状态与标称运动状态(不妨设为 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$)的偏差范围, 在具体问题中事先给定. 系统(1)关于这些集合的技术稳定性定义如下:

定义　如果对 $\boldsymbol{x}_0 \in S_\alpha$ 有 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \in S_\beta(t)(t \in T)$, 则称系统(1)关于 $\{S_\alpha, S_\beta(t), T, t_0\}$ 技术稳定.

以下引理是本文工作的基础, 其中 $D\boldsymbol{g}(t)$, $D^-\boldsymbol{g}(t)$ 表示 $\boldsymbol{g}(t)$ 的 Dini 导数.

引理 1(比较原理)　设 $\boldsymbol{M}(t) = [M_{ij}(t)]_{n\times n}$ 连续且 $m_{ij}(t) \geqslant 0(i \neq j)$; $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{n} \in C([a, b], \mathbf{R}^n)(0 \leqslant a < b$ 是常数), 满足条件:

1) $D^-\boldsymbol{p}(t) \leqslant \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{n}(t), t \in (a, b]$;

2) $D^-\boldsymbol{q}(t) > \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{n}(t), t \in (a, b]$;

3) $\boldsymbol{p}(a) \leqslant \boldsymbol{q}(a)$,

则 $\boldsymbol{p}(t) < \boldsymbol{q}(t), t \in [a, b]$.

证明　反证之. 假设结论不成立, 则由条件 3) 和连续性知存在 i: $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $t' \in (a, b]$, 使得在 $[a, t']$ 上有 $\boldsymbol{p}(t) \leqslant \boldsymbol{q}(t)$, $p_i(t') = q_i(t')$. 由此易知 $D^-p_i(t') \geqslant D^-q_i(t')$.

同时, 从条件 1), 2) 和 $\boldsymbol{M}(t)$ 的非负性可得

$$D^-p_i(t') \leqslant \boldsymbol{M}_i(t')\boldsymbol{p}(t') + n_i(t') \leq \boldsymbol{M}_i(t')\boldsymbol{q}(t') + n_i(t') < D^-q_i(t'),$$

其中 $\boldsymbol{M}_i(t)$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}(t)$ 的第 i 行向量. 矛盾! 引理 1 得证.

引理 2(单调性准则)　向量函数 $\boldsymbol{p} \in C([a, b], \mathbf{R}^n)$ 单调不增当且仅当 $D\boldsymbol{p}(t) \leqslant 0, t \in (a, b]$.

证明　根据前面约定, $\boldsymbol{p}(t)$ 单调不增等价于其每个分量 $p_i(t)$ 单调不增, 后者等价于 $Dp_i(t) \leqslant 0(t \in (a, b])$. 得证.

最后对于系统(1)假设有 $\boldsymbol{h} \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+^n)$ 满足:

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant \boldsymbol{h}(t), (t, \boldsymbol{x}) \in T \times S_{\beta}(t), \tag{2}$$

对于 $\boldsymbol{A}(t) = [a_{ij}(t)]$ 和 $\boldsymbol{h}(t) = [h_1(t), \cdots, h_n(t)]^{\mathrm{T}}$, 引入记号:

$$\boldsymbol{A}(t) = [a_{ij}(t)], \hat{\boldsymbol{A}} = \sup_t \boldsymbol{A}(t), \hat{\boldsymbol{h}} = \sup_t \boldsymbol{h}(t),$$

其中 $a_{ij}(t) = \delta_{ij} a_{ij}(t) + (1 - \delta_{ij}) | a_{ij}(t) |$, δ_{ij} 为 Kronecker 符号•

2 主要结果

现在利用引理 1, 2 建立系统(1) 的技术稳定性判据, 并讨论基于派生系统和线性化的方法•

2.1 技术稳定性判据

首先由引理 1 得以下微分形式的向量直接判据•

定理 1 如果下列条件成立, 则系统(1) 关于 $\{S_\alpha, S_\beta(t), T, t_0\}$ 技术稳定:

$$\boldsymbol{A}(t)\beta(t) + \varepsilon\boldsymbol{h}(t) < \dot{\beta}(t) \qquad (t \in T)•$$

证明 设结论不成立, 则必有 $\boldsymbol{x}_0 \in S_\alpha$ 和 $t_1 \in T$ 以及 $1 \leqslant k \leqslant n$, 使 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \in S_\beta(t)$ $(t \in [t_0, t_1))$ 且 $| x_k(t_1, t_0, \boldsymbol{x}_0) | = \beta_k(t_1)$•

然而, 取向量函数 $\boldsymbol{v} = [v_1(t), \cdots, v_n(t)]^{\mathrm{T}}$, 其中 $v_i(t) = | x_i(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) |$• 则由(1) 得

$$D^- v_i(t) = a_{ii}(t) | x_i | + \left[\sum_{j \neq i} a_{ij}(t) x_j + \varepsilon f_i(t, \boldsymbol{x})\right] \operatorname{sgn} x_i(t - 0) \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) v_i(t) + \varepsilon h_i(t), t \in (t_0, t_1]•$$

写成向量形式为

$$D^- \boldsymbol{v}(t) \leqslant \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t) + \varepsilon\boldsymbol{h}(t), t \in (t_0, t_1]•$$

同时容易验证

$$\boldsymbol{v}(t_0) \leqslant \alpha < \beta(t_0)•$$

于是由假设条件从引理 1 可得 $\boldsymbol{v}(t) < \beta(t)(t \in [t_0, t_1])$, 从而 $| x_k(t_1, t_0, \boldsymbol{x}_0) | = v_k(t_1) < \beta_k(t_1)$, 与上述矛盾• 定理 1 得证•

注 1 如果系统(1) 的系数均有界, 由定理 1 得如下形式的充分条件:

$$\hat{\boldsymbol{A}}\beta(t) + \varepsilon\hat{\boldsymbol{h}} < \dot{\beta}(t) \qquad (t \in T)•$$

实际上, 根据有关符号的定义显然有 $\boldsymbol{A}(t)\beta(t) + \varepsilon\boldsymbol{h}(t) \leqslant \hat{\boldsymbol{A}}\beta(t) + \varepsilon\hat{\boldsymbol{h}} < \dot{\beta}(t) \qquad (t \in T)$•

注 2 如果 $\beta(t) \equiv \beta > \boldsymbol{0}$ 为常向量• 上述条件化为:

$$\boldsymbol{A}(t)\beta + \varepsilon\boldsymbol{h}(t) < \boldsymbol{0} \text{ 和 } \hat{\boldsymbol{A}}\beta + \varepsilon\hat{\boldsymbol{h}} < \boldsymbol{0} \qquad (t \in T)•$$

根据引理 2 可得积分形式的向量直接判据•

定理 2 如果下列条件成立, 则系统(1) 关于 $\{S_\alpha, S_\beta(t), T, t_0\}$ 技术稳定:

$$\int_0^t [\boldsymbol{A}(s)\beta(s) + \varepsilon\boldsymbol{h}(s)] \mathrm{d}s < \beta(t) - \alpha \qquad (t \in T)•$$

证明 类似定理 1 的证明, 如果结论不成立, 则必有 $\boldsymbol{x}_0 \in S_\alpha$ 和 $t_1 \in T$ 以及 $1 \leqslant k \leqslant n$, 使 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \in S_\beta(t)(t \in [t_0, t_1))$ 且 $| x_k(t_1, t_0, \boldsymbol{x}_0) | = \beta_k(t_1)$•

同时, 由定理 1 的证明不难验证

$$D^- \left\{\boldsymbol{v}(t) - \int_{t_0}^t [\boldsymbol{A}(s)\beta(s) + \varepsilon\boldsymbol{h}(s)] \mathrm{d}s\right\} \leqslant 0 \qquad (t \in (t_0, t_1])•$$

因此根据引理 2 和假设条件得

$$v(t_1) \leqslant v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [A(s)\beta(s) + \varepsilon h(s)]\,ds \leqslant$$
$$\alpha + \int_{t_0}^{t_1} [A(s)\beta(s) + \varepsilon h(s)]\,ds < \beta(t_1).$$

矛盾！定理 2 得证.

注 3　设 $\beta(t) = \beta > 0$ 为常向量, 则由定理 2 立即得到下列充分条件:

$$A^*\beta + \varepsilon h^* < \beta - \alpha,$$

其中 $A^* = [a^*_{ij}]$, $a^*_{ii} = \sup\limits_{t\in T}\int_{t_0}^{t} a_{ii}(s)\,ds$, $a^*_{ij} = \int_T a_{ij}(s)\,ds$, $i \neq j$; $h^* = \int_T h(s)\,ds$.

因为这时容易验证 $\int_{t_0}^{t} [A(s)\beta + \varepsilon h(s)]\,ds \leqslant A^*\beta + \varepsilon h^* \quad (t \in T)$.

2.2　基于派生系统的结论

实际中往往希望通过系统(1)的派生(时变线性)系统:

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

来了解原系统(1)的性态. 首先由定理 1 和注 1, 3 直接可得如下结论:

推论 1　如果下列条件之一成立, 则系统(3)关于 $\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T, t_0\}$ 技术稳定:

1) $A(t)\beta(t) < \dot{\beta}(t) \qquad (t \in T)$;

2) $\hat{A}\beta(t) < \dot{\beta}(t) \qquad (t \in T)$;

3) $A^*\beta < \beta - \alpha$.

现在考虑任意给定的有限时间区间 $T = [t_0, t_0 + \tau]$. 以下结论表明, 在一定条件下可以根据派生系统(3)的技术稳定性来确定系统(1)的相应性质.

推论 2　如果派生系统(3)按推论 1 条件关于 $\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T, t_0\}$ 技术稳定, 则 $\exists\, \varepsilon'(\tau) > 0$, 当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon'(\tau))$ 时系统(1)有相同的技术稳定性, 其中相应于推论 1 的条件 1) ~ 3) 分别有

$$\varepsilon'(\tau) = \min_{t\in T}\left\{\frac{h^{\mathrm{T}}(t)[\dot{\beta}(t) - A(t)\beta(t)]}{h^{\mathrm{T}}(t)h(t)}\right\};$$

$$\varepsilon'(\tau) = \min_{t\in T}\left\{\frac{\hat{h}^{\mathrm{T}}[\dot{\beta}(t) - \hat{A}\beta(t)]}{\hat{h}^{\mathrm{T}}\hat{h}}\right\};$$

$$\varepsilon'(\tau) = \frac{h^{*\mathrm{T}}[(I - A^*)\beta - \alpha]}{h^{*\mathrm{T}}h^*}.$$

证明　设派生系统(3)满足推论 1 的条件 1), 则在有限时间区间 T 上根据有关函数的连续性得 $0 < \varepsilon'(\tau) < +\infty$, 显然 $\varepsilon'(\tau)$ 依赖于 τ 并且关于 τ 单调不增. 当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon'(\tau))$ 时可以验证

$$A(t)\beta(t) + \varepsilon h(t) < A(t)\beta(t) + \varepsilon'(\tau)h(t) \leqslant \dot{\beta}(t)$$

对 $t \in T$ 成立, 故由定理 1 得系统(1)关于 $\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T, t_0\}$ 技术稳定. 其余情况证明类似(略). 证毕.

注 4　文[9]用类似方法讨论了非线性系统的正不变集及时变线性系统的 Lyapunov 稳定性, 特别是其中推论 3.3 还得到时变线性系统指数渐近稳定性的一个代数充分条件, 下面是它的一个等价形式.

定理 3　如果有常向量 $\rho > \mathbf{0}$ 使 $\hat{A}\beta < \mathbf{0}$, 或等价地(因为此时 $-\hat{A}$ 是 M_矩阵[10]):

$$(-1)^i\Delta_i=(-1)^i\begin{vmatrix}\hat a_{11} & \cdots & \hat a_{1i}\\ & \cdots & \\ \hat a_{i1} & \cdots & \hat a_{ii}\end{vmatrix}>0\qquad (i=1,\cdots,n),$$

则系统(3)的零解指数渐近稳定•

注 5 由于时变线性系统的性态不能象定常线性系统那样简单地由系数矩阵的特征值确定,因此如何判断其性态一直是一个重要而困难的问题,迄今尚无有关时变线性系统渐近稳定性的充要条件[4]• 上述结果提供了一个简便的代数判据,可以用系统的系数直接检验• 文[11]曾用不同方法得到这一结果•

2.3 线性化方法

对于一般的非线性系统,利用线性化方法研究其技术稳定性具有实际意义• 下面对此简要讨论• 考虑非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\qquad (t\geqslant 0)\bullet \tag{4}$$

设 $\boldsymbol{F}(t)=(\partial/\partial\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(t,0)$ 是 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的Jacobi矩阵, $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}$• 由前面讨论知如果下列条件成立,则非线性系统(4)关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t),T,t_0\}$ 技术稳定:

1) $\boldsymbol{F}(t)\beta(t)<\dot\beta(t)\qquad (t\in T)$;

2) $|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})|<\dot\beta(t)-\boldsymbol{F}(t)\beta(t)\qquad ((t,\boldsymbol{x})\in T\times S_\beta(t))$•

其中条件1)保证了系统(1)的首次近似系统关于 $\{S_\alpha,S_\beta(t)T,t_0\}$ 技术稳定,条件2)则是关于高次项的增长性条件•

3 示　　例

现在举例说明本文主要结果•

例 1 考虑时变非线性系统

$$\begin{cases}\dot x_1=-2x_1+t(1+t)^{-1}(\cos t)x_2+t(\cos t)x_3+\varepsilon f_1(t,\boldsymbol{x}),\\ \dot x_2=0.2(1+t)^{-1}(\sin t)x_1-x_2+0.2(\sin t)x_3+\varepsilon f_2(t,\boldsymbol{x}),\\ \dot x_3=(1+t)^{-1}(\cos t)x_1+0.5(\cos t)x_2-3x_3+\varepsilon f_3(t,\boldsymbol{x}),\end{cases}$$

其中 $0<\varepsilon<0.5$, $f_i(t,\boldsymbol{x})$ 为非线性项• 所给估计区域为: $T=[2,2+\tau)$, $\tau>0$ 是常数;

$$S_\alpha=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3:|x_1|<0.6,|x_2|<0.15,|x_3|<0.2\},$$

$$S_\beta(t)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3:|x_1|<2(1+t)^{-1},|x_2|<(1+t^2)^{-1},|x_3|<2(1+t)^{-2}\}\bullet$$

设非线性项满足(2)式,其中 $\boldsymbol{h}(t)=[2(1+t)^{-1},0.4(1+t)^{-2},(1+t^2)^{-1}]^{\mathrm T}$• 则系统关于所给估计区域技术稳定•

事实上根据定理1,由于

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}-2 & t(1+t)^{-1}|\cos t| & t|\cos t|\\ 0.2(1+t)^{-1}|\sin t| & -1 & 0.2|\sin t|\\ (1+t)^{-1}|\cos t| & 0.5|\cos t| & -3\end{bmatrix},$$

$$\alpha=[0.6,0.15,0.2]^{\mathrm T},\ \beta(t)=[2(1+t)^{-1},(1+t^2)^{-1},2(1+t)^{-2}]^{\mathrm T}\bullet$$

检验可知

$$\boldsymbol{A}(t)\beta(t)+\varepsilon\boldsymbol{h}(t)<\dot\beta(t)\qquad (t\in T)\bullet$$

定理1条件满足,故结论成立• 另外,由 $\beta(t)\to 0(t\to+\infty)$ 得知系统始于 S_α 的解均渐近趋向

于零, $\beta(t)$ 则给出这些解的渐近阶估计•

例 2　考虑时变线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(1+0.5\sin t)x_1 + 0.3(\cos t)x_2, \\ \dot{x}_2 = 0.8(\cos t)x_1 - (1-0.5\cos t)x_2 \bullet \end{cases}$$

计算可得

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ 0.8 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$(-1)\Delta_1 = 0.5 > 0, (-1)^2\Delta_2 = 0.01 > 0 \bullet$$

根据定理 3, 系统的零解全局指数渐近稳定•

4　结　　论

时变非线性系统的性态分析在工程实际中经常遇到, 是一个重要而困难的问题•　本文利用时变集合定义一类小参数时变非线性系统的技术稳定性, 这些集合定量地刻画了系统的运动范围和瞬态性能, 对于了解系统的动态性质具有重要意义•　文中根据微分比较原理和基本的单调性准则, 利用向量 v 函数 方法建立了技术稳定性的显式判据, 便于应用•　同时这些结果表明, 在一定条件下可以利用派生系统和线性化方法研究非线性系统的技术稳定性•　此外还给出时变线性系统指数渐近稳定性的一个简单的代数判据•

[参　考　文　献]

[1]　LaSalle J P, Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications[M]. New York: Academic Press, 1961.

[2]　Michel A N. Quantitative analysis of systems: stability, boundedness and trajectory behavior[J]. Arch Rat Mech Anal, 1970, **38**(2): 107—122.

[3]　Martynyuk A A. Technical Stability in Dynamics[M]. Kiev: Technika, 1973. (in Russian)

[4]　王照林. 运动稳定性及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.

[5]　Lakshmikantham V, Leela S, Martynyuk A A. Practical Stability of Nonlinear Systems[M]. Singapore: World Scientific, 1990.

[6]　Vukobratovic M, Stokic D. Applied Control of Manipulation Robots[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1987.

[7]　Chen Y H. On the robustness of mismatched uncertain dynamical systems[J]. ASME Trans J Dynamic Systems, Measurement, Control, 1987, **109**(3): 29—35.

[8]　Skowronski J M. Parameter and state identification in non_linearizable uncertain systems[J]. Int J Non_Linear Mech, 1984, **19**(5): 421—429.

[9]　王照林, 楚天广. 向量 V 函数方法与时变非线性大系统的轨线性态[J]. 非线性动力学学报, 1994, **1**(3): 209—213.

[10]　Siljak D D. Large Scale Dynamic Systems, Stability and Structure[M]. New York: Elsevier North_Holland, Inc, 1978.

[11]　Mori T, Fukuma N, Kuwahara M. A stability criterion for linear time_varying systems[J]. Int J Control, 1981, **34**(3): 585—591.

Technical Stability of Nonlinear Time_Varying Systems With Small Parameters

CHU Tian_guang[1], WANG Zhao_lin[2]

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China;

2. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China)

Abstract: Technical stability allowing quantitative estimation of trajectory behavior of a dynamical system over a given time interval was considered. Based on a differential comparison principle and a basic monotonicity condition, technical stability relative to certain prescribed state constraint sets of a class of nonlinear time_varying systems with small parameters was analyzed by means of vector Liapunov function method. Explicit criteria of technical stability are established in terms of coefficients of the system under consideration. Conditions under which the technical stability of the system can be derived from its reduced linear time_varying (LTV) system were further examined, as well as a condition for linearization approach to technical stability of general nonlinear systems. Also, a simple algebraic condition of exponential asymptotic stability of LTV systems is presented. Two illustrative examples are given to demonstrate the availability of the presently proposed method.

Key words: nonlinear time_varying system; small parameter; technical stability; vector comparison principle; reduced system; linearization technique; exponential asymptotic stability